

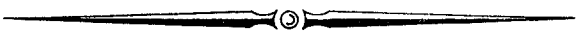


АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР



Л. И. МАНДЕЛЬШТАМ

ПОЛНОЕ СОБРАНИЕ
ТРУДОВ



ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1955

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР



Л.И. МАНДЕЛЬШТАМ

ПОЛНОЕ СОБРАНИЕ
ТРУДОВ
IV

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
АКАДЕМИКА
М. А. ЛЕОНТОВИЧА



ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1955

Комиссия по изданию трудов

Л. И. МАНДЕЛЬШТАМА:

академик *М. А. Леонтович*,

академик *А. А. Андронов*,

академик *Г. С. Ландсберг*, академик *И. Е. Тамм*

ОТ РЕДАКТОРА

До 1932 г. Л. И. Мандельштамом были проведены в Московском университете следующие лекционные курсы и семинары¹:

1925/26 г. Семинар по некоторым вопросам теории излучения электромагнитных волн и оптики.

Ряд рассмотренных на этом семинаре вопросов был подробно освещен Л. И. Мандельштамом позднее — в лекциях 1932/33 г. (см. том V).

1926/27 г. Лекции по теории электромагнитного поля. Во втором семестре работал семинар по колебаниям.

1927/28 г. Семинар по статистической физике.

1928/29 г. Семинар по электронной теории и специальной теории относительности: история электронных воззрений; основные факты, на которые опирается специальная теория относительности; первая работа Эйнштейна, вывод лоренцова преобразования, релятивистская кинематика, эффект Допплера, абберация, френелевский коэффициент увлечения; четырехмерная трактовка теории относительности (обоснование с помощью законов сохранения при соударениях); законы преобразования электромагнитных величин; четырехмерный тензорный анализ; интегрирование уравнений Лоренца, запаздывающие потенциалы; потенциалы Лиенарда—Вихерта, поле точечного заряда при прямолинейном и равномерном и при произвольном движении; гиперболическое движение; излучение, реакция излучения. Значительная часть этого материала (до релятивистской динамики) была подробно освещена в дальнейшем в лекциях по физическим основам теории относи-

¹ Курсы и семинары, проведенные после 1932 г., перечислены в начале V тома.

тельности, прочитанных Л. И. Мандельштамом в 1933/34 г. (см. том V).

1929/30 г. Семинар по волновой механике: уравнения классической механики в гамильтоновой форме; краевые задачи из различных областей физики; обоснование уравнения Шрёдингера; применения уравнения Шрёдингера (изотропный осциллятор, ротатор с закрепленной осью, эффект Штарка, расчет диэлектрической постоянной, групповая и фазовая скорость, задача о соударении электрона с ротатором); общая теория матриц; теория Гейзенберга и ее связь с теорией Шрёдингера. Эта программа была полностью проработана в ряде докладов участников семинара, и в свое время этот материал был единственным, достаточно полным изложением основ волновой механики на русском языке.

1930/31 г. Первая часть курса теории колебаний. Во втором семестре работал также семинар по колебаниям, на котором делали доклады аспиранты и студенты. В программу входили уравнения Лагранжа, теория малых колебаний системы с n степенями свободы, теоремы Куранта и их геометрическая интерпретация и другие вопросы.

1931/32 г. Вторая часть курса теории колебаний. По окончании курса (29 марта 1932 г.) Л. И. Мандельштам начал семинар по статистической физике, в программе которого были вопросы обоснования физической статистики, H -теорема Больцмана, максвелловское распределение скоростей и другие.

В том IV Собрания трудов Л. И. Мандельштама вошел его курс теории колебаний, прочитанный в 1930—32 гг., который удалось почти полностью восстановить по имеющимся запискам. По мнению Комиссии по изданию трудов Л. И. Мандельштама, этот курс, несмотря на свою давность, сохранил значительный научный и педагогический интерес. Курс обработан Г. С. Гореликом и окончательно подготовлен к печати С. М. Рытовым.

Сохранились также довольно подробные записи курса теории электромагнитного поля. Однако Комиссия сочла нецелесообразным восстанавливать этот курс, так как в настоящее время он почти целиком перекрывается имеющейся учебной литературой, в частности книгой И. Е. Тамма „Основы теории электричества“, сложившейся в значительной степени под влиянием лекций Л. И. Мандельштама.

Имеющиеся записи некоторых выступлений Л. И. Мандельштама на семинарах 1925—1932 гг. являются большей частью довольно отрывочными. Составление по ним связных, удобочитаемых текстов, пригодных для включения в Собрание трудов Л. И. Мандельштама (т. е. дающих уверенность в достаточной близости к его подлинной мысли), является чрезвычайно трудной научно-литературной задачей. Такими обработанными текстами Комиссия по изданию трудов Л. И. Мандельштама не располагает.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

КОЛЕБАНИЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИСТЕМ

ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ

(Сентябрь 1930 г.)¹

Для теории колебаний характерно рассмотрение не состояния в данный момент, а процесса в целом. Общие закономерности теории колебаний.

Теория колебаний и волновая механика. Содружество математики, физики и техники в теории колебаний.

Совсем не легко дать определение того, что составляет предмет теории колебаний. Планк как-то сказал, что правильная классификация — это уже высокий вид познания. Это несомненно: ведь правильно классифицировать — это значит давать довольно полные определения. И в данном случае резко разграничить, что такое колебания, а что не колебания, так же трудно, как определить, что такое лысый человек или что такое куча. Постараюсь все же дать представление, о чем будет идти речь в нашем курсе.

Вы знаете маятник, знаете, как он колеблется. Все, что мы слышим, — тоже колебания. Свет также не что иное, как колебания. Электрические колебания вам тоже известны; на них основана вся радиотелеграфия. Движение „туда и обратно“, в частности периодичность, — вот *некоторые* признаки колебаний.

Возьмем конкретный случай, например микрофон. Нас может интересовать, каково натяжение его мембраны в данный момент

¹ [При обработке курса основным материалом служили весьма подробные записи А. А. Андропова, местами близкие по полноте к стенограмме. Лекции 11, 17, 18 и 23-я первой части курса были прочитаны А. А. Андроновым по плану, указанному Л. И. Мандельштамом. Они даны по конспектам А. А. Андропова. Дополнительным материалом служил конспект, составленный М. А. Дивильковским на основании собственных записей. Лекция 15-ая второй части курса, не записанная А. А. Андроновым, восстановлена по конспекту М. А. Дивильковского. Материал обработан Г. С. Гореликом и окончательно подготовлен к печати С. М. Рытовым.]

в данном месте. Или, скажем, частица, движущаяся в заданном поле. Здесь можно интересоваться тем, где находится частица в такой-то момент времени.

Теория колебаний *меняет* эту постановку вопроса. Для нее не типичен интерес к тому, что происходит в данный момент в данном месте. Она мало этим занимается. Ее интересует главным образом *общий характер* процесса, взятого *в целом*, за большое время.

Например, камертон издает звук *la*. Этот звук *не* определяется положением (или скоростью) ножек камертона в данный момент. Запишем движение ножки камертона. То, что камертон дает тон *la*, характеризуется формой всей кривой в целом (рис. 1), определенными особенностями *всей* этой кривой. Хотя и говорят: „я слышу *la* в данный момент“, в действительности дело обстоит не так; те доли секунды, в течение которых в ухе создается ощущение тона *la*, охватывают большое число максимумов и минимумов этой кривой. Ощущение звука *la* образуется, скажем, за полсекунды.

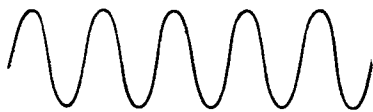


Рис. 1.

В качестве другой иллюстрации рассмотрим классический пример Галилея—Гельмгольца. На балке висит колокол. Вы можете сильно дергать веревку и не раскачаете колокола, а маленький мальчик его раскачает, если придаст выгодную форму кривой своей силы, если будет во-время увеличивать и уменьшать эту силу. Одно дело, насколько колокол отклонится под действием данного груза, другое—как раскачать колокол последовательными толчками. Именно *этим* интересуется теория колебаний. Чтобы раскачать колокол, надо дергать веревку в такт с его колебаниями. Здесь существенно то, что раскачивание определяется *всей* кривой, описывающей процесс воздействия на колокол за время его раскачивания.

В прошлом столетии были замечены следующие явления. Цепной мост иногда разрушался от того, что по нему в ногу шли солдаты. Электрические кабели, испытанные на определенное напряжение, скажем на 10 000 вольт, пробивались иногда при включении на 5000 вольт. Мост разрушается в том случае, когда шаг солдат попадает в такт с качаниями самого моста: когда мост возвращается в исходное положение, его вновь подталкивают.

В электрическом кабеле может происходить нечто похожее, и при этом напряжение постепенно нарастает.

Для этих явлений тоже характерно, что они определяются *всем* течением воздействия во времени.

Те стороны процессов, которые характеризуются их общим видом, формой процесса *в целом*, имеют громадное значение в теории колебаний. Здесь есть вполне определенные важные закономерности, которые остаются одними и теми же в самых разнообразных областях. Это и дает основание выделить теорию колебаний как таковую.

Однако не любой процесс подпадает под эту теорию. Это — теория процессов, в той или иной степени повторяющихся, в частности периодических.

Было бы бесплодным педантизмом стараться „точно“ определить, какими именно процессами занимается теория колебаний. Важно не это. Важно выделить руководящие идеи, основные общие закономерности. В теории колебаний эти закономерности очень специфичны, очень своеобразны, и их нужно не просто „знать“, а они должны войти в плоть и кровь.

Недавно происходила полемика, начатая Флемингом, который отрицал существование „боковых полос“ при модуляции колебаний. Из этой полемики ясно видно, что колебательные закономерности не были им прочувствованы должным образом¹.

В самое последнее время появилось сенсационное известие об „открытии“ Робинсона. Как известно, в радиотехнике *нельзя* строить передающие станции, работающие на слишком близких волнах, так как они мешают друг другу при приеме. Робинсон говорит, что с помощью его изобретения можно сближать волны как угодно. Если сделать некоторые обоснованные предположения, то разбор его изобретения сводится к одной известной задаче из области теории колебаний². Но если не пользоваться при этом общими законами, то разобраться, в чем дело, — не так просто. Положение здесь примерно такое же, как с изобретениями вечного двигателя. Не так легко иной раз доказать, что в данном частном проекте имеется нарушение закона сохранения энергии, что то или другое предложение *perpetuum mobile* неосуществимо. Но зная этот общий закон, вы сразу говорите: „этого не может быть“.

¹ [См. 16-ю лекцию.]

² [См. 19-ю лекцию.]

Следует особо подчеркнуть, что в приведенном примере с „изобретением“ Робинсона речь идет не о законах, специфичных для электричества, а о законах, общих всем колебательным явлениям.

Итак, разница между обычной динамикой и теорией колебаний ясна. Обычную динамику интересует в первую очередь то, что происходит в данном месте в данное время, теорию колебаний — движение в целом.

До последнего времени считалось, что колебания — вторичное явление, что первичными являются положение и скорость движущейся частицы в данный момент. Но в этом представлении наступил переворот. Волновая механика утверждает, что целостность процесса есть нечто столь же первичное, как положение частицы. В волновой механике нельзя говорить отдельно о месте и скорости частицы. То и другое должно быть описано, исходя из более основного понятия — целостности процесса. Таким образом, то, что характерно для теории колебаний — рассмотрение целостного процесса, — лежит в самой постановке проблем микромеханики. Вообще за последние четыре года колебания приобрели основное значение не только в макроскопической физике и технике, но и в законах микрофизики.

Содружество математики, физики и техники нигде так ярко не проявлялось, как в создании математического аппарата теории колебаний. Например, вся задача о колебаниях линейных дискретных систем сводится к учению высшей алгебры о квадратичных формах. Часто случалось, что математические вопросы возникали именно в связи с теорией колебаний. Особенно сильно это проявлялось в теории колебаний сплошных систем. Теория дифференциальных уравнений в частных производных и некоторые вопросы интегральных уравнений имеют чисто физическую основу, связанную с колебаниями. Замечу, что здесь математика в долгу у физики. Зато мы, физики, можем пользоваться тем, что математики продвигали в своих интересах. Отсюда, между прочим, видно, насколько неправильно деление на „абстрактные“ и „прикладные“ науки. Они получают пищу друг от друга. Хорошей иллюстрацией этого может служить пример рядов Фурье.

Еще одно небольшое замечание.

В теории колебаний широко пользуются упрощенной математической трактовкой, приводящей к *линейным* дифференциальным уравнениям, и еще очень недавно думали, что в теории колебаний можно ими ограничиться. Развитие радиотехники привело к тому,

что в некоторых весьма важных вопросах теория, основанная на линейных дифференциальных уравнениях, оказалась недостаточной. Сегодня, даже в элементарном курсе, уже нельзя ограничиваться линейным рассмотрением. Нам придется поэтому коснуться, хотя и в краткой форме, также нелинейных задач.

Перехожу к перечислению основных вопросов, которых мы будем касаться в нашем курсе (я не даю точной программы, а лишь некоторую наметку).

1. Основные понятия и терминология теории колебаний (специфические термины, как, например, частота, циклическая частота, логарифмический декремент и т. п.).

2. Математический аппарат, пригодный для теории колебаний.

3. Изучение тех систем и тех процессов, с помощью которых создаются колебания.

4. Распространение колебаний в пространстве (на этом мы почти не остановимся).

5. Прием, исследование, восприятие колебаний.

В качестве литературы я могу вам рекомендовать следующие книги:

А. Н. Крылов. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики; Мещерский. Курс теоретической физики; Релей. Теория звука; Helmholtz. Die Lehre von den Tonempfindungen и Vorlesungen über die theoretische Physik; H. v. Helmholtz. Technische Schwingungslehre¹.

¹ [Здесь приводятся, конечно, те книги, которые были названы Л. И. Мандельштамом. В настоящее время имеется ряд других учебников и монографий, появившихся в нашей литературе позднее. Укажем некоторые из них: А. А. Андронов и С. Э. Хайкин. Теория колебаний, ч. I (М.—Л., 1937); Н. Г. Четаев. Устойчивость движения (М., 1946); А. Пуанкаре. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями (М., 1947); Т. Карман и М. Био. Математические методы в инженерном деле (М., 1948); Ю. И. Неймарк. Устойчивость линеаризованных систем (Л., 1949); Н. Н. Баутин. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости (М., 1949); И. Г. Малкин. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний (М., 1949); Ф. Морз. Колебания и звук (М., 1949); Г. С. Горелик. Колебания и волны (М.—Л., 1950); С. П. Стрелков. Введение в теорию колебаний (М., 1950); С. Г. Михлин. Проблемы минимума квадратичного функционала (М., 1952); Дж. Стокер. Нелинейные колебания в механических и электрических системах (М., 1952); И. М. Капчинский. Методы теории колебаний в радиотехнике (М.—Л., 1954).]

ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ

(Сентябрь 1930 г.)

Периодическая функция. Синусоидальная функция. Амплитуда, частота, циклическая частота, фаза. Диапазон частот, встречающихся в природе. Среднее, среднее квадратичное, эффективное значение. Сложение синусоидальных колебаний. Суперпозиция, неудачность термина „интерференция“; неаддитивность энергий. Сложение колебаний со случайными фазами; необходимость статистического постулата; аддитивность энергий в среднем; когерентные и некогерентные колебания.

Мы говорили в прошлый раз о том, что несколько трудно определить ту область, которой занимается теория колебаний. Мы говорили, что особенности, характерные для колебательных явлений, повторяются в самых разнообразных областях и что теория колебаний интересуется преимущественно целостными процессами. Среди процессов, находящихся в центре внимания теории колебаний, особенно важную роль играют процессы повторяющиеся или, в несколько более узком разрезе, периодические.

Мы займемся сначала периодическими процессами. В качестве математического инструмента мы будем пользоваться здесь периодическими функциями, т. е. такими функциями $y=f(t)$, что при любом t и определенном τ

$$f(t + \tau) = f(t).$$

τ называется периодом. Нетрудно показать, что если функция имеет период, то она имеет бесчисленное множество периодов. Действительно,

$$f(t + \tau + \tau) = f(t + \tau) = f(t).$$

Следовательно, 2τ — тоже период, и вообще любое целое кратное от периода есть период. Принято, говоря без каких-либо дальнейших указаний о периоде, иметь в виду наименьший период.

Итак, периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. Возможны ли у периодической функции несоизмеримые периоды? Нетрудно доказать, что этого не может быть, если функция не есть постоянная (постоянная есть периодическая функция, для которой любое число есть период). Предположим, что функция имеет два периода τ и τ' . Если τ — период, то $n\tau$, где n — любое целое число, тоже период. Если τ' — период, то $m\tau'$, где m — любое целое число, тоже период. Если τ и τ' несоизмеримы, то можно выбрать n и m так, чтобы разность $m\tau' - n\tau$

была как угодно мала. Но эта разность тоже есть период, а значит, функция имеет сколь угодно малый период. Но такая функция есть постоянная.

Построить периодическую функцию можно весьма разнообразными способами. Можно, например, задать в некотором интервале $(0, \tau)$ любую функцию и затем повторять ее неограниченное число раз слева и справа. Вообще говоря, значения функции в начале интервала и в конце предыдущего не совпадут (рис. 2). Следовательно, построенные таким путем функции в общем случае не будут непрерывны, а будут иметь скачки на границах интервала $(0, \tau)$. Таким образом, в рассмотрение входят разрывные функции.

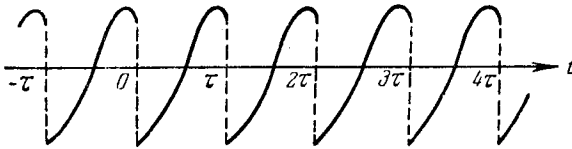


Рис. 2.

Функции, принадлежащие к классу периодических, весьма разнообразны. Среди них есть функции, образующие подкласс, играющий особенно важную роль, а именно синусообразные функции. Их общая запись такова:

$$y = f(t) = a \cos\left(\frac{2\pi}{\tau} t - \varphi\right).$$

Здесь имеются три постоянные величины: a , φ и τ .

Функции такого вида играют в физике громадную роль. Чем это вызвано? Иногда говорят — тем, что синусообразная функция — „самая простая“ из периодических функций. Но такой ответ вряд ли удовлетворителен, так как критерий „простоты“ — в достаточной мере неопределенный критерий. Роль этих функций в физике обусловлена главным образом тем значением, какое имеют в теории колебаний гармонические (синусообразные) колебания.

Существует бесчисленное множество явлений, которые изображаются такого рода функциями. Прежде всего колебания маятника (приблизительно, если они малы), в оптике — „спектрально простой“ (мономатический) свет. В акустике с понятием синусоидального колебания связано понятие о чистом тоне: чистый тон имеет место тогда, когда частицы воздуха колеблются гармонически. Радио-

станции, когда они работают, но не производят передачу сигналов, дают электромагнитные колебания, очень близкие к гармоническим.

Придется сказать несколько слов о терминах, хотя многое здесь хорошо известно.

Величина

$$\nu = \frac{1}{\tau}$$

называется *частотой* колебаний. Пользуясь ν , формулу гармонических колебаний можно записать в виде

$$y = a \cos(2\pi\nu t - \varphi).$$

При такой записи приходится всюду писать множитель 2π . Чтобы этого избежать, часто вводят вместо ν *циклическую частоту* ω :

$$\omega = 2\pi\nu$$

(мы будем также обозначать ее иногда буквами n и p).

Почему ω называется циклической частотой? Рассмотрим равномерное движение по окружности, происходящее с тем же периодом, что и наше гармоническое колебание. Тогда ω будет угловой скоростью движения по кругу (циклу).

Физический смысл величины a весьма прост. Эта величина, называемая амплитудой, равна максимальному значению y .

Что такое φ ? Если мы изменим величину φ , которая называется *фазой*, то функция будет приобретать то значение, которое она имела в определенный момент $t=t_1$ при каком-то другом значении $t=t_2$. Сдвиг на $1/4$ периода соответствует $\varphi=\pi/2$. Функции $\cos$ и $\sin$ отличаются только фазой: замена одной из этих функций другой означает лишь перемещение кривой по времени на четверть периода.

Фаза играет чрезвычайно важную роль, если имеется два колебательных процесса и производится сдвиг одного из них по отношению к другому.

Интересно, каковы численные значения частот у встречающихся в природе периодических процессов.

Вот частоты некоторых периодических явлений в сек^{-1} :

10^{-10} — вековые возмущения планет;

10^{-8} — обращения планет;

10^{-5} — приливы и отливы;

10^1 — колебания в машинах;

- 10^0 — секундный маятник;
 до 10^4 — акустические колебания;
 10^5 — 10^8 — быстрые (ультразвуковые) механические колебания пьезо-
 кварца;
 50 — переменный ток;
 10^5 — 10^8 — радиотелеграфия;
 10^{12} — инфракрасное излучение;
 10^{15} — видимый оптический спектр;
 10^{18} — рентгеновы лучи;
 10^{20} — γ -лучи;
 10^{23} — космические лучи.

Таким образом, получается колоссальный диапазон от 10^{-10} до 10^{23} колебаний в секунду. При этом ряд характерных закономерностей остается в силе на протяжении всей шкалы, например, в приливах и в световых колебаниях...

Остановимся коротко на некоторых свойствах функций $\cos$ и $\sin$.

Рассмотрим прежде всего их средние значения. Среднее из нескольких величин есть сумма этих величин, деленная на их число. Например, среднее из четырех чисел 3, 4, 5, 10 есть

$$\frac{3 + 4 + 5 + 10}{4} = 5,5.$$

Подобно этому *среднее значение функции $f(t)$ в интервале от t_1 до t_2 есть*

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

Во многих вопросах это среднее играет первостепенную роль. Вот, например, один из таких вопросов: дана большая масса, как она будет двигаться при действии на нее быстропеременной силы? Для ответа на этот вопрос нужно знать среднее значение силы¹.

Среднее значение $\cos$ за период равно нулю:

$$\overline{\cos(\omega t - \varphi)} = 0;$$

его среднее значение за полпериода равно $2/\pi$.

¹ [См. 20-ую лекцию.]

Часто представляет интерес *среднее квадратичное* значение синусообразной функции, т. е. среднее значение от

$$y^2 = a^2 \cos^2(\omega t - \varphi).$$

Оно равно

$$\overline{y^2} = \frac{a^2}{2}.$$

Это чрезвычайно важный результат. Например, в случае синусообразного переменного тока среднее, выделяющееся в единицу времени, количество теплоты пропорционально $a^2/2$; теплоты выделяется в среднем столько же, как если бы тѣк постоянный ток силы $a/\sqrt{2}$. Величина $a/\sqrt{2}$ называется *эффективным* значением гармонически колеблющейся величины.

Пусть теперь у нас имеется не одно, а два, три и т. д., вообще N , сосуществующих гармонических колебаний одинаковой частоты:

$$y_1 = a_1 \cos(\omega t - \varphi_1),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_N = a_N \cos(\omega t - \varphi_N).$$

Спрашивается, каково будет $y_1 + y_2 + \dots + y_N$. Математически вопрос решается элементарно, но что значит такое суммирование *физически*?

Разложение на слагаемые неоднозначно. 10 равно 3 + 7, но оно равно также 5 + 5. Что хотят сказать, говоря, что некоторая величина есть сумма двух гармонических колебаний? В каких случаях имеет смысл такая постановка вопроса?

Вот прототип подобных случаев. Пусть имеется два источника света. Пусть первый источник света в отдельности дает поле (колебание) y_1 , второй источник в отдельности — поле (колебание) y_2 . Какое поле будет при наличии обоих источников? Заранее вы ничего не можете об этом сказать. Но существует такой *экспериментальный факт*: поле при наличии обоих источников равно сумме полей, создаваемых каждым источником в отдельности. Есть и такие случаи, когда складывать колебания нельзя: так будет всякий раз, когда имеется нелинейность, например при больших амплитудах в акустике. Вопрос о том, когда можно складывать отдельные колебания и когда нельзя, — это не математический, а *физический* вопрос.

Возьмем сначала следующий простой случай:

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Легко видеть, что здесь

$$y = C \cos(\omega t - \psi),$$

причем

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{B}{A}.$$

Перейдем теперь к более общему случаю:

$$y = a_1 \cos(\omega t - \varphi_1) + a_2 \cos(\omega t - \varphi_2).$$

Здесь

$$y = a \cos(\omega t - \varphi),$$

причем

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Сумма двух гармонических колебаний одинаковой частоты есть опять гармоническое колебание той же частоты. Отсюда следует, что сумма любого числа гармонических колебаний одинаковой частоты также будет гармоническим колебанием той же частоты.

Первая формула (1) показывает, что амплитуда существенным образом зависит от фаз складываемых колебаний. В этой формуле заключена, по сути дела, вся теория интерференционных явлений.

В частности, если $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, имеем:

$$a^2 = (a_1 + a_2)^2;$$

если $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$, имеем:

$$a^2 = (a_1 - a_2)^2;$$

если $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$, имеем:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2.$$

Если $a_1 = a_2$, то при $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ имеем:

$$a^2 = 4a_1^2.$$

Квадрат амплитуды определяет собой энергию. В последнем случае при сложении амплитуда удваивается и, следовательно,

энергия учетверяется. Энергии складываются только в том случае, когда сдвиг фаз равен $\pm \pi/2$.

Слово „интерференция“ значит взаимодействие; но здесь для самих колеблющихся величин y взаимодействия *нет*: для них справедлив принцип суперпозиции (наложения). Для энергии он не справедлив, так как энергии взаимодействуют, они действительно интерферируют. Для самих колеблющихся величин термин „интерференция“ неудачен. На это указывал еще Релей. Заметим, что непосредственный физический смысл имеют во многих случаях не сами величины, входящие в уравнения, — уравнения Максвелла, уравнение Шрёдингера и т. п., — а их квадраты (точнее, в случае уравнения Шрёдингера, квадрат модуля). Именно для этих квадратичных величин имеет место интерференция.

Подчеркну еще раз, что аддитивность не есть нечто самоочевидное. Пусть, например, один переменный ток выделяет в секунду 10 калорий, второй ток — столько же. Если они будут течь вместе, они будут выделять, вообще говоря, не 20 калорий в секунду. Количество выделяемой в секунду теплоты может равняться и 0, и 40 калориям: решающей здесь является разность фаз обоих токов.

В физике встречаются и иного типа вопросы о сложении колебаний. Имеется, например, светящийся газ. В нем очень много молекул, излучающих поля с разнообразными амплитудами и фазами. Какова амплитуда результирующего колебания? Казалось бы, достаточно сказать, какова амплитуда и фаза каждого колебания, — мы их сложим и получим ответ. Но если фазы отдельных колебаний не известны, то и о результирующей амплитуде ничего сказать нельзя.

Для простоты предположим сначала, что имеется всего два источника, создающие колебания с одинаковой амплитудой, равной единице, и с фазами, которые могут принимать два значения: 0 и π . Таким образом, первое колебание есть $\pm \cos \omega t$, второе — также $\pm \cos \omega t$. Какова амплитуда результирующего колебания?

Возможны следующие комбинации:

+	—	0
+	+	4
—	—	
—	+	0

(в первых двух столбцах — знаки амплитуд первого и второго колебания, в третьем столбце — квадрат амплитуды результирующего колебания)

щего колебания). Если мы не знаем, какая из этих возможных комбинаций осуществляется, мы ничего не можем сказать об амплитуде результирующего колебания. Иногда говорят: нет оснований, чтобы одна комбинация встречалась чаще, чем другая. В действительности это утверждение ниоткуда не вытекает с необходимостью. По существу здесь возникает вопрос, находящийся вне компетенции тех методов, которыми мы до сих пор пользовались. Для того, чтобы ответить на вопрос, как часто встречается та или другая комбинация, нужна новая гипотеза, *новый постулат*. Такого рода *статистические* гипотезы проходят красной нитью через многие вопросы физики.

Сделаем следующее *статистическое предположение*: если мы рассматриваем явление в течение долгого времени, то фазы каждого из колебаний успевают много раз измениться и одинаково часто встречается любая из четырех комбинаций. Тогда средний квадрат амплитуды будет равен 2, т. е. энергии в среднем будут складываться.

Сделанное дополнительное предположение позволяет выводить заключения только для очень большого числа опытов и только в среднем. Но без этого (или иного) дополнительного предположения здесь вообще нельзя ничего получить¹.

К затронутому вопросу имеет прямое отношение известная полемика между Больцманом и Бертраном. Больцману казалось, что он чисто математически вывел свою *H*-теорему из классической механики, без дополнительных предположений статистического характера. Он просто упустил при этом из виду одно постулативно высказанное им положение о числе соударений (*Stosszahlansatz*). Бертран по поводу этого „чисто математического“ вывода сказал: это напоминает задачу о корабле, который имеет столько-то мачт, пушек и т. д., и требуется найти из этих данных возраст капитана.

Рассмотрим теперь сложение N колебаний вида $\pm \cos \omega t$. Пусть, например, мы имеем такое распределение:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ + & - & + & - & - & - & \dots \end{array}$$

(первая строка: номер колебания; вторая: знак его амплитуды).

¹ [Ср. 9-ую и 10-ую лекции.]

Что вероятнее: написанная здесь комбинация или другая, в которой сначала будет 2 раза подряд + или 3 раза подряд +? Когда мы говорим, что все комбинации одинаково вероятны (или: все распределения встречаются одинаково часто), то надо ясно понимать, что это — *постулат*.

Всего складывается N колебаний. Пусть из них N_1 входят с минусом, остальные $N - N_1 = N_2$ — с плюсом. Квадрат результирующей амплитуды имеет величину $(N - 2N_1)^2$. Спрашивается, сколькими способами (при заданном N) может быть осуществлено такое значение результирующей интенсивности?

Пусть X — число комбинаций, осуществляющих такое значение интенсивности, т. е. комбинаций с N_1 минусами и $N - N_1$ плюсами.

Возьмем какую-нибудь одну из этих комбинаций. Путем перестановок N_1 амплитуд, вошедших с минусом, мы можем осуществить $N_1!$ комбинаций с тем же числом плюсов и минусов; путем перестановок $N - N_1$ амплитуд, вошедших с плюсом, мы можем осуществить $(N - N_1)!$ комбинаций с тем же числом плюсов и минусов. Следовательно, путем перестановок N_1 амплитуд с минусом и $(N - N_1)$ амплитуд с плюсом мы получаем $N_1!(N - N_1)!$ комбинаций с тем же числом плюсов и минусов. Сделав такие перестановки в каждой из наших X комбинаций, как исходной, мы получим всевозможные перестановки из N элементов, т. е.

$$X \cdot N_1!(N - N_1)! = N!$$

Отсюда

$$X = \frac{N!}{N_1!(N - N_1)!} = C_N^{N_1}$$

(число сочетаний из N по N_1). Каждая из этих комбинаций дает квадрат амплитуды $(N - 2N_1)^2$. Средний квадрат амплитуды есть сумма всех значений квадрата амплитуды, деленная на общее число этих значений. Таким образом:

$$\overline{a^2} = \frac{\sum_{N_1=0}^N C_N^{N_1} (N - 2N_1)^2}{\sum_{N_1=0}^N C_N^{N_1}}. \quad (2)$$

Нетрудно убедиться, что нижняя сумма равна 2. Действительно, из формулы бинома

$$(x + 1)^N = \sum_{N_1=0}^N C_N^{N_1} x^{N_1}$$

при $x=1$ получаем:

$$2^N = \sum_{N_1=0}^N C_N^{N_1}. \quad (3)$$

Для вычисления верхней суммы, стоящей в числителе (2) (обозначим ее S), употребим изящный прием, связанный с разбиением этой суммы на две и с преобразованием второго слагаемого:

$$S = N^2 \sum_{N_1=0}^N C_N^{N_1} - 4N(N-1) \sum_{N_1=0}^N \frac{(N-2)! N_1 (N-N_1)}{N_1! (N-N_1)!}.$$

Воспользовавшись (3) и заметив, что во второй сумме члены с $N_1=0$ и $N_1=N$ равны нулю, получаем:

$$S = N^2 \cdot 2^N - 4N(N-1) \sum_{N_1=1}^{N-1} \frac{(N-2)! N_1 (N-N_1)}{N_1! (N-N_1)!}.$$

Входящая сюда сумма может быть представлена в виде

$$\sum_{N_1=1}^{N-1} \frac{(N-2)!}{(N_1-1)! [N-2-(N_1-1)]!} = \sum_{n=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{n! (N-2-n)!}$$

и согласно (3) равна 2^{N-2} . Следовательно,

$$S = N^2 \cdot 2^N - 4N(N-1) \cdot 2^{N-2} = [N^2 - N(N-1)] 2^N = N \cdot 2^N. \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2), получаем:

$$\overline{a^2} = N.$$

Если амплитуда отдельного колебания равна не 1, а α , то

$$\overline{a^2} = N\alpha^2.$$

Итак, в случае сложения колебаний со случайными фазами энергии (в среднем) складываются.

Если разности фаз между колебаниями постоянны, то говорят о *когерентных* колебаниях. Если же фазы разбросаны совершенно беспорядочно, то говорят, что колебания *некогерентны*. Такие некогерентные колебания испускаются, например, молекулами светящегося газа.

Мы рассмотрели частный случай, когда фазы равны либо 0, либо π . Можно рассмотреть общий случай, когда фазы принимают любые значения. Релей показал, что и в этом общем случае некогерентности энергии (в среднем) складываются. Это — очень существенная теорема.

ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ

(Октябрь 1930 г.)

Задача об аппроксимации функций тригонометрическими полиномами. Теорема Фурье. Исторические замечания о понятии функции. Класс функций, разложимых в ряд Фурье. Метод комплексных величин; когда можно и когда нельзя его применять.

Нам нужно коснуться вычислительного приема, широко применяемого в теории колебаний, — использования комплексных величин. Здесь необходимо предостеречь от одной распространенной ошибки: часто бывает так, что к этому приему привыкают, а потом забывают, когда можно и когда нельзя им пользоваться.

Напишем известные формулы:

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx,$$

$$\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}), \quad \sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}),$$

где

$$i \cdot i = -1.$$

Эти формулы позволяют выразить синусоидальные колебания через комплексные экспоненциальные функции. В волновой механике теория строится так, что в нее непосредственно входят комплексные величины. Здесь, в теории колебаний, дело обстоит иначе. Нас интересуют *действительные* величины. Например, когда мы пишем e^{ikx} , то нас интересует действительная часть этого выражения, т. е. $\cos kx$; но работать с комплексными величинами удобно, потому что при дифференцировании они себя воспроизводят с точностью до множителя, между тем как синус и косинус ведут себя сложнее.

Мы рассмотрели частный случай, когда фазы равны либо 0, либо π . Можно рассмотреть общий случай, когда фазы принимают любые значения. Релей показал, что и в этом общем случае некогерентности энергии (в среднем) складываются. Это — очень существенная теорема.

ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ

(Октябрь 1930 г.)

Задача об аппроксимации функций тригонометрическими полиномами. Теорема Фурье. Исторические замечания о понятии функции. Класс функций, разложимых в ряд Фурье. Метод комплексных величин; когда можно и когда нельзя его применять.

Нам нужно коснуться вычислительного приема, широко применяемого в теории колебаний, — использования комплексных величин. Здесь необходимо предостеречь от одной распространенной ошибки: часто бывает так, что к этому приему привыкают, а потом забывают, когда можно и когда нельзя им пользоваться.

Напишем известные формулы:

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx,$$

$$\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}), \quad \sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}),$$

где

$$i \cdot i = -1.$$

Эти формулы позволяют выразить синусоидальные колебания через комплексные экспоненциальные функции. В волновой механике теория строится так, что в нее непосредственно входят комплексные величины. Здесь, в теории колебаний, дело обстоит иначе. Нас интересуют *действительные* величины. Например, когда мы пишем e^{ikx} , то нас интересует действительная часть этого выражения, т. е. $\cos kx$; но работать с комплексными величинами удобно, потому что при дифференцировании они себя воспроизводят с точностью до множителя, между тем как синус и косинус ведут себя сложнее.

Всякую комплексную величину $a + ib$ можно представить в виде $Ae^{i\varphi}$, где A и φ — действительные величины, причем

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

(заметим, что фаза φ определена здесь неоднозначно).

При перемножении комплексных величин фазы их просто складываются, и это — второе, очень удобное свойство.

Часто мы имеем дело с величинами вида

$$\xi = (a + ib)e^{i\omega t}. \quad (1)$$

Какова действительная часть этого выражения? Имеем:

$$(a + ib)e^{i\omega t} = Ae^{i(\omega t + \varphi)} = A \cos(\omega t + \varphi) + iA \sin(\omega t + \varphi),$$

и, следовательно, искомая действительная часть есть

$$A \cos(\omega t + \varphi).$$

Если колебание задано в виде (1), то произведение $\xi\xi^*$ величины ξ на сопряженную ей величину

$$\xi^* = (a - ib)e^{-i\omega t}$$

дает квадрат амплитуды действительной части ξ :

$$\xi\xi^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = A^2. \quad (2)$$

Для того, чтобы найти квадрат амплитуды, не нужно переходить от выражения (1) к его действительной части.

Рассмотрим оптическую задачу — о диффракционной решетке (рис. 3), наглядно иллюстрирующую преимущества оперирования комплексными величинами.

Колебания, идущие от соседних щелей решетки, имеют благодаря разности путей разность фаз

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \alpha.$$

В фокусе линзы происходит сложение m когерентных колебаний (m — число щелей решетки). Результирующее колебание в точке наблюдения есть

$$\cos \omega t + \cos(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t + 2\varphi) + \dots + \cos[\omega t + (m - 1)\varphi]. \quad (3)$$

Непосредственно сложить эти m членов не так просто. Воспользуемся, однако, комплексным представлением: первый член суммы есть действительная часть от $e^{i\omega t}$, второй — действительная часть от $e^{i(\omega t + \varphi)}$ и т. д.

Как известно, действительная часть суммы комплексных величин есть сумма действительных частей слагаемых (но действительная часть произведения не равна произведению действительных частей). Сумму комплексных величин найти очень просто: это сумма геометрической прогрессии с показателем $e^{i\varphi}$. Она равна

$$\zeta = e^{i\omega t} \frac{e^{im\varphi} - 1}{e^i - 1}. \quad (4)$$

Сумма (3) равна действительной части этого выражения. Но часто нас интересует только квадрат

амплитуды колебания (3), т. е. квадрат амплитуды A действительной части комплексного выражения (4). Согласно (2)

$$A^2 = \zeta \bar{\zeta}^* = \frac{1 - \cos m\varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{\sin^2 \frac{m\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Рассмотрим еще одно свойство комплексных величин, которое также играет существенную роль в том, почему они так часто употребляются в теории колебаний.

Пусть дана комплексная функция времени

$$f(t) + ig(t).$$

Ее производная есть

$$\dot{f} + i\dot{g},$$

т. е. действительная часть от производной комплексной функции по действительному аргументу есть производная от действительной части функции.

Пусть у нас есть дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} + k\dot{y} + \omega_0^2 y = \cos \omega t. \quad (5)$$

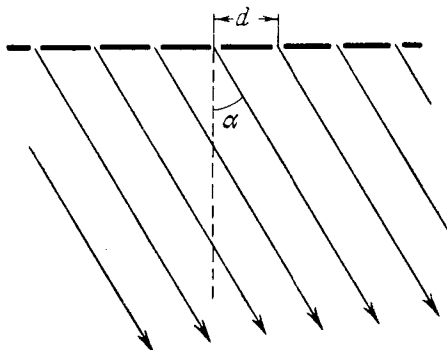


Рис. 3.

Можно найти частное решение этого уравнения, работая с косинусом и синусом, но проще сделать так. Напишем *другое* дифференциальное уравнение:

$$\ddot{y} + k\dot{y} + \omega_0^2 y = e^{i\omega t}$$

и будем искать решение нового уравнения в комплексной форме:

$$y = Ae^{i\omega t}. \quad (6)$$

Тогда для A получается простое уравнение

$$A(-\omega^2 + i\omega k + \omega_0^2) e^{i\omega t} = e^{i\omega t}.$$

Действительная часть получаемого таким путем выражения (6) будет удовлетворять интересующему нас дифференциальному уравнению (5). Это возможно лишь потому, что при подстановке (6) в дифференциальное уравнение мы только дифференцировали и складывали.

Все это важно и полезно, но нужно знать, когда так делать нельзя. Пусть, например,

$$y\ddot{y} = \cos \omega t.$$

Можно ли решать это уравнение, заменив правую часть на $e^{i\omega t}$? Нельзя, и эта замена ничего не даст, потому что действительная часть произведения не есть произведение действительных частей.

Пусть $y = a \cos \omega t$ есть ток. Количество тепла, выделяющееся в единицу времени в сопротивлении R , равно

$$Ry^2 = Ra^2 \cos^2 \omega t.$$

Мы не получим правильного значения этого выражения, если напомним $y = ae^{i\omega t}$, возведем в квадрат и возьмем действительную часть: действительная часть квадрата не есть квадрат действительной части.

Итак, комплексные величины представляют большое удобство, но, пользуясь ими, нужно остерегаться нелинейных операций.

Перейдем теперь к рассмотрению функций периодических, но не гармонических, — к рядам Фурье. Вся теория этих рядов возникла из физики — из вопроса о колебаниях струны. Недаром известный математик Клейн настаивал на том, чтобы вопрос о разложении в ряд Фурье излагался физикам иначе, чем это обычно делают математики.

Предположим, что мы имеем периодическую функцию $f(x)$. Для простоты примем период равным 2π (отсюда легко перейти к функции с любым периодом). Можно ли аппроксимировать $f(x)$ другими периодическими функциями $\varphi(x)$, т. е. заменить $f(x)$ другими периодическими функциями так, чтобы ошибка при замене была очень мала?

Нужно выбрать какую-нибудь меру ошибки. В качестве такой меры возьмем среднюю квадратичную ошибку:

$$\overline{\Delta^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \{f(x) - \varphi(x)\}^2 dx. \quad (7)$$

Это — принимаемое нами определение погрешности. Мы будем аппроксимировать так, чтобы средняя квадратичная ошибка была возможно меньше. Если бы, например, мы выставили требование, чтобы интеграл

$$\overline{\Delta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \{f(x) - \varphi(x)\} dx$$

(средняя ошибка) был возможно меньше, то ни к чему хорошему это не привело бы. Могло бы быть так, что средняя ошибка равна нулю, между тем как на больших интервалах существуют громадные (по абсолютной величине) отклонения $\varphi(x)$ от $f(x)$. При выбранной нами мере ошибки этого не может быть. Но вместе с тем ясно, что это не единственно возможный целесообразный выбор.

Возьмем в качестве заменяющей функции $\varphi(x)$ периодическую функцию

$$S_n = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \quad (8)$$

с тем же периодом 2π , что и исходная функция $f(x)$. Вопрос ставится так: нужно выбрать $(2n+1)$ коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots$ таким образом, чтобы средняя квадратичная ошибка (7) была возможно меньше. Подставим (8) в (7):

$$\overline{\Delta^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x) dx - \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\alpha_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^n \left[\alpha_k \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx + \beta_k \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx \right] + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right]^2 dx. \quad (9)
\end{aligned}$$

Введем далее величины:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (10) \\
(k &= 0, 1, 2, \dots, n),
\end{aligned}$$

которые называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$.

Гармонические функции обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \sin lx \, dx = 0, \\
& \left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos lx \, dx &= \begin{cases} 0 & (k \neq l), \\ \pi & (k = l), \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \sin lx \, dx &= \begin{cases} 0 & (k \neq l), \\ \pi & (k = l), \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (11) \\
& (k, l = 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

Воспользовавшись формулами (10) и (11), после несложных преобразований получаем из (9):

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x) \, dx + \frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2] - \\
& - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).
\end{aligned}$$

В этом выражении переменными являются α_k и β_k . Мы должны их выбрать так, чтобы $\overline{\Delta^2}$ было наименьшим. Это будет, очевидно, тогда, когда члены, зависящие от α_k и β_k , равны нулю, т. е. когда коэффициенты при косинусах и синусах в заменяющей функции (8) равняются соответствующим коэффициентам Фурье.

Ошибка при таком аппроксимировании [при таком выборе функции $\varphi(x)$] равна

$$\bar{\Delta}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \quad (12)$$

Здесь нужно отметить следующие два замечательные обстоятельства.

Допустим, что мы прибавляем к заменяющей функции (8) еще один член с $k = n + 1$. Тогда оказывается, что при наилучшем аппроксимировании коэффициенты при прежних членах останутся теми же, что и раньше. Ниоткуда не следует, что в задачах об аппроксимации функций дело будет так обстоять всегда. Но в данном случае наилучшая аппроксимация n членами не зависит от последующего улучшения аппроксимации: первые члены не нужно пересматривать при добавлении новых. Это объясняется тем свойством синусов и косинусов, что интеграл за период 2π от произведения любых двух различных функций из совокупности $\cos kx$, $\sin kx$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) равен нулю [формулы (11)]. Функции, обладающие таким свойством, называются *ортогональными* функциями.

Совокупность функций

$$\begin{aligned} \cos t, \quad \cos 2t, \quad \cos 3t, \dots \\ \sin t, \quad \sin 2t, \quad \sin 3t, \dots \end{aligned}$$

является примером совокупности ортогональных функций в интервале $(-\pi, +\pi)$.

Перейдем ко второму замечательному обстоятельству. Возникает вопрос: является ли система функций

$$\cos kx, \sin kx \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

замкнутой, т. е. существует ли периодическая функция с периодом 2π , которая была бы ортогональна ко всем этим функциям? Оказывается, что при $n = \infty$ всякая функция, ортогональная ко всем функциям (13), равна тождественно нулю, т. е. при $n = \infty$ система (13) — замкнутая.

Вернемся к выражению (12) для средней квадратичной ошибки. Чем больше берется членов в заменяющей функции (8), тем ошибка

меньше. Теорема Фурье заключается в следующем: при некоторых условиях¹ бесконечный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (14)$$

сходится и представляет собой функцию $f(x)$.

Обычно начинают изложение с задачи о точном представлении функции тригонометрическим рядом. Но физик не может работать с бесконечным числом членов. Поэтому для него важна именно та задача, с которой мы начали, — задача об аппроксимации.

Очень важно выяснить, всякую ли периодическую функцию можно представить в виде ряда Фурье (14)? В связи с этим интересно проследить историю задачи о представлении функции рядами Фурье. Первый вопрос, который здесь возник, был общий вопрос о том, что такое функция.

Эйлер считал, что существуют аналитические и геометрические функции. Мы получаем, говорил он, аналитические функции, беря такие выражения, как x , x^2 , $\sin x$ и т. д. Мы получаем геометрическую функцию, если опишем „свободной рукой“ произвольную кривую². Эти воззрения не отвечают современному определению функции: y есть функция от x , если каждому значению x соответствует определенное значение y .

Бернулли, получив решение в виде тригонометрического ряда³ (т. е., по Эйлеру, в виде „аналитической функции“), утверждал, что им получено *общее* решение, что так можно представить *любую* функцию.

Это казалось невероятным. Ведь коэффициенты ряда

$$a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$$

образуют счетное множество, в то время как „число“ значений функции гораздо больше, множество этих значений более мощное. Тем не менее Фурье имел смелость сказать, что совершенно произвольная (графически заданная) непрерывная функция может быть представлена в виде тригонометрического ряда. И это правильно, потому что (как теперь известно) непрерывные функции

¹ [См. ниже.]

² [См., например, С. Н. Бернштейн. Исторический обзор развития понятия функции. Вестник опытной физики и элементарной математики, № 559, сем. 47, стр. 177, 1912.]

³ [См. 32-ую лекцию и 5-ую лекцию части II.]

вовсе не так разнообразны, как это кажется на первый взгляд. Достаточно задать непрерывную функцию в рациональных точках, чтобы определить ее полностью. Другими словами, непрерывные функции задаются совокупностью своих значений в *рациональных* точках. Но эти точки составляют множество такой же мощности, как и коэффициенты разложения (счетное множество). Если мы примем это во внимание, то нас уже не удивит возможность представить любую непрерывную функцию в виде ряда Фурье.

Но плохо, если что-нибудь становится „слишком“ понятным. Я боюсь, что разложение в ряд Фурье уже кажется чем-то сам собой понятным. Это не так: с бесконечными совокупностями нужно обращаться осторожно. Например, возьмите ряд Фурье и выбросьте из него третий член. Число членов остается бесконечным, и тем не менее с помощью такого бесконечного ряда любую непрерывную функцию уже представить нельзя.

Теорема Фурье справедлива при известных ограничениях (достаточные условия того, что функция может быть представлена рядом Фурье, были указаны Дирихле); рядом Фурье могут быть представлены не все непрерывные функции. С другой стороны, в виде рядов Фурье может быть представлен определенный класс разрывных функций, имеющих только разрывы первого рода (т. е. такие, что и слева и справа от разрыва функция имеет определенное значение). Для того, чтобы функция могла быть представлена рядом Фурье, она должна иметь конечно число разрывов и не должна иметь бесконечного числа максимумов и минимумов. Например, непрерывную функцию $\sin(1/x)$, которая при $x \rightarrow 0$ имеет бесконечно густые максимумы, нельзя разложить в ряд Фурье.

Тот класс функций, которые могут быть представлены рядом Фурье, вполне достаточен для физических целей. Практически любая интересующая физика функция может быть разложена в ряд Фурье.

Как быстро убывают коэффициенты Фурье? Ряд (14) сходится тем быстрее, чем функция $f(x)$ глаже. Если h — порядок разрыва (т. е. порядок наинизшей терпящей разрыв производной), то асимптотически, при достаточно больших k , коэффициенты убывают как $1/k^{h+1}$.

Существуют ли различные функции, представляемые одним и тем же рядом Фурье? Да, существуют. Они отличаются одна от другой тем, что имеют различные значения в *конечном* ряду

точек. Но это исключительный случай. Интересующие нас функции однозначно определяются своим рядом Фурье.

Теорема Фурье была впервые высказана им в 1822 г. в его „Théorie analytique de la chaleur“, но еще в 1750 г. ее предугадал Бернулли.

Синусы и косинусы — не единственная система ортогональных функций, по которым можно разлагать произвольную функцию. Существует бесконечное множество таких систем. С этой точки зрения ряд Фурье — чрезвычайно частный случай. Но разложение по косинусам и синусам, т. е. по гармоническим колебаниям, сыграло очень большую роль в развитии общей теории разложения по ортогональным функциям. В математике остальные разложения тоже важны, не менее важны, чем разложение Фурье. Но разложение Фурье выделено благодаря физическим условиям¹.

ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ

(Октябрь 1930 г.)

Ряды Фурье (продолжение); явление Гиббса. Биения. Как мы узнаём направление на источник звука. „Гармоническое колебание с медленно меняющейся амплитудой и фазой“. Критерий медленности определяется конкретной физической задачей. Кажущееся нарушение закона сохранения энергии при интерференции

Мы сейчас разберем немного формальные, но необходимые вопросы. Как мы видели в прошлый раз, всякую интересующую нас функцию $f(x)$ с периодом 2π можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1)$$

причем

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx. \quad (2)$$

Для того, чтобы эти формулы годились и для $k=0$, нужно писать постоянный член в виде $a_0/2$.

Обычно приходится иметь дело с функцией, имеющей период $\tau \neq 2\pi$. Если сделать замену

$$\frac{2\pi}{\tau} y = x, \quad (3)$$

¹ [См. 16-ую лекцию.]

точек. Но это исключительный случай. Интересующие нас функции однозначно определяются своим рядом Фурье.

Теорема Фурье была впервые высказана им в 1822 г. в его „Théorie analytique de la chaleur“, но еще в 1750 г. ее предугадал Бернулли.

Синусы и косинусы — не единственная система ортогональных функций, по которым можно разлагать произвольную функцию. Существует бесконечное множество таких систем. С этой точки зрения ряд Фурье — чрезвычайно частный случай. Но разложение по косинусам и синусам, т. е. по гармоническим колебаниям, сыграло очень большую роль в развитии общей теории разложения по ортогональным функциям. В математике остальные разложения тоже важны, не менее важны, чем разложение Фурье. Но разложение Фурье выделено благодаря физическим условиям¹.

ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ

(Октябрь 1930 г.)

Ряды Фурье (продолжение); явление Гиббса. Биения. Как мы узнаём направление на источник звука. „Гармоническое колебание с медленно меняющейся амплитудой и фазой“. Критерий медленности определяется конкретной физической задачей. Кажущееся нарушение закона сохранения энергии при интерференции

Мы сейчас разберем немного формальные, но необходимые вопросы. Как мы видели в прошлый раз, всякую интересующую нас функцию $f(x)$ с периодом 2π можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1)$$

причем

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx. \quad (2)$$

Для того, чтобы эти формулы годились и для $k=0$, нужно писать постоянный член в виде $a_0/2$.

Обычно приходится иметь дело с функцией, имеющей период $\tau \neq 2\pi$. Если сделать замену

$$\frac{2\pi}{\tau} y = x, \quad (3)$$

¹ [См. 16-ую лекцию.]

то функция $f(2\pi y/\tau)$, рассматриваемая как функция y , имеет период τ , если $f(x)$ имеет период 2π (когда y увеличивается на τ , то аргумент x увеличивается на 2π). Обозначив

$$f\left(\frac{2\pi}{\tau} y\right) = \varphi(y)$$

и сделав в (1) и (2) замену (3), получаем:

$$\varphi(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi y}{\tau}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi y}{\tau}\right) \right],$$

где

$$a_k = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \varphi(y) \cos\left(k \frac{2\pi y}{\tau}\right) dy, \quad b_k = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \varphi(y) \sin\left(k \frac{2\pi y}{\tau}\right) dy.$$

Упомяну еще о написании действительного ряда Фурье в комплексной форме.

Пусть действительная функция $f(x)$ имеет период 2π . Вместо

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

можно написать

$$\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx}$$

(это, конечно, действительная величина). Обозначим:

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-ikx} dx,$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{ikx} dx$$

(c_k и c_{-k} — комплексно сопряженные). Тогда

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}.$$

Это — изящная запись в комплексной форме обычного ряда Фурье, представляющего действительную функцию.

И, наконец, последнее замечание, уже не формальное, а по существу. Оно касается вопроса, который должен возникнуть у каждого.

В прошлый раз было сказано, какие функции можно разлагать в ряд Фурье. Функция $f(x)$ может быть разрывной, но у нее должно быть конечное число разрывов и она не должна иметь бесконечно большого числа максимумов и минимумов (напомним, что при построении периодических функций естественно входят в рассмотрение разрывные функции).

Что значит, что функция $f(x)$ может быть разложена в ряд Фурье? Это значит, что для каждого значения x сумма бесконечного ряда в правой части (1) равна соответствующему значению функции $f(x)$. Но в месте разрыва $f(x)$ имеет два значения. Чему же *здесь* равен ряд Фурье? Вот результат математического исследования: в точках разрыва $x = a$ ряд Фурье дает арифметическое среднее значений $f(x)$ слева и справа:

$$\frac{f(a+0) + f(a-0)}{2}.$$

Таким образом, рядом Фурье задается функция, определенная во всех точках.

Существует ряд приборов, позволяющих осуществить разложение по Фурье. Если начертить периодически повторяющуюся функцию, то определенные приборы — типа планиметра — позволяют последовательно определить ее коэффициенты Фурье. С помощью этих приборов нельзя вычислить бесконечное число членов, но для применений всегда достаточно конечного числа. Есть, например, приборы, вычисляющие 6 коэффициентов. Прибор Майкельсона дает 120 коэффициентов: 60 при синусах и 60 при косинусах. Он позволяет проделать и обратную операцию: суммировать функцию по заданным коэффициентам разложения Фурье. Прибор Майкельсона дает сумму Фурье S_{60} . Это — приближение, и ему соответствует, конечно, непрерывная кривая.

Когда суммируется с помощью прибора конечное число членов разложения Фурье разрывной функции $f(x)$ (например, изображенной на рис. 2), можно ожидать, что получится кривая, которая всюду будет близко подходить к кривой $f(x)$. На деле получается иной результат: аппроксимирующая кривая хорошо подходит к $f(x)$ везде, кроме окрестностей мест разрыва; там она образует „хвосты“ (рис. 4), высота которых *не* уменьшается с ростом числа суммируемых членов разложения (она достигает примерно $1/10$ величины скачка), но в которых с ростом этого числа осцилляции сгущаются и сжимаются к точке разрыва.

Можно подумать, что появление „хвостов“ вызвано дефектом прибора, но это неверно. Как показал Гиббс, это — экспериментальное указание на чисто математический факт: неравномерную сходимость ряда Фурье в точках разрыва $f(x)$. Наличие осциллирующих „хвостов“ у конечных сумм Фурье около точек разрыва разлагаемой функции получило название явления Гиббса.

Перейдем теперь к другому вопросу.

Мы помним, что при сложении гармонических колебаний одинакового периода получается гармоническое колебание с тем же периодом. Теперь речь будет идти о сложении двух гармонических колебаний *неодинакового* периода. Этот случай играет в физике колебаний очень существенную роль, и здесь возникает ряд общих вопросов, которые нужно с самого начала себе уяснить.

Итак, пусть

$$y = a_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2). \quad (4)$$

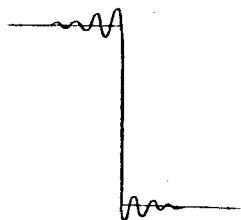


Рис. 4.

Периодическая ли это функция? Если ω_1 и ω_2 соизмеримы, т. е. относятся, как целые числа, то y — периодическая функция. Действительно, пусть, например, первое слагаемое имеет период $1/300$ сек., а второе — $1/200$ сек. Тогда три периода первого слагаемого составляют два периода второго: через $1/100$ сек. повторяются значения обоих, а следовательно, повторится и значение суммы.

Но какой смысл имеет в физике говорить о соизмеримости или несоизмеримости? Если, скажем,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1\,000\,001}{1\,000\,000},$$

то частоты соизмеримы, но y будет повторяться лишь через очень большое число периодов каждого из складываемых колебаний. Другими словами, если отношение частот равно отношению очень больших взаимно простых целых чисел, то физического отличия от случая несоизмеримых частот нет.

Здесь важно другое. Если $\omega_1 \neq \omega_2$, то колебание (4) не может быть представлено как *одно* синусоидальное колебание в точном смысле слова.

Перепишав (4) в виде

$$y = a_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + a_2 \cos[\omega_1 t + (\omega_2 - \omega_1)t - \varphi_2], \quad (5)$$

можно показать путем простых вычислений¹, что y можно представить как

$$y = a \cos(\omega_1 t - \varphi), \quad (6)$$

где

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_1 - \varphi_2]}.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin [(\omega_2 - \omega_1)t - \varphi_2]}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos [(\omega_2 - \omega_1)t - \varphi_2]}.$$

Как сказано, (6) не есть гармоническая функция, так как у гармонической функции a и φ по определению являются постоянными величинами.

Интересно, однако, следующее. Пусть $|\omega_1 - \omega_2|$ очень малая величина. В этом случае частота изменения величин a и φ очень мала, поскольку $\cos(\omega_2 - \omega_1)t$ — медленно меняющаяся функция. Величины a и φ меняются медленно, в течение очень долгого времени они почти постоянны и можно рассматривать y как „гармоническое колебание с очень медленно меняющейся амплитудой и с очень медленно меняющейся фазой“. Строго говоря, это, конечно, не гармоническое колебание. Только при известном легкомыслии можно сказать, что амплитуда и фаза „почти“ постоянны.

Возьмем пример. Пусть у нас имеются два камертона, периоды которых немного различаются. Создаваемое ими в некоторой точке суммарное колебание y имеет вид (4) или, что то же, (5). Можно сказать, что складываются два колебания с одинаковым периодом, но с медленно меняющейся разностью фаз. В какой-то момент амплитуда суммарного колебания есть сумма амплитуд $a_1 + a_2$; потом она очень медленно переходит в разность амплитуд $a_1 - a_2$ и т. д.

Можно сказать (и это будет *точно*), что y есть сумма двух гармонических колебаний с несколько отличными периодами. Но можно сказать и так: y есть *одно* колебание с определенным периодом, но амплитуда его медленно меняется от некоторого максимума до некоторого минимума и обратно. Это уже некоторая неряшливость в выражениях. Она вызвана тем, что мы стараемся здесь перенести то, что мы знаем о сложении колебаний с *одинаковыми* периодами, на сложение колебаний с *разными* периодами. Итак, мы говорим: когда звучат оба камертона, возникает тот же тон, что при *одном* камертоне, но с медленно меняющейся фазой

¹ [Ср. 2-ую лекцию, формулы (1).]

и амплитудой. Это явление *биений*. Сведя, таким образом, рассматриваемый случай на прежний, уже известный, мы сразу предвидим, что будет наблюдаться.

Мы можем на слух определять направление, откуда приходит звук. Это нам удастся не очень хорошо, но все же удастся. Существенно при этом то, что мы слышим *двумя* ушами. Может показаться, что мы производим оценку направления по разности интенсивностей в обоих ушах. Для низких тонов это объяснение заведомо неверно. Можно теоретически подсчитать, насколько голова ослабляет звук. Оказывается, что в случае длинных волн

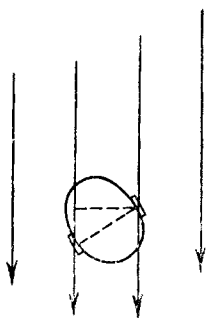


Рис. 5.

ослабление очень мало. Это можно проверить так: прикрыв одно ухо, вы все-таки правильно оцените направление. Повидимому, объяснение следует искать в *разности фаз* между колебаниями, воспринимаемыми каждым ухом. На рис. 5 показано, как получается эта разность фаз.

Можно проверить это предположение следующим образом. К обоим ушам подводится звук от одного камертона, но по различным путям, и затем меняется разность фаз колебаний, приходящих к обоим ушам. Наблюдатель чувствует при различных значениях разности фаз,

что источник находится в направлении, как раз соответствующем задаваемой разности фаз. Но можно сделать иначе. Возьмем два камертона, несколько различных по частоте. Тогда к ушам приходят два колебания с непрерывно изменяющейся разностью фаз, и наблюдатель будет чувствовать, что источник ходит вокруг него. Очевидно, при истолковании этого явления целесообразно говорить, что имеются два колебания с одинаковым периодом, но с изменяющейся разностью фаз, — это не точно, но *целесообразно*.

Способ рассуждения, которым мы пользовались, иногда приемлем. Часть опытов отлично описывается теоретически с помощью представления о меняющейся амплитуде или фазе. Но иногда это представление становится предвзятым и приводит к ошибкам (Флеминг не мог освободиться от взгляда на сумму, как на колебание одного периода, но с меняющейся амплитудой и фазой). Надо знать, когда можно и когда нельзя им пользоваться.

Вообще говоря, им нельзя пользоваться в вопросах резонанса. Сделаем следующий опыт. Мы берем два одинаковых камер-

тона, возбуждаем один из них и затем его останавливаем. Теперь звучит другой камертон: во время звучания первого он возбудился. Теперь мы расстраиваем первый камертон (с помощью нагрузки немного изменяем его период) и снова возбуждаем. После остановки первого камертона второй теперь молчит (вернее, звучит очень слабо). Заставив звучать оба камертона одновременно, мы услышим биения: ведь частоту одного из камертонов мы изменили. Если один (расстроенный) камертон совершает 500 колебаний в секунду, другой 504, то биения происходят 4 раза в секунду. Биения очень хорошо описываются с помощью меняющейся амплитуды. Здесь этот способ рассмотрения вполне пригоден: мы ясно слышим повторяющиеся изменения амплитуды.

Возьмем теперь третий камертон частоты 504 и будем возбуждать сразу первый и второй. Вместе они будут действовать на третий. Колебания первого камертона практически совсем не действуют на третий.

Пользуясь прежним способом рассуждения, мы скажем: колебание от первого и второго камертона есть „колебание с частотой первого камертона, но с переменной амплитудой“, и оно не должно поэтому заметно действовать на третий. В действительности же при совместном воздействии первого и второго камертонов третий сильно возбуждается. Таким образом, пользуясь прежним способом рассмотрения, мы пришли в вопросе о действии двух камертонов на третий к неправильному результату. Одно „гармоническое колебание с изменяющейся амплитудой“ ведет себя, как два гармонические колебания с неизменными амплитудами. На такие явления натолкнулись, и именно в таких случаях возникает потребность разобраться, *когда и почему* можно пользоваться тем или иным упрощенным представлением.

Имеем ли мы право переносить результаты, полученные для *постоянных a и φ* , на *медленно меняющиеся a и φ* ? Математика запрещает так поступать: если a и φ не постоянны, тогда то, что выведено для постоянных a и φ , вообще говоря, неверно. Но в природе не бывает строго определенных, строго постоянных величин. Требование абсолютного постоянства тех или иных величин невыполнимо. Физика ставит вопрос по-иному: в какой степени позволительно, чтобы те или иные величины менялись, если мы пользуемся результатами, полученными в предположении, что эти величины постоянны? В физике вопрос часто ставится именно так, и на данном примере я хочу его разъяснить.

Я говорил: „разность частот $|\omega_1 - \omega_2|$ — очень малая величина“. Это выражение неряшливо. Более того, оно лишено всякого смысла. Пусть числа колебаний в секунду будут 500 и 502. Мы говорим, что разность этих чисел мала: число 2 мы считаем малым. Это уже подозрительно. Числа колебаний в минуту разнятся на 120, но явление от этого не изменяется. А ведь можно взять числа колебаний и за год? Говорить о малости именованных чисел в физике лишено всякого смысла. В одних единицах величина мала, в других — она велика. В физике может иметь значение только малость относительных величин. Только их значения не зависят от выбора единиц.

Имеем ли мы право говорить: „медленно меняющаяся амплитуда“? Имеем, но мы должны сказать, *по отношению к чему* мала частота изменения амплитуды.

Пусть ω_1 и ω_2 — частоты акустических колебаний. Наши уши так устроены, что если отличие частот двух колебаний меньше определенного порога, то мы перестаем их слышать раздельно. Повторяю, это факт физиологический. Если отличие в периодах мало по отношению к $1/10$ сек., то в вопросах слуха можно считать, что имеется одно колебание с переменной амплитудой. В опыте же с резонансом была важна малость $|\omega_1 - \omega_2|$ по отношению к *совсем другой* величине — коэффициенту затухания третьего камертона¹. В приведенных двух примерах важна малость разности частот по отношению к *различным* величинам. Это часто встречающаяся ошибка. Говорят: „такая-то величина мала“, и переносят это высказывание на опыт, где играет роль малость по отношению к иным величинам, по отношению к которым она вовсе не мала. Если вы говорите о малости каких-то величин, то, во-первых, вы обязаны указывать, по отношению к чему они малы, и, во-вторых, знать, что в различных вопросах играет роль малость по отношению к *разным* величинам. Всегда нужно знать, *для чего* говорится о малости. В разобранным случае могло быть правильным считать такую-то расстройку малой в вопросах слуха, а в том или ином опыте с резонансом это уже было неправильно.

В радиотелефонии передаваемая речь изменяет амплитуду посылаемого колебания². Для того, чтобы эта „модуляция“ повторялась в приемнике без искажения, ее частота должна быть мала

¹ [См. 16-ую лекцию.]

² [В 1930 г. другие способы модуляции практически еще не применялись.]

не по отношению к частоте немодулированного колебания. Иногда говорят обратное, но это неверно; критерий малости здесь другой. Частота модуляции должна быть мала по отношению к коэффициенту затухания колебательного контура приемника.

Сравним все, что было сказано, с вопросом: что такое разреженный газ? Вопрос сам по себе не имеет смысла. Он приобретает смысл, если сказать, для чего нужен ответ. Теплопроводность не очень разреженного газа почти не зависит от плотности. Но если газ „очень разрежен“, то наступают отклонения. Здесь „очень разрежен“ означает, что средний пробег молекул велик *по отношению к размерам сосуда*. Понятие „разреженность вообще“ не имеет смысла. В достаточно большом сосуде газ не является разреженным, как бы ни была велика длина свободного пробега.

В оптике — совсем другой критерий. Там следует считать, что газ разрежен, если время между столкновениями молекул очень велико *по сравнению со временем затухания* колебаний оптических электронов.

Вернемся к вопросам интерференции. Здесь необходимо еще разобраться в одном кажущемся противоречии с законом сохранения энергии.

Пусть имеется два источника света. В каждой точке пространства квадрат амплитуды определяет проходящую энергию. Колебания от обоих источников складываются, и поэтому, как мы знаем, квадраты амплитуд *не* складываются. Энергия, проходящая в каждой точке, отлична от суммы энергий, которые посылал бы каждый источник в отдельности.

Часто это объясняют следующим образом. В одном месте колебания усиливаются, и здесь энергия больше суммы энергий от отдельных источников, зато в другом месте колебания уничтожаются, и там энергия равна нулю; если проинтегрировать по замкнутой поверхности, то получится сумма энергий, которые посылали бы источники, взятые в отдельности. Это объяснение встречается у Гельмгольца, но оно неправильно. Проинтегрировать по замкнутой поверхности не трудно. Проинтегрируйте — и вы *не* получите сумму энергий, которые посылал бы каждый источник в отдельности. Вернее, вы ее получите только в том случае, когда источники достаточно далеки друг от друга 1) по отношению к длине волны и 2) по отношению к размерам самих источников; в этом случае действительно получается просто перераспределение энергии.

Пусть источники, размер которых мал по сравнению с длиной волны, колеблются в одинаковой фазе, но расстояние между ними меньше половины длины волны. Тогда колебания всюду складываются и энергия *всюду больше* суммы энергий, которые посылали бы источники в отдельности. Получается кажущееся нарушение закона сохранения энергии.

Как всегда в таких случаях, нужно продумать, что это значит. Для того, чтобы источники продолжительно колебались, нужно затрачивать определенную энергию на поддержание их колебаний; уход энергии покрывается работой, совершаемой над источником. Если энергии уходит больше или меньше, чем сумма того, что давали бы отдельные источники, в этом еще нет нарушения закона сохранения энергии. Нарушение было бы, если для поддержания колебаний нужно было затрачивать сумму тех работ, которые требуются в случае отдельных источников. Но ведь нигде не сказано, что внешние силы, раскачивающие электроны (источники света), совершают одинаковую работу и тогда, когда раскачивается отдельно взятый электрон, и тогда, когда этот электрон раскачивается *в присутствии другого*, тоже колеблющегося, электрона. Если энергии излучается больше, то и работы вкладывается больше, и, таким образом, закон сохранения энергии полностью соблюдается.

Аналогичный вопрос встретился и в радиотелеграфии. Речь шла о затухающих колебаниях, которые не поддерживаются извне и уменьшаются вследствие излучения. Пусть совместно излучают две антенны. Затухание — то же самое, что и у одной антенны, а излучаемая энергия может оказаться больше, чем сумма энергий, которые излучались бы отдельными антеннами. Опять противоречие? Но откуда взято утверждение, что затухание то же, что у одной антенны? В действительности затухание каждой антенны вблизи другой меняется и как раз настолько, насколько меняется энергия при совместном излучении обеих антенн.

ПЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(Октябрь 1930 г.)

Почти-периодические функции. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одинакового периода. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний, имеющих различные периоды. Соизмеримость и несоизмеримость периодов. Радиоприем „посредством биений“. Роль нелинейности. Детекторы. Выпрямление. Образование разностного тона. Некоторые методы экспериментального исследования колебаний.

Как мы видели, сумма двух гармонических колебаний с разными периодами не может быть представлена как одно гармоническое колебание. Эта сумма — непериодическая функция, если периоды несоизмеримы. Когда ω_1 и ω_2 близки, сумму можно представить как „гармоническое колебание с переменной амплитудой и переменной фазой“. Мы выяснили, при каких условиях можно пользоваться таким представлением.

Примеры явлений, в которых имеет место сложение гармонических колебаний с разными периодами, очень многочисленны. Вот два простых примера: колебание фонаря, подвешенного на пловучем маяке, и колебание языка колокола¹. Еще один пример: в приливах и отливах мы имеем дело с периодическими силами, обусловленными Солнцем и Луной. Периоды этих сил различны. Возникают биения, — это сизигийные и квадратурные приливы, получающиеся в зависимости от относительного расположения Солнца и Луны. Необходимо отметить, что элементарная статическая теория приливов неправильна. Здесь происходит типично колебательное явление, в котором играет роль весь процесс в целом. Это явление очень похоже на явление резонанса, и для него существенна вся история воздействия².

Можно рассматривать суммы конечного числа гармонических колебаний с несоизмеримыми периодами, а потом перейти к сумме бесконечного числа таких гармонических колебаний. Это приводит к новому классу функций, более общих, чем периодические. Фактически к таким функциям подошли с двух различных сторон: исходя из рядов Фурье и отправляясь от определения периодических функций.

Вспомним, что такое периодическая функция³. Это функция $f(t)$, обладающая свойством

$$f(t + \tau) = f(t).$$

¹ [См. 26-ую лекцию.]

² [См. том V, стр. 436].

³ [См. 2-ую лекцию.]

Она имеет период τ , а также $n\tau$, где n — любое целое число. Рассмотрим теперь непрерывные функции $f(t)$, обладающие следующим свойством: для сколь угодно малого ϵ существуют такие „почти-периоды“ $\tau(\epsilon)$, что

$$|f[t + \tau(\epsilon)] - f(t)| < \epsilon,$$

причем таких почти-периодов имеется бесконечно много и они лежат не очень редко, — аналогично тому, как обстоит дело с периодами $n\tau$ ($n=1, 2, 3, \dots$) периодической функции. Такие функции повторяются, но повторяются не совсем точно. Они называются *почти-периодическими* функциями¹.

Оказывается, что всякую непрерывную почти-периодическую функцию можно аппроксимировать суммой гармонических колебаний с (вообще говоря) несоизмеримыми периодами:

$$f(t) \sim \sum_k c_k e^{i\omega_k t}.$$

Взяв достаточно большое число членов, можно получить сколь угодно хорошее приближение в смысле наименьшей квадратичной ошибки. И наоборот, такой ряд всегда представляет собой почти-периодическую функцию.

В физике мы постоянно сталкиваемся с почти-периодическими функциями. Например, смещение определенной точки струны выражается, как функция времени, бесконечным рядом синусоид с (вообще говоря) несоизмеримыми периодами. Это — почти-периодическая функция. Ряд Фурье получается только в том частном случае, когда частоты отдельных слагаемых относятся между собой, как целые числа.

Физика пришла к этим функциям иным путем, чем математика. Математика, определив свойство почти-периодичности, показала, что класс функций, обладающих этим свойством, совпадает с классом функций, которые могут быть представлены в виде ряда гармонических колебаний. Кроме этой основной теоремы, я пока что не нашел в математической теории почти-периодических функций чего-либо, что имело бы очень большое значение для теории колебаний.

Исследуем задачу о сложении двух гармонических колебаний, отличную от той, которую мы рассмотрели раньше, когда скла-

¹ [Г. Бор. Почти-периодические функции. М.—Л., 1934.]

дывались движения в одном направлении. Представим себе теперь, что какое-то тело качается в определенном направлении и его смещение есть

$$x = a_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1), \quad (1)$$

а некоторая точка колеблется в перпендикулярном направлении и ее смещение по отношению к этому телу есть

$$y = a_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2). \quad (2)$$

Тогда точка опишет некоторое сложное результирующее движение. Как говорят (не совсем точно), точка одновременно участвует в двух движениях. (Возникает вопрос, можно ли складывать перпендикулярные скорости. Это можно делать, если движение в одном направлении не зависит от движения в другом направлении.)

Уравнения (1) и (2) являются параметрическими уравнениями траектории точки. В случае, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, исключить из них t очень легко. Это можно сделать изящным способом, но можно пойти и лобовым путем: решить уравнения (1) и (2) относительно $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, как два линейных уравнения с двумя неизвестными, возвести затем полученные выражения в квадрат и сложить. Это даст уравнение траектории в виде

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3)$$

Таким образом, траектория представляет собой эллипс с центром в начале координат. С самого начала можно сказать, что эллипс заключен в прямоугольнике

$$x = \pm a_1, \quad y = \pm a_2.$$

Форма же эллипса и то, как он повернут, зависит от разности фаз $\varphi_1 - \varphi_2$. Здесь интересно то, что по направлению осей эллипса можно определить разность фаз.

Пусть

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm 2n\pi \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Тогда

$$\left(\frac{x}{a_1} - \frac{y}{a_2} \right)^2 = 0. \quad (4)$$

Пусть

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm n\pi \quad (n = 1, 3, 5, \dots),$$

тогда

$$\left(\frac{x}{a_1} \mp \frac{y}{a_2}\right)^2 = 0. \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) — это уравнения прямых, проходящих через начало координат. Таким образом, когда колебания совершаются с одинаковыми или с противоположными фазами, эллипс (3) вырождается в отрезок прямой.

Эти вещи играют фундаментальную роль в оптике при рассмотрении двоякопреломляющих тел. С ними связана целая глава

физики — кристаллооптика. В двоякопреломляющих телах световые колебания распространяются с разной скоростью, в зависимости от того, происходят ли они в направлении перпендикулярном или параллельном оптической оси.

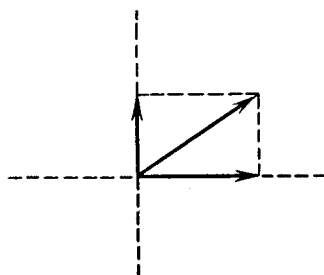


Рис. 6.

Пусть на пластинку (рис. 6) падает прямолинейно поляризованный свет. Скорости распространения двух взаимно перпендикулярных составля-

ющих колебания различны, и они выйдут из пластинки с различными фазами. Значит, луч выйдет из пластинки (вообще говоря) эллиптически поляризованным. Таким образом, пластинка превращает прямолинейно поляризованный луч в эллиптически поляризованный.

В частном случае, когда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2},$$

имеем из (3):

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1,$$

т. е. эллипс с главными осями, направленными по осям x и y . Если, кроме того, $a_1 = a_2$, то получается окружность. Таким путем получают свет, поляризованный по кругу.

Посмотрим, что будет, если частоты ω_1 и ω_2 не равны друг другу, но разность их очень мала. Для глаза это значит, что

числа колебаний в секунду отличаются меньше, чем, скажем, на 10. Мы можем тогда сказать, что имеются два колебания с одинаковой частотой, но разность фаз между ними медленно меняется. Эллипс не будет неподвижен, а будет медленно поворачиваться. Получается последовательная смена тех картин, которые соответствуют разным $\varphi_1 - \varphi_2$ и о которых мы только что говорили.

Пусть теперь частоты ω_1 и ω_2 разнятся как угодно. Здесь интересно следующее. Математика показывает, что если частоты соизмеримы, то получается замкнутая кривая, если несоизмеримы — незамкнутая. Но ведь физика ничего не знает о соизмеримых или несоизмеримых числах, в физике это различие не играет роли... Получается так, будто бы я только что указал на различие между обоими случаями, а теперь от этого отказываюсь. Позвольте привести аналогию.

Химики мне не простят, если я скажу, — а я это скажу, — что закон кратных отношений в общепринятой формулировке не имеет никакого смысла. Пусть соединяются элементы А и В. Тогда, как говорят обычно, В вступает в реакцию с заданным количеством элемента А в количествах, относящихся между собой, как целые числа. Говорят иными словами, что эти количества элемента В всегда соизмеримы. Я утверждаю, что это высказывание не имеет содержания: задав любые соизмеримые числа, всегда можно подобрать такие, близкие к ним, несоизмеримые числа, что нельзя будет различить одни от других. Что же имеет в виду химия? Что количества элемента В, соединяющиеся с данным количеством элемента А, относятся между собой, как *малые* целые числа. Но что такое малые числа? Подходят ли, например, числа 5 или 6? Где здесь надо остановиться? Точно сформулировать закон кратных отношений очень трудно.

Итак, при несоизмеримых периодах получается незамкнутая кривая. Она подходит как угодно близко к любой точке внутри прямоугольника, она заполняет его „всюду плотно“. Но кто запрещает рассуждать в случае несоизмеримых частот так, как если бы они были соизмеримы? Если мы заменим иррациональное отношение ω_1/ω_2 близким рациональным, физические результаты не могут измениться скачком. И действительно, оба подхода дают практически одно и то же. Весь вопрос в том, через сколько времени заканчивается опыт. В течение ограниченного промежутка времени я могу рассматривать дело так, как будто частоты

соизмеримы. Скажем, через год кривая покрывает всю площадь прямоугольника, но на опыте, если отношение частот близко к рациональному отношению $1:1$, мы увидим эллипс. Качественное различие здесь практически не существенно из-за медленности изменения формы эллипса.

Если отношение периодов равно $1:2$, $2:3$, $1:4$ и т. д., получают замкнутые кривые самого разнообразного типа. В зависимости от фазовых соотношений получают различные картины

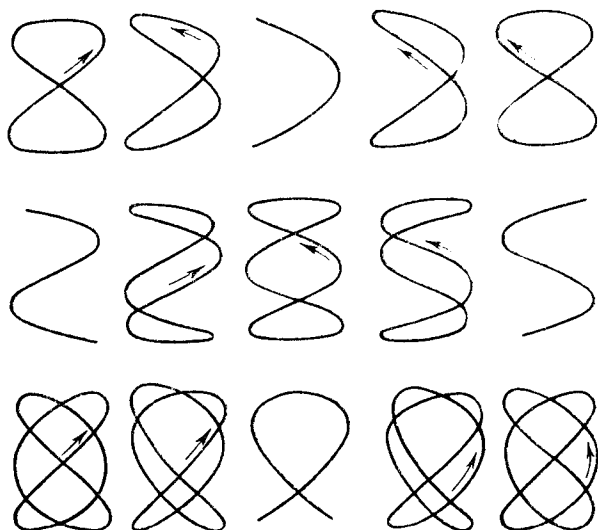


Рис. 7.

(фигуры Лиссажу); например, такие, как показано на рис. 7. Можно по фигуре узнавать отношение частот. Его можно установить по отношению чисел точек касания кривой к сторонам прямоугольника, в который она вписана.

Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний можно продемонстрировать с помощью двойного маятника, к которому подвешена воронка с песком (правда, здесь движения не совсем независимы).

На этом вопрос о сложении колебаний мы будем считать законченным. Перейдем теперь к вопросу о выпрямлении колебаний.

Допустим, что имеется радиостанция, посылающая незатухающую волну высокой частоты 100 000 герц, — частоты, находящейся далеко за пределом слышимости. Мы принимаем это кол

бание, но ничего не слышим. Пусть теперь на месте приема имеется источник колебаний близкой частоты, скажем 100 500. Тогда мы слышим в телефоне разностный акустический тон частоты 500. Если же работает только передатчик или только местный генератор (так называемый гетеродин), то ничего не слышно. Это было замечено, и в результате появился чрезвычайно удобный способ приема колебаний, оказавшийся к тому же чрезвычайно чувствительным. Этот способ приема сделался одним из самых распространенных. Его еще не так давно зачастую объясняли следующим образом: происходят биения 500 раз в секунду, и мы слышим эти биения как тон.

Это неверно. Если в приемнике *есть* гармоническое колебание с частотой 500, то вы услышите соответствующий тон. Если такого колебания в приемнике *нет*, то этого тона вы не услышите. Пусть в приемнике имеются колебания только с частотами 100 000 и 100 500. Происходят биения, но *нет* гармонического колебания с частотой 500. Следовательно, мы ничего не услышим. Поэтому употребляемое название „прием методом биений“ неправильно.

В объяснении, которое я привел, забыто одно обстоятельство, — то, что имеется *детектор*. Его роль в приемнике — самая существенная. Более того, освободиться от детектирования нелегко: всякий плохой контакт есть детектор, так как при загрязнении место контакта не подчиняется закону Ома.

Наводимая в контуре приемника электродвижущая сила имеет вид

$$e = a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t, \quad (6)$$

причем в нашем конкретном случае $\omega_1/2\pi = 100\,000$, $\omega_2/2\pi = 100\,500$.

Если контур подчиняется закону Ома, в нем будет течь ток, пропорциональный (6). На практике мембрана телефона за таким током не уследит. Но пусть даже удалось построить такую „мембрану“, которая будет заметно колебаться под действием тока высокой частоты (это не безнадежно: я имею в виду пьезокварц). Смещение такой мембраны будет иметь вид

$$x = \frac{a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t}{w},$$

где w — некоторая постоянная. Здесь *нет* акустической частоты.

В детекторе зависимость тока от напряжения не следует закону Ома. (Вся радиотехника основана на проводниках, не

подчиняющихся закону Ома, как в передающих устройствах, так в приемниках. Найдите новый проводник, не подчиняющийся закону Ома, и вы сможете сказать, что вы сделали открытие в радиотехнике). В детекторе

$$i = f(e),$$

где $f(e)$ — некоторая нелинейная функция (характеристика детектора).

Существуют и механические системы, обладающие аналогичным свойством, например механическая система уха. Барабанная перепонка уха связана с тремя костями (молоточек, наковальня и стремечко). Они соединяются с лабиринтом. Смещение перепонки не пропорционально силе. Если на нее действует сила в одном направлении, то смещение имеет другую величину, чем при силе такой же величины, действующей в противоположном направлении.

Будем говорить о кристаллическом детекторе. В нем используются гален (свинцовый блеск), пирит и другие кристаллы. Электродвижущие силы одной и той же величины, но разного направления, создают в детекторе токи различной силы, иногда даже различного *порядка* величины. (Теперь в качестве детектора употребляется катодная лампа. В ней в вакууме находятся разогретая нить и холодный анод. Такое устройство в одном направлении пропускает ток, а в другом совсем не пропускает).

Примем определенный вид характеристики детектора. Многое явления можно охватить следующей простой характеристикой:

$$i = \alpha e + \beta e^2.$$

Пусть

$$e = \cos \omega t.$$

Если бы был верен закон Ома, то такая гармоническая электродвижущая сила создавала бы гармонический ток (средний ток был бы равен нулю) и гальванометр постоянного тока ничего бы не показал. Если же зависимость между i и e дается формулой (7), то

$$i = \alpha \cos \omega t + \beta \cos^2 \omega t = \alpha \cos \omega t + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} \cos 2\omega t,$$

т. е. ток имеет совсем другой вид, чем e . В нем присутствуют прежнее гармоническое колебание частоты ω , но, кроме того, имеется постоянная слагающая и гармоническое колебание дво-

ной частоты. Если наши аппараты не откликаются на частоту ω , то тем более они не будут откликаться на частоту 2ω : включив в цепь детектора телефон, мы ничего не услышим. Но если ток i протекает через аппарат, реагирующий на постоянный ток, например гальванометр, то мы получим отклонение. Поэтому говорят о *выпрямлении*. Взятая нами характеристика (7) несимметрична: для положительных значений e оба члена имеют один знак (если α и β положительны), для отрицательных — разные знаки. Все дело в этой несимметричной „податливости“. В результате получается детектор (в смысле „обнаружитель“) и выпрямитель.

Но гораздо более интересен вопрос о том, что происходит, если к детектору подводится сумма двух гармонических колебаний разного периода, т. е. электродвижущая сила вида (6). Тогда

$$i = \alpha (a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t) + \\ + \beta (a_1^2 \cos^2 \omega_1 t + a_2^2 \cos^2 \omega_2 t + 2a_1 a_2 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t). \quad (8)$$

Здесь все члены, кроме последнего, дают то, что мы уже знаем. Член с произведением косинусов дает нечто новое. Его можно представить в виде

$$\beta a_1 a_2 [\cos(\omega_1 - \omega_2)t + \cos(\omega_1 + \omega_2)t].$$

Второе слагаемое имеет в нашем конкретном случае высокую частоту 200 500, но первое слагаемое имеет *низкую* частоту 500, равную разности частот подводимых колебаний. Это гармоническое колебание звуковой частоты, и мембрана телефона будет колебаться гармонически с частотой 500. Никаких биений в (8) нет, а есть *настоящее* гармоническое колебание с разностной частотой, *возникшее* благодаря детектору. Оно создается детектором из двух колебаний с высокими частотами.

Все, что было сказано, справедливо потому, что колебания мембраны телефона в приемнике очень малы. Как я сказал, ухо само обладает нелинейной характеристикой. Пусть на ухо действуют *сильные* звуки частоты 10 000 и 10 500. Тогда в ухе возникает колебание частоты 500, и мы слышим разностный тон. Но это опять не биения, а образование колебания разностной частоты, так как само ухо является детектором. При идеальной линейности характеристики уха мы не слышали бы тона частоты 500. К этому необходимо добавить, что для очень сильных звуков уже заметно нелинейны уравнения колебаний воздуха и разностные тоны могут возникнуть из-за того, что сам *воздух* является детектором.

Мы видим, насколько существенны детекторы. Детекторы — проводники, не подчиняющиеся закону Ома, — дают мощное средство исследования колебаний, переводя частоты из одной области значений в другую область.

Что будет, если взять детектор с другими свойствами, например с характеристикой, изображенной на рис. 8? Выпрямления уже не получится. Такой антисимметричный детектор $[i(-e) = -i(e)]$ создает колебания тройной частоты¹.

Коснемся коротко некоторых практических задач, возникающих в ряде случаев, когда мы имеем дело с колебаниями. Основные

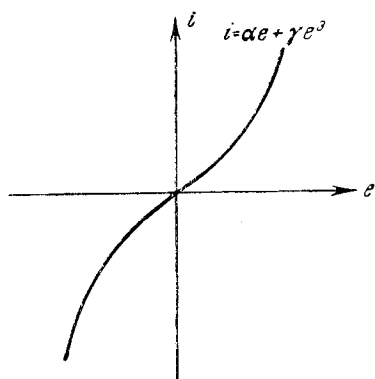


Рис. 8.

задачи таковы:

1. Приходят колебания, нужно их обнаружить (независимо от частоты и формы).
2. Нужно узнать, имеются ли колебания данной частоты.
3. Нужно узнать всю форму колебаний. Это иногда очень важно.

Для того, чтобы знать, как строить приборы для решения этих задач, нужно знать теорию колебаний, — то, о чем будет речь впереди.

Часто для изучения колебаний к колеблющемуся телу прикрепляется зеркальце. Отраженный от него пучок света можно развернуть путем вращения другого зеркала. Световой луч практически не имеет инерции; он следует за движением зеркальца. Но если попытаться изучить таким способом быстрые колебания воздуха, ничего хорошего не получится. Инерция зеркальца исказит форму колебания. Но существуют приспособления, позволяющие изучать колебание, почти не искажая его формы. Они основаны на использовании катодного пучка. Катушка с током отклоняет его, и светлая точка (конец пучка) чертит движение. Такой катодный осциллограф позволяет записать чрезвычайно быстрые изменения, происходящие, например, за одну десятимиллионную секунды. При этом точка смещается горизонтально на один миллиметр за одну десятимиллионную секунды. Для того, чтобы

осуществить такую быструю развертку в механической системе, потребовались бы колоссальные силы.

Часто требуется определить разность частот двух колебаний. Например, одно колебание имеет частоту 500, частота другого неизвестна. Чтобы ее узнать, наблюдают число биений. Пусть, например, происходят два биения в секунду. Тогда второе колебание имеет частоту 502 или 498. Подумайте, как узнать, которую из них?

Есть очень изящный способ изучения периодических явлений — стробоскопический способ. Мы хотим определить, сколько оборотов в секунду совершает колесо. Будем освещать его короткими вспышками через диск с вырезами. Пусть, скажем, колесо делает 100 оборотов в секунду и число вспышек за секунду также равно 100. При этом вспышки будут освещать колесо только в такие моменты, когда начерченная на нем линия (рис. 9) находится в каком-нибудь определенном, например вертикальном, положении.

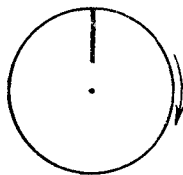


Рис. 9.

Мы будем видеть колесо так, как будто оно стоит на месте. Если давать вспышки немного чаще, то будет казаться, что колесо медленно вращается в сторону, обратную его истинному движению. Если вспышки следуют одна за другой медленнее, чем 100 раз в секунду, то видимая картина будет медленно поворачиваться по ходу колеса. Таким способом можно искусственно замедлить весь процесс.

Таким же образом можно узнать, как светит источник света, например неоновая лампочка, — вспышками или непрерывно. Будем махать палкой. Если происходят вспышки, то они заставят ее в определенных положениях, и мы видим ряд отдельных положений палки — веер.

Вернемся к опыту с вращением. Если вспышки следуют вдвое чаще, чем период вращения колеса, то они будут заставлять его в двух различных положениях. Если вращать разноцветный диск, то цвета сливаются. Но при стробоскопическом освещении они восстанавливаются.

Применение стробоскопических методов имеет существенное значение для определения динамических деформаций частей машин.

ШЕСТАЯ ЛЕКЦИЯ

(24/X 1930 г.)¹

Теория колебаний маятника, данная Галилеем. Теория колебаний маятника, основанная на законе сохранения энергии. Роль маятника в истории физики. Гармонические колебания механических систем, в которых сила определяется упругими деформациями. Колебания в контуре, обладающие емкостью и индуктивностью. Общие замечания о колебаниях около устойчивого положения равновесия. Кажущееся однообразие электрических колебательных систем.

Мы приступаем теперь к рассмотрению систем, совершающих гармонические колебания. Применяя к некоторым физическим системам основные законы механики или электричества, мы обнаружим, что в силу этих законов рассматриваемые системы совершают гармонические колебания.

Начнем с наиболее простых систем. Но прежде всего, что значит „простая“ система? Если мы возьмем абсолютно жесткий маятник, то для того, чтобы вполне определить его положение, нужно знать *одну* величину. Такие системы называются системами с одной степенью свободы (заметим, что если можно определить положение системы заданием одной величины, то его можно определить также заданием какой-нибудь функции от этой величины)

Но такое рассмотрение всегда является идеализацией. В природе не существует систем с одной степенью свободы. Жестких тел не существует. Чтобы полностью определить положение тела следовало бы, строго говоря, задать положения всех его молекул. Но и этого может быть недостаточно (вспомним о волновой механике). В наших рассуждениях нам часто приходится отступать от строгости. Если бы науку с самого начала развивали такие строгие и тонкие умы, какими обладают некоторые современные математики, которых я очень уважаю, то сложность не позволяла бы двигаться вперед.

Итак, будем говорить об одной степени свободы.

Как движется маятник? Что значит ответить на этот вопрос? Речь может идти о двух вещах:

- 1) о практическом, экспериментальном изучении;
- 2) о теоретическом изучении на основании общих, уже установленных закономерностей.

¹ [Точные даты предшествующих лекций не установлены.]

Мы выберем второй путь и будем опираться при этом на закон сохранения энергии, который содержит высказывания очень общего характера. Нужно, однако, иметь в виду, что такой ход идей — от закона сохранения энергии „вниз“ к маятнику — нарушает историческую перспективу. Как раз на маятнике был найден механический закон сохранения энергии. Его высказал в связи с маятником Гюйгенс.

Я кратко изложу развитие теории маятника.

Уже до Галилея было найдено, что период маятника при малых амплитудах не зависит от амплитуды (изохронизм малых качаний). Этот закон снова открыл Галилей. Для нас несущественно, рассматривается ли маятник как материальная точка, но в свое время это было существенно. Галилей уже знал, что в случае, когда маятник можно рассматривать как материальную точку, период τ пропорционален $\sqrt{l}$ (l — длина маятника).

Путь, которым шел основатель динамики Галилей, можно восстановить из его „Диалогов“. Будем идти примерно (но не совсем) по стопам Галилея.

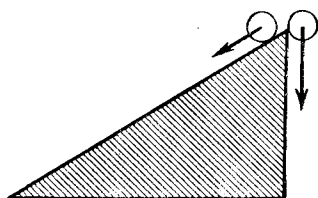


Рис. 10.

Галилей изучал движение точки по наклонной плоскости. При этом он не пользовался маятником, а измерял время по истечению воды из сосуда и количество вытекшей воды считал пропорциональным времени. Галилей установил, что ускорения при движении по гипотенузе (рис. 10) и при свободном падении относятся друг к другу, как вертикальный катет к гипотенузе. Отсюда следует, что шарик, пущенный из верхней точки A окружности по секущей (рис. 11), придет на окружность через время, не зависящее от выбора секущей. Отсюда следует также, что шарик, пущенный с окружности по секущей, идущей в нижнюю точку B (рис. 12), приходит в нее через время, не зависящее от выбора секущей. Галилей исходил из этого и рассуждал так: при малых качаниях маятника дугу можно заменить хордой, и маятник движется по хорде, как по наклонной плоскости. Тогда, если t — время падения через весь вертикальный диаметр (рис. 13), то

$$2l = \frac{gt^2}{2},$$

откуда

$$t = 2\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Период τ малого колебания равен, следовательно, учетверенному времени падения по хорде:

$$\tau = 8\sqrt{\frac{l}{g}},$$

независимо от того, откуда пущен маятник.

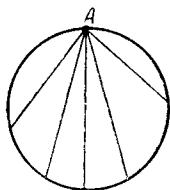


Рис. 11.

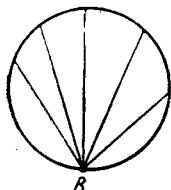


Рис. 12.

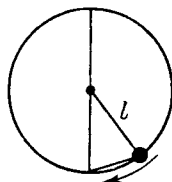


Рис. 13.

Из этого рассуждения получается, что малые колебания обладают свойством изохронизма. Из него получается также, что период пропорционален $\sqrt{l}$, но не получается правильного значения коэффициента пропорциональности: он равен в действительности 2π , а не 8.

Мы видим, сколь опасно сделанное упрощение: как бы ни была мала дуга, важна кривизна пути. Нельзя переменный наклон

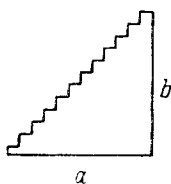


Рис. 14.

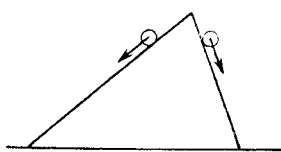
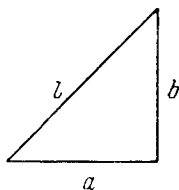


Рис. 15.

заменять средним наклоном. Вот аналогичный пример: замена прямой ломаной (рис. 14) в пределе правильно дает площадь, но не длину; длина получается равной $a + b$, а не l .

У Галилея уже есть намек на закон сохранения энергии. Галилей пользовался предположением, что если материальные точки движутся по двум наклонным плоскостям (рис. 15), то на одном и том же горизонтальном уровне их скорости всегда одинаковы.

Задача о физическом маятнике (рис. 16) занимала почти всех выдающихся математиков того времени. При решении этой задачи Гюйгенс пришел к одной из первых формулировок закона сохранения энергии в механике¹. Исследование Гюйгенса намного переросло частную задачу о маятнике. Современная трактовка задачи на основе закона сохранения энергии такова.

Кинетическая энергия физического маятника есть

$$T = \sum \frac{mv^2}{2}.$$

Здесь m — массы материальных точек; v — их скорости (вместо суммы можно написать интеграл). Далее

$$v = r\dot{\varphi}$$

и

$$T = \sum \frac{mr^2}{2} \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}$$

(I — момент инерции).

Потенциальная энергия есть

$$U = Pl(1 - \cos \varphi).$$

На основании закона сохранения энергии

$$T + U = \frac{I}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + Pl(1 - \cos \varphi) = C'^2, \quad (1)$$

где C'^2 — постоянная. Это — дифференциальное уравнение движения маятника. Оно нелинейно. Ограничимся случаем, когда φ настолько мало, что можно пользоваться приближением

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}.$$

Тогда вместо (1) можно написать приближенно:

$$\frac{I}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{Pl}{2} \varphi^2 = C'^2.$$

Обозначив

$$\frac{2C'^2}{Pl} = C^2,$$

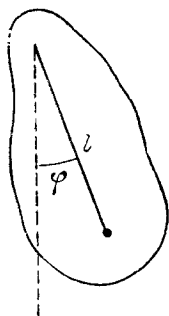


Рис. 16.

¹ [Х. Гюйгенс. Три мемуара по механике. Изд-во АН СССР, 1951.]

получаем:

$$\frac{1}{Pl} \dot{\varphi}^2 + \varphi^2 = C^2,$$

откуда

$$\varphi = C \cos(\omega t + \psi),$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{Pl}{I}}.$$

Для математического маятника массы m и длины l

$$I = l^2 m, \quad P = mg, \quad \tau = 2\pi \sqrt{l/g}.$$

Период совершенно определенным образом зависит от параметров системы. Он не зависит от начальных условий. Но фаза ψ и амплитуда C произвольны. Это величины, определяемые не системой, а данными опыта, так называемыми начальными условиями.

Какие предположения были нами сделаны?

1. Предположение о том, что других видов энергии, кроме записанных в (1), здесь не существует. Это значит в частности, что мы пренебрегаем трением.

2. Предположение о том, что маятник совершает *малые* колебания. При этом кинетическая энергия равна постоянной, умноженной на $\dot{\varphi}^2$, а потенциальная энергия — постоянной, умноженной на φ^2 .

Возьмем какую угодно систему, кинетическая и потенциальная энергии которой имеют именно такой вид: постоянная $\times \dot{\varphi}^2$ и постоянная $\times \varphi^2$ (φ — координата системы). Такая система будет совершать синусоидальные колебания. Это математически следует из вида выражения для энергии, и мы с этим встретимся в ряде других примеров.

Но, решая уравнение (1), мы допустили некоторую неточность. Дело в том, что уравнение (1) имеет еще одно решение, а именно $\varphi = \text{const}$. Из закона сохранения энергии нельзя вывести, что если отклонить маятник и затем отпустить его, то он не будет оставаться в покое в отклоненном положении. Существование дополнительного решения $\varphi = \text{const}$ — недостаток этого способа рассмотрения. Второй закон Ньютона дает более определенный ответ: на тело действует сила, отличная от нуля; следовательно, тело имеет ускорение и φ не может быть постоянным. Закон

сохранения энергии дает ответ на вопрос о том, как движется маятник, если известно, что он не остается в покое. Для систем с несколькими степенями свободы закон сохранения энергии не может дать и этого.

В неизданных при жизни рукописях Галилея содержится предложение использовать маятник в качестве регулятора хода часов.

Маятник сыграл чрезвычайно большую роль в истории физики. Как известно, он может служить для определения ускорения тяжести g — одной из самых важных „естественных“ величин.

Рише в 1774 г. провел сравнение значений g в Париже и Кайенне. Эти значения получились различными, что объясняется вращением и формой Земли.

С помощью качаний маятника g может быть измерено до седьмого знака. Для этого пользуются так называемым обратным маятником, причем приходится вносить поправки на трение и на архимедову подъемную силу.

Бессель использовал маятник для того, чтобы с большой точностью проверить пропорциональность инертной и тяжелой массы. Уже Ньютон отлично знал, что закон качания маятника (независимость периода от массы) справедлив лишь в том случае, если тяжелая масса пропорциональна инертной. С доступной ему точностью он показал на опыте, что эти величины пропорциональны одна другой. Бессель доказал это с гораздо большей точностью — до $1/60\,000$. Он исследовал вещество метеоритов, воду и другие материалы.

Впоследствии Этвеш подтвердил, что все тела имеют одно и то же g , с точностью $5 \cdot 10^{-8}$ (но не с помощью маятника). Эйнштейн возвел это в постулат общей теории относительности.

Пусть мы находимся в лифте. Все тела в нем давят вследствие притяжения Земли. Представим себе, что притяжение отсутствует, тогда давления нет. Но пусть лифт движется ускоренно вверх. Тогда, согласно постулату Эйнштейна, тела давят точно так же, как и в том случае, когда действует притяжение Земли. Если бы g для различных тел было различным, этого не могло бы быть.

Явление, которое исследовали Ньютон и Бессель с помощью маятника, привело к общей теории относительности.

Громадная точность, с которой измеряется период качания маятника, достигается методом совпадений. Пустим маятник вместе с часами. Мало-помалу они разойдутся. Пусть, например, маятник

часов имеет период 1 секунду и 1000 колебаний часов совпадают с 1001 колебаниями маятника. Тогда мы знаем, что за 1001 колебание маятника прошло 1000 секунд, и отсюда находим период маятника.

Типичными механическими системами, совершающими гармонические колебания, являются такие, в которых силы определяются упругими деформациями.

Если для балки (рис. 17) справедлив закон Гука, то сила пропорциональна прогибу:

$$h = \alpha P$$

(h — прогиб; P — вес груза; α — постоянная).

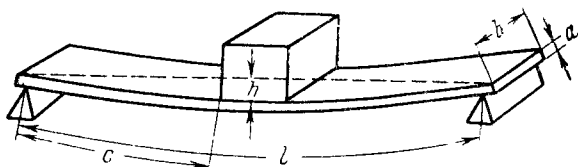


Рис. 17.

Если действует сила, пропорциональная смещению из положения равновесия:

$$F = -kx,$$

то потенциальная энергия будет

$$U = \frac{kx^2}{2}.$$

Если на тело, которое может вращаться около оси, действует момент сил, пропорциональный угловому смещению:

$$M = -K\varphi,$$

то потенциальная энергия будет

$$U = \frac{K\varphi^2}{2}.$$

В нашем случае (рис. 17) потенциальная энергия

$$U = \frac{kh^2}{2} - Ph$$

(второй член появился вследствие того, что на груз действует еще сила тяжести). Пренебрежем кинетической энергией балки. Кинетическая энергия груза равна

$$T = \frac{M\dot{h}^2}{2},$$

и, следовательно, полная энергия системы будет

$$E = T + U = \frac{M\dot{h}^2}{2} + \frac{kh^2}{2} - Ph.$$

Легко привести это выражение к прежнему виду (сумма квадратов) заменой

$$x = h - \frac{P}{k},$$

откуда

$$\dot{x} = \dot{h}.$$

Тогда

$$E = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} - \frac{P^2}{2k}.$$

Закон сохранения энергии дает:

$$\frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = C'^2,$$

и, следовательно,

$$x = C \cos(\omega t + \psi),$$

причем частота

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}.$$

Здесь также период строго определен, если определена сама рассматриваемая система.

В технике нас интересует, как k связано с константами балки. Теория упругости дает:

$$k = \frac{la^3bE}{4c^2(l-c)^2},$$

где E — модуль Юнга материала балки, а a , b , c и l — геометрические параметры, указанные на рис. 17. Таким образом, если балка дана, то, подставив числа, можно рассчитать частоту колебаний.

Рассмотрим еще случай кручения. Пусть имеется (рис. 18) стержень круглого сечения с диском на конце. Здесь

$$U = \frac{K\varphi^2}{2}, \quad T = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Уравнение колебаний есть

$$\frac{I\ddot{\varphi}^2}{2} + \frac{K\varphi^2}{2} = C'',$$

так что здесь опять получается гармоническое колебание.

Частота его равна

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}}.$$

Согласно теории упругости

$$K = \frac{G\pi r^4}{2l},$$

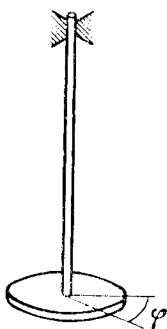


Рис. 18.

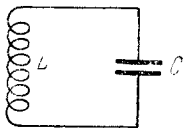


Рис. 19.

где G — модуль сдвига материала стержня, r — радиус его сечения, l — его длина. В случае спиральной пружины K тоже имеет очень простое выражение.

Во всех случаях, когда действуют упругие силы, подчиняющиеся закону Гука, имеют место изохронные гармонические колебания, т. е. колебания с периодом, зависящим только от системы, но не от начальных условий.

Возьмем теперь электрическую систему, состоящую из емкости C и индуктивности L (рис. 19). Электрическая энергия есть

$$W_e = \frac{Q^2}{2C},$$

где Q — заряд конденсатора, а магнитная энергия

$$W_m = \frac{Li^2}{2} = \frac{L\dot{Q}^2}{2},$$

где $i = \dot{Q}$ — сила тока. Если отвлечься от сопротивления, как мы это делали раньше, то закон сохранения энергии дает:

$$\frac{Q^2}{2C} + \frac{L\dot{Q}^2}{2} = C'^2.$$

Таким образом, здесь тоже происходят гармонические колебания с периодом

$$\tau = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Это — знаменитая формула Томсона.

Математическое условие гармоничности колебаний может быть сформулировано так: потенциальная энергия должна быть положительна и должна квадратично зависеть от координаты (кинетическая энергия всегда положительна и квадратична по скорости).

Положительность потенциальной энергии — достаточное условие устойчивости равновесия. В общем случае

$$U = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \quad (2)$$

В положении устойчивого равновесия U имеет минимум: если немного вывести систему из состояния устойчивого равновесия, она не может в этом случае далеко уйти, так как сумма кинетической и потенциальной энергий остается постоянной, причем обе эти величины положительны. Совсем иначе обстоит дело, если U имеет максимум. По мере роста x кинетическая энергия увеличивается и система все более удаляется от состояния равновесия.

Можно поместить начало координат в положение равновесия. Если $x = 0$ является устойчивым положением равновесия, то, как сказано, в этом положении U имеет минимум, для чего необходимо

$$a_1 = 0, \quad a_2 > 0.$$

Если система выведена из состояния устойчивого равновесия, то при малых отклонениях, когда можно пренебречь высшими членами разложения (2), она совершает гармонические колебания.

Все разобранные нами примеры являются частными случаями таких колебаний около устойчивого положения равновесия.

Эти примеры могут создать впечатление, что механические колебательные системы очень разнообразны, а электрические — крайне однообразны: в них всегда „одно и то же“ — конденсатор и катушка самоиндукции. Это — кажущееся однообразие. Различие

между плоским и цилиндрическим конденсатором — такое же, как между балкой и закрученным стержнем. Коэффициент k в механике обычно раскрывается, а в электрических колебаниях нашли удобным раз навсегда назвать параметр, аналогичный $1/k$, емкостью. Разнообразие электрических систем скрыто в том, как выражаются C и L через параметры, характеризующие геометрическую конфигурацию конденсатора и катушки.

СЕДЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(27/X 1930 г.)

Примеры механических колебательных систем. Вал с двумя дисками и его электрическая модель. Осторожность, необходимая при идеализациях. Пример Бореля. „Неестественные“ начальные условия в случае груза, висящего на пружине. Электрическая аналогия этого случая. Качественное исследование движений нелинейной консервативной системы с одной степенью свободы с помощью интеграла энергии: неограниченное одностороннее движение, либрационное движение, лимитационное движение. Применение общей теории к гармоническому осциллятору и к маятнику.

Зависимость периода гармонических колебаний от параметров системы играет важную роль во многих технических и физических измерениях, например: в определении моментов инерции тел, в измерении магнитных полей. Если известен момент инерции магнита, то из результатов исследования его колебаний в магнитном поле можно найти в отдельности произведение магнитного момента на поле и отношение магнитного момента к полю и вычислить по этим данным магнитное поле. Этим способом Гаусс определял напряжение магнитного поля Земли.

Вопросы, относящиеся к периоду колебаний, играют важную роль в машиностроении. Часто случается, что центр тяжести вращающейся массы машины немного смещен по отношению к оси вращения. При вращении развивается центробежная сила, периодически действующая на ось. Когда период вращения совпадает с периодом собственных колебаний системы, состоящей из машины и фундамента, на котором она укреплена, то развиваются опасные явления: колебания усиливаются. Это явление носит название резонанса.

между плоским и цилиндрическим конденсатором — такое же, как между балкой и закрученным стержнем. Коэффициент k в механике обычно раскрывается, а в электрических колебаниях нашли удобным раз навсегда назвать параметр, аналогичный $1/k$, емкостью. Разнообразие электрических систем скрыто в том, как выражаются C и L через параметры, характеризующие геометрическую конфигурацию конденсатора и катушки.

СЕДЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(27/X 1930 г.)

Примеры механических колебательных систем. Вал с двумя дисками и его электрическая модель. Осторожность, необходимая при идеализациях. Пример Бореля. „Неестественные“ начальные условия в случае груза, висящего на пружине. Электрическая аналогия этого случая. Качественное исследование движений нелинейной консервативной системы с одной степенью свободы с помощью интеграла энергии: неограниченное одностороннее движение, либрационное движение, лимитационное движение. Применение общей теории к гармоническому осциллятору и к маятнику.

Зависимость периода гармонических колебаний от параметров системы играет важную роль во многих технических и физических измерениях, например: в определении моментов инерции тел, в измерении магнитных полей. Если известен момент инерции магнита, то из результатов исследования его колебаний в магнитном поле можно найти в отдельности произведение магнитного момента на поле и отношение магнитного момента к полю и вычислить по этим данным магнитное поле. Этим способом Гаусс определял напряжение магнитного поля Земли.

Вопросы, относящиеся к периоду колебаний, играют важную роль в машиностроении. Часто случается, что центр тяжести вращающейся массы машины немного смещен по отношению к оси вращения. При вращении развивается центробежная сила, периодически действующая на ось. Когда период вращения совпадает с периодом собственных колебаний системы, состоящей из машины и фундамента, на котором она укреплена, то развиваются опасные явления: колебания усиливаются. Это явление носит название резонанса.

Можно множить до бесконечности примеры систем, совершающих гармонические колебания. Остановимся на одном из них. Представим себе, что в Земле просверлен канал, проходящий через ее центр, и что в этом канале находится тяжелое тело. Легко доказать, что действующая на него сила пропорциональна расстоянию от центра Земли. Это соответствует гармоническому колебанию; его период — около 42 минут. Конечно, это шутка, но вы знаете, что Дж. Дж. Томсон положил подобную модель в основу своей теории атома. Согласно этой модели атом — шар, равномерно заряженный по всему объему положительным электричеством, внутри которого колеблются отрицательные заряды — электроны. Известно теперь, что эта модель глубоко, принципиально неправильна, но в свое время она сыграла большую роль.

Рассмотрим еще один пример, на котором мы убедимся, как мне кажется, в пользу рассмотрения колебательных вопросов с общей точки зрения. Попутно я хотел бы спросить, что для вас нагляднее: механические или электрические схемы? Кельвин говорил: „Я могу сказать, что я понял явление, если я могу составить для него механическую модель“. Многие современные физики сказали бы обратное: „Я понимаю механическое явление, если я создал для него электрическую модель“.

Представим себе два диска, соединенные стержнем (как сказал бы физик) или валом (как сказал бы техник). Эта система имеет две степени свободы: во-первых, диски могут вращаться вместе, как твердое тело; во-вторых, они могут поворачиваться друг относительно друга и закручивать стержень. Рассчитаем движение такой системы. Ее кинетическая энергия

$$T = \frac{I_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{I_2 \dot{\varphi}_2^2}{2},$$

где I_1, I_2 — моменты инерции дисков; φ_1, φ_2 — их углы поворота. Потенциальная энергия U зависит только от разности $\varphi_1 - \varphi_2$:

$$U = \frac{k(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2},$$

причем коэффициент k характеризует упругость стержня при кручении.

Представим себе, что мы скрутили систему и пустили ее. Тогда движение будет совершаться под действием одних только

внутренних сил. При этом справедлив закон моментов количества движения:

$$I_1 \dot{\phi}_1 + I_2 \dot{\phi}_2 = \text{const.}$$

Если в начальный момент система была в покое, то $\text{const} = 0$ и

$$I_1 \phi_1 + I_2 \phi_2 = \text{const}'.$$

Если теперь мы условимся отсчитывать углы так, чтобы для $t=0$ было

$$I_1 \phi_1 + I_2 \phi_2 = 0, \quad (1)$$

то это уравнение будет оставаться верным для произвольного t . Уравнение (1)—это простое алгебраическое уравнение. Мы как будто получили систему с одной степенью свободы. Нас интересу-

ет, каков период ее собственных колебаний. Но мы не будем его вычислять, а рассмотрим вместо этого аналогичный электрический пример (рис. 20). Введем обозначения:

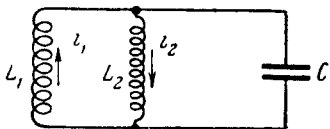


Рис. 20.

$$Q_1 = \int_0^t i_1 dt, \quad Q_2 = \int_0^t i_2 dt$$

(Q_1 и Q_2 — заряды). Потенциальной энергией здесь является электростатическая энергия

$$U = \frac{(Q_1 - Q_2)^2}{2C}.$$

Кинетической энергией здесь является магнитная энергия

$$T = \frac{L_1 \dot{Q}_1^2}{2} + \frac{L_2 \dot{Q}_2^2}{2}.$$

Кроме того, если взять обход, показанный стрелками, то по обобщенному закону Кирхгофа имеем:

$$L_1 \dot{Q}_1 + L_2 \dot{Q}_2 = 0.$$

Сравните наши две задачи: они совершенно аналогичны. Те, кто занимается электрическими схемами, сразу дадут ответ на вто-

рую задачу. Две параллельно соединенные индуктивности эквивалентны одной индуктивности:

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}.$$

Отсюда видно, что в механическом примере мы можем рассуждать так, как будто у нас одна степень свободы, но момент инерции есть

$$I = \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}.$$

Следовательно, период колебаний механической системы равен

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}}.$$

Для меня механический пример не был *сразу* ясен. Я бы не смог сразу, не рассуждая, заменить два диска *одним* диском с подходящим моментом инерции. Между тем электрическая модель для меня совершенно очевидна. Вероятно, для тех, кто много занимается пропеллерами, дело обстоит как раз наоборот.

Еще одно замечание: чему в электрической системе соответствует вращение всей механической системы как целого? Ему соответствует постоянный ток в цепи из индуктивностей. Если он есть, то он будет продолжать течь неопределенно долго (в случае отсутствия сопротивления). Здесь видно, что теория колебаний систем с одной степенью свободы охватывает более широкий класс явлений, чем это могло показаться с первого взгляда.

Перейдем к другому вопросу. Очень часто, когда делают выводы из той или иной теории, забывают, что допущена определенная идеализация и впадают при этом в большие ошибки. Вернемся к тем предпосылкам, из которых мы исходили, когда рассматривали маятник с одной степенью свободы. Мы считали, что стержень не имеет массы. В сущности, этим мы откинули все явления, связанные с тем, что стержень может колебаться, как распределенная система. Казалось бы, естественно представить себе, что стержень становится все более и более жестким, но здесь нельзя перейти к пределу. Современная физика считает, что принципиально не существует абсолютно жестких тел. Я приведу доказательство этого утверждения, данное Лауэ. Предположим, что у нас имеется очень длинный стержень (рис. 21) и пусть он абсолютно жесткий. Если мы передвинем конец *A* стержня,

то в то же мгновение должен передвинуться и конец *В*. Теория относительности утверждает, что это невозможно: она принимает в качестве постулата, что скорость сигнала может быть только меньше или равна скорости света. Выход из противоречия в том, что благодаря сжимаемости стержня движение передается по нему не мгновенно.

Разберем другое сделанное нами предположение. Допустим, что мы можем ограничиться рассмотрением одной степени свободы. Вообще говоря, закон Гука не имеет места. Пользуясь, как мы это делали, законом Гука, мы ограничились первым членом разложения силы, как функции смещения, в степенной ряд. Можно ли отбрасывать остальные члены? Это очень важный

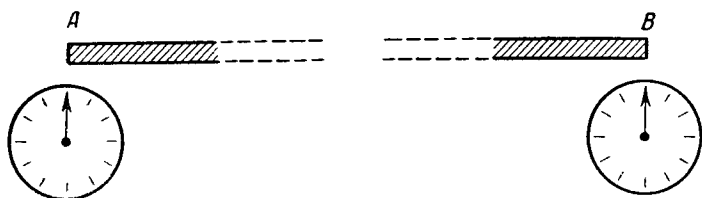


Рис. 21.

и тонкий вопрос. Существует ли непрерывная зависимость между параметрами, входящими в дифференциальное уравнение, и его решениями? Я не знаю, рассмотрен ли этот вопрос где-нибудь как следует (кое-что сказано в книге Куранта и Гильберта¹). Между тем без такого рассмотрения никакая математическая теория не может претендовать на физическую значимость.

Борель приводит пример, где сколь угодно малое специальное изменение дифференциального уравнения ведет к коренному изменению характера решений. Надо надеяться, что тот класс уравнений, с которым мы имеем дело, не допускает подобных вещей. Пример Бореля связан как раз с гармоническими колебаниями. Напишем уравнение

$$m\dot{x}^2 + kx^2 = \text{const.}$$

Его решениями являются синусоидальные функции, имеющие периодический или, говоря более обще, осцилляторный (колебательный) характер. (Здесь характерно чередование: максимум, нуль, минимум и т. д.)

¹ [Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики. (М.—Л., 1951).]

Изменим уравнение следующим образом:

$$m\ddot{x} + kx^2 = \text{const} + \lambda t, \quad (2)$$

причем константа λ положительна и как угодно мала. Добавление члена λt *качественно* изменяет характер решений: уравнение (2) не допускает колебательного решения. Действительно, в силу (2)

$$(m\ddot{x} + kx) \dot{x} = \lambda,$$

что исключает (так как $\lambda > 0$) возможность равенства $\dot{x} = 0$. Поэтому x не может иметь максимума или минимума, решение не может быть осцилляторным. Если бы мы получили уравнение (2) и откинули бы член с λ ввиду его малости, то, даже интересуясь только изменением x на протяжении конечного времени, мы получили бы в корне неправильный ответ.

К счастью, в тех случаях, с которыми мы оперируем, дело обстоит, повидимому, благополучно. Однако вы видите, насколько нужно быть осторожным: приходится предполагать, что мы такого рода отбрасывания делаем удачно.

Вернемся к физике. Обычно говорят: в случае груза, висящего на пружине, можно считать, что система имеет одну степень свободы, если масса пружины мала по сравнению с массой груза. По существу это в конечном счете верно. Смысл того, что я скажу — не в том, что обычное утверждение ошибочно, а в том, что оно не разъясняет сущности дела. Ведь при выводе уравнения движения рассматриваемой системы предположение о малости массы пружины нигде не входит. При выводе уравнения движения пользуются вторым законом Ньютона:

$$m\ddot{x} = f, \quad (3)$$

справедливым независимо от величины массы m . Предполагается далее, что

$$f = -kx.$$

При этом ни слова не говорится о том, что масса пружины мала. Но известно, что если пружина имеет очень большую массу, то уравнение (3) неверно. В чем же дело?

Мы сделали предположение, что если нижний конец пружины сдвинется на x , то разовьется сила $-kx$. Это, вообще говоря, *неверно*. Эта гипотеза верна только в статическом случае,

если пружина растягивается достаточно медленно. В общем случае пружина в разных своих частях сжата или растянута по-разному; при этом ее удлинение не пропорционально силе.

Итак, существенно предположение, что пружина деформируется *статически* или, точнее, квазистатически. Как это связано с величиной ее массы? Строгий анализ показывает, что пружина сама может колебаться, как распределенная система. При этом пружина уже не ведет себя квазистатически. Но если масса пружины мала, то мы имеем право не считаться с этими колебаниями, потому что они тогда очень быстрые и весьма быстро затухают. Они изменяют картину только в „первый момент“, пока они еще не затухли. Но иногда уже „первый момент“ чрезвычайно существен. Я приведу два примера.

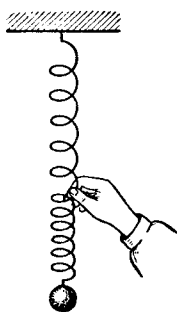


Рис. 22.

Допустим, что мы оттягиваем пружину за середину (рис. 22) и отпускаем (аналогично можно поступить с зарядом на конденсаторе). Если начальные условия — „естественные“ для одной степени свободы (т. е. в начальный момент пружина деформирована однородно), то быстрые колебания не возникают. Но в данном случае в первый момент пружина начнет быстро колебаться, и эти быстрые колебания могут поглотить очень много энергии. Потенциальная энергия равняется в начальный момент

$$\frac{k'x^2}{2},$$

где k' — сила, нужная для того, чтобы оттянуть пружину на 1 см в месте захвата. Если это место — середина пружины, то $k' = 2k$, где k — жесткость при растяжении за конец пружины. Таким образом, сила при том же самом удлинении вдвое больше, если точка ее приложения находится в середине пружины. Итак, потенциальная энергия равна в начальный момент

$$\frac{(2k)x^2}{2}.$$

Когда натяжение в пружине перераспределяется, смещение груза останется равным x , так как груз не успеет заметно сдвинуться. Поэтому после перераспределения потенциальная энергия будет равна $kx^2/2$. Отсюда видно, что *половина* начальной энергии ухо-

дит на быстрые колебания. Дальнейший процесс идет с половинной энергией.

Второй пример — электрический аналог первого. Сперва заряжается одна пара пластин (рис. 23), затем проскакивает искра и возникают быстрые затухающие колебания в контуре, состоящем из конденсаторов и соединяющих их проводов (колебания эти быстрые из-за того, что соединительные провода очень коротки). Вследствие этих колебаний происходит перераспределение зарядов между пластинами. После того, как произошло это перераспределение, два конденсатора можно рассматривать как один. Но в первый момент этого делать нельзя, так как имеет место „нестественное“ начальное условие. Вместе с перераспределением зарядов происходит перераспределение энергии. Часть энергии идет при этом на теплоту, выделяющуюся при быстрых колебаниях.

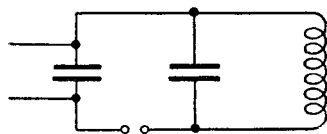


Рис. 23.

Если забыть об особенностях начальных условий, то будет сделана ошибка в энергии. Эта ошибка может быть очень велика (может превратиться в тепло любая доля энергии), в зависимости от точки приложения силы (в случае пружины) или от соотношения емкостей (в случае конденсаторов). Итак, не нужно забывать, что могут быть такие начальные условия, при которых обычная идеализация не является справедливой.

Рассмотрим теперь системы с одной степенью свободы в более общем случае, когда емкость и индуктивность зависят от величин электрического и магнитного поля. Так будет в случае катушки с железом и конденсатора с сегнетовой солью. Поведение таких систем при больших амплитудах описывается *нелинейными* дифференциальными уравнениями. Написать эти уравнения легко, но они мало изучены. Здесь можно пойти в таком направлении: можно стараться представить себе на основании самого дифференциального уравнения, не решая его, всю качественную картину движений. Особенно важен и плодотворен этот подход в теории так называемых автоколебательных систем. Этими вопросами мы будем в свое время заниматься¹.

¹ [См. 13-ую и 14-ую лекции.]

Постараемся, применяя эти методы, выяснить картину движения, не ограничиваясь специальным случаем линейности. Пусть уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x}=f(x),$$

где $f(x)$ — однозначная функция x . Умножив уравнение на dx/dt и проинтегрировав, мы получим, обозначив

$$F'(x) = -f(x),$$

первый интеграл:

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + F(x) = W$$

(W — постоянная). $F(x)$ называется потенциальной энергией. Это уравнение выражает закон сохранения энергии (мы имеем дело с консервативной системой).

Пусть для простоты $m=2$. Тогда, обозначив

$$W - F(x) = \Phi(x),$$

имеем:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\Phi(x)}. \quad (4)$$

Двузначность квадратного корня имеет огромное значение для поведения системы. С ней связана возможность периодических (и вообще колебательных) решений.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \psi(x),$$

где $\psi(x)$ — однозначная функция от x . Такое уравнение не допускает периодического решения (оно соответствует телу без массы, движущемуся в вязкой жидкости). Физически ясно, что здесь не может быть периодического движения: при периодическом движении тело должно поочередно проходить одно и то же положение, двигаясь в одну, затем в другую сторону, т. е. при одном и том же x скорость должна иметь то один, то другой знак. Но здесь, при данном x , скорость dx/dt имеет вполне определенное значение, и, следовательно, это невозможно. В случае же консервативной системы, из-за наличия двух знаков, это не запрещается.

Заметим, что $\Phi(x) \geq 0$ (мнимые скорости не рассматриваются).

Рассмотрим ряд случаев.

1. Пусть на всем рассматриваемом интервале значений x функция $\Phi(x)$ не имеет корней, т. е. не обращается в нуль. Так обстоит дело, например, тогда, когда точку отталкивает сила, пропорциональная расстоянию.

Перепишем дифференциальное уравнение (4) в виде

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}},$$

откуда

$$t + C = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}.$$

Предположим, что мы пускаем часы ($t=0$) в тот момент, когда $x=x_0$ (мы вводим специальный отсчет времени). Тогда $C=0$.

С увеличением x здесь t монотонно растет. Скорость направлена всегда в одну сторону. Мы еще не нашли x , как функцию от t , т. е. $x=x(t)$. Однако мы уже знаем, что t — монотонная функция от x . Следовательно, ее можно однозначно обернуть. Таким образом, мы решили качественную задачу. Мы знаем, что тело все время движется в одном и том же направлении. Может случиться, что x обращается в бесконечность при конечном значении t , т. е. тело за конечное время уходит в бесконечность. Но нормальный случай — тот, когда точка уходит в бесконечность за бесконечное время.

2. Пусть функция $\Phi(x)$ имеем два корня:

$$\Phi(x_1)=0, \quad \Phi(x_2)=0,$$

и пусть начальное значение $x=x_0$ заключено между этими корнями:

$$x_1 \leq x_0 \leq x_2.$$

Тогда

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}},$$

причем

$$\Phi(x) = (x_2 - x)(x - x_1)\Psi(x)$$

и $\Psi(x)$ в интервале $x_1 < x < x_2$ не обращается в нуль. Так как $\Phi(x) \geq 0$, то в интервале $x_1 < x < x_2$ имеем $\Psi(x) > 0$; значения $\Psi(x_1)$ и $\Psi(x_2)$ могут равняться нулю. Если $\Psi(x_1)$ равно нулю,

то x_1 — кратный корень функции $\Phi(x)$. Аналогично обстоит дело с $\Psi(x_2)$. В общем случае можно написать:

$$\Phi(x) = (x_2 - x)^m (x - x_1)^n \Psi(x),$$

где m и n — целые числа, указывающие кратность корней x_2 и x_1 , а $\Psi(x) \neq 0$ на сегменте $x_1 \leq x \leq x_2$. Заметим еще, что если корень — двойной, то в нем не только $\Phi(x)$, но и $\Phi'(x)$ обращается в нуль.

Рассмотрим случай простых корней.

Пусть сначала dx/dt — положительная величина. Точка движется в сторону возрастающих x . При $x = x_2$ она имеет скорость нуль. Достигает ли она положения $x = x_2$ за конечное или за бесконечное время? Оказывается, что если корень $x = x_2$ — простой, то она достигает положения $x = x_2$ за конечное время.

Это следует из известной теоремы, согласно которой при $f(b) = \infty$ интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

конечен, если в окрестности точки b

$$|(b - x)^p f(x)| < C,$$

причем $p < 1$; в нашем случае простого корня это неравенство выполняется при $p = 1/2$. Оказывается далее, что если корень $x = x_2$ — кратный, то положение $x = x_2$ достигается за бесконечное время. Мы имеем дело в последнем случае с *асимптотическим* движением: точка асимптотически приближается к положению $x = x_2$.

Различный характер движения в случае простого и кратного корня поясняет следующий простой пример.

Пусть

$$\Phi(x) = (a - x)^2$$

($x = a$ — двукратный корень). Здесь интеграл

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}} = \int_0^a \frac{dx}{a - x}$$

логарифмически обращается в бесконечность. Пусть теперь

$$\Phi(x) = a - x$$

($x = a$ — простой корень). Тогда интеграл

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}}$$

конечен.

Если $dx/dt < 0$ и происходит движение в обратную сторону, то можно высказать аналогичные утверждения.

Пусть корни $x = x_1$ и $x = x_2$ — простые. Точка достигает положения $x = x_2$ за конечное время. Что произойдет в точке $x = x_2$? Скорость здесь равна нулю. Найдём ускорение:

$$f(x) = -F'(x) = \Phi'(x).$$

Но в случае простого корня

$$\Phi(x) = (x_2 - x)\Psi(x),$$

где $\Psi(x_2) > 0$ и, следовательно,

$$f(x_2) = \Phi'(x_2) = -\Psi(x_2) < 0.$$

Таким образом, ускорение в положении $x = x_2$ отрицательно, а значит, по достижении положения $x = x_2$ возникает движение в обратном направлении. Материальная точка пробегает затем все положения со скоростью, совпадающей с прежней по абсолютной величине, но с обратным знаком. Легко видеть, что движение при этом *периодическое*.

Итак, мы получили следующий замечательный результат. Если $\Phi(x)$ не имеет корня, то движение непременно происходит в одном направлении. Если имеется два корня и оба — простые, то получается периодическое (либрационное) движение. Если хотя бы один из корней двойной, то получится асимптотическое (лимитационное) движение.

В случае либрационного движения для периода τ имеем, очевидно, выражение

$$\tau = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}.$$

Мы приобрели большие знания путем простого исследования уравнения (4).

Применим теперь полученные общие результаты к линейному осциллятору и к маятнику.

В случае линейного осциллятора

$$F(x) = \frac{kx^2}{2}$$

и $\Phi(x)$ имеет при всяком $W > 0$ два простых корня:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{2W}{k}}, \quad x_2 = +\sqrt{\frac{2W}{k}}.$$

Движение — периодическое, между $x = x_1$ и $x = x_2$.

Совершенно другая картина получается для маятника. Возьмем математический маятник. Для него

$$F(\varphi) = mgl(1 - \cos \varphi) = 2mgl \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \Phi(\varphi) = W - 2mgl \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Будем различать три случая.

1. Пусть

$$W < 2mgl.$$

Тогда $\Phi(\varphi)$ имеет корни $\pm \varphi_1$, где $0 < \varphi_1 < \pi$. Оба корня — простые, так как $\Phi'(\varphi_1) \neq 0$. Следовательно, имеет место периодическое движение, причем период его зависит от амплитуды. Если φ_1 не очень велико, имеем приближенно, обозначив через φ_0 , максимальное отклонение

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}\right)}.$$

Период колебаний консервативной системы, вообще говоря, зависит от амплитуды.

2. Пусть

$$W = 2mgl.$$

Функция $\Phi(\varphi)$ имеет теперь корни

$$\varphi_{1,2} = \pm \pi.$$

Эти корни — кратные, и, следовательно, будет лимитационное движение: маятник подходит к верхнему положению асимптотически, никогда его не достигая.

3. Пусть, наконец,

$$W > 2mgl.$$

Тогда уравнение $\Phi(\varphi)=0$ не имеет действительного корня. Движение происходит все время в одном и том же направлении: маятник совершает вращательное движение.

Здесь, для консервативной системы, с помощью уравнения (4) мы легко получили всю картину движений. В случае неконсервативных систем такой анализ невозможен. Качественное исследование их движений должно исходить непосредственно из дифференциального уравнения. Разнообразие возможных движений оказывается там гораздо больше. При этом ряд теорем о качественном характере движений проще всего излагается на геометрическом языке.

ВОСЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(3/XI 1930 г.)

Иллюстрации к качественной теории Вейерштрасса. Наглядное представление и математическая теория. Представление движения на фазовой плоскости. Особые точки и замкнутые интегральные кривые нелинейного дифференциального уравнения.

Сначала несколько замечаний, относящихся к предыдущей лекции.

Мы поставили вопрос математически и решили его так, как это впервые сделал Вейерштрасс. Мы имели закон сохранения энергии

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 + F(x) = W. \quad (1)$$

Это было наше уравнение движения. Для упрощения выкладок мы положили $m=2$ (иначе говоря, ввели соответствующие единицы); тогда для скорости $\dot{x}$ находим:

$$\dot{x} = \sqrt{W - F(x)}.$$

В каждой точке пути материальная точка имеет потенциальную энергию $F(x)$. Мы обозначили разность $W - F(x)$ через $\Phi(x)$. Заметим, что $\Phi(x)$ есть простое обозначение кинетической энергии, выраженной как функция смещения.

Тогда уравнение $\Phi(\varphi)=0$ не имеет действительного корня. Движение происходит все время в одном и том же направлении: маятник совершает вращательное движение.

Здесь, для консервативной системы, с помощью уравнения (4) мы легко получили всю картину движений. В случае неконсервативных систем такой анализ невозможен. Качественное исследование их движений должно исходить непосредственно из дифференциального уравнения. Разнообразие возможных движений оказывается там гораздо больше. При этом ряд теорем о качественном характере движений проще всего излагается на геометрическом языке.

ВОСЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(3/XI 1930 г.)

Иллюстрации к качественной теории Вейерштрасса. Наглядное представление и математическая теория. Представление движения на фазовой плоскости. Особые точки и замкнутые интегральные кривые нелинейного дифференциального уравнения.

Сначала несколько замечаний, относящихся к предыдущей лекции.

Мы поставили вопрос математически и решили его так, как это впервые сделал Вейерштрасс. Мы имели закон сохранения энергии

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 + F(x) = W. \quad (1)$$

Это было наше уравнение движения. Для упрощения выкладок мы положили $m=2$ (иначе говоря, ввели соответствующие единицы); тогда для скорости $\dot{x}$ находим:

$$\dot{x} = \sqrt{W - F(x)}.$$

В каждой точке пути материальная точка имеет потенциальную энергию $F(x)$. Мы обозначили разность $W - F(x)$ через $\Phi(x)$. Заметим, что $\Phi(x)$ есть простое обозначение кинетической энергии, выраженной как функция смещения.

В каждой точке частица имеет определенную кинетическую и потенциальную энергию. Мы можем теперь уяснить себе почти без математики, как будет двигаться частица.

Пусть материальная точка движется в поле тяжести по желобку определенной формы. В каждом положении точка имеет определенную потенциальную энергию $U = mgy(x) = F(x)$. Давая желобку подходящую форму, мы получим любую зависимость $F(x)$ потенциальной энергии от положения. Изобразим, например (рис. 24, а), желобок, соответствующий постоянной силе, т. е. потенциальной энергии, пропорциональной расстоянию. Изобразим далее (рис. 24, б)

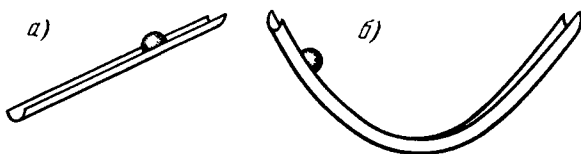


Рис. 24.

желобок, соответствующий квазиупругой силе, т. е. потенциальной энергии, пропорциональной квадрату расстояния.

Без всякой математики легко видеть, как точка будет двигаться по желобку: она будет подниматься до тех пор, пока кинетическая энергия не обратится в нуль; тогда точка остановится.

Кинетическая энергия обращается в нуль тогда, когда потенциальная энергия равна полной энергии. Это происходит при x таком, что $F(x) = W$ (это „условие остановки“ мы уже получили аналитически). Затем точка повернет обратно. Что будет, если функция $W - F(x)$ не имеет корней, т. е. если во всех положениях частицы $F(x)$ меньше, чем W ? Если кинетическая энергия настолько велика (рис. 25), что W больше максимума $F(x)$, то материальная точка перескочит через барьер и будет двигаться дальше. Если кинетическая энергия как раз такая, что в максимуме $F(x)$ имеем $F(x) = W$, то точка дойдет до максимума потенциальной энергии и там остановится. В максимуме первая производная $F'(x)$ равняется нулю. Следовательно, в этой точке и сила равняется нулю, так как

$$F'(x) = -f(x).$$

В такой простой картине все следует из наглядности. Зачем же мы проделали в прошлый раз ряд математических выводов? Дело в том, что „житейские“ разговоры, в сущности, грешат в одном

месте. Пусть кинетическая энергия точки меньше максимальной потенциальной. Мы знаем, что в таком случае точка должна остановиться. Но уверены ли мы, что она дойдет до точки остановки за конечное время? Ведь только при этом условии можно говорить о периодическом движении с конечным периодом. А что будет в случае лимитационного движения? Может быть, и в этом случае частица доходит до крайнего положения за конечное время? Здесь наглядные рассуждения ничего не дают, а необходимо математическое исследование. Без него вы не получите серьезного ответа. Начинаящему очень часто кажется: к чему вся эта математика? Ему кажется, что „и так все ясно“. Но в действительности какой-нибудь существенный пункт при этом может остаться неясным. Иметь меру требуемой математической строгости — самое трудное для физика. Правильнее будет сказать так: ему необходимо уметь определять эту меру.

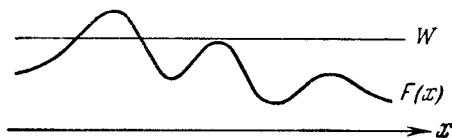


Рис. 25.

Изучая поведение консервативной системы с одной степенью свободы, мы исходили из общих законов движения. Закон сохранения энергии дает:

$$\frac{m \dot{x}^2}{2} + F(x) = W.$$

Продифференцировав это уравнение, имеем:

$$\dot{x}[m\ddot{x} - f(x)] = 0,$$

так как $f(x) = -F'(x)$ или $F(x) = -\int f(x) dx$. Из уравнения, полученного в результате дифференцирования, следует, что

$$m\ddot{x} = f(x).$$

Это — выражение закона Ньютона. Если f зависит только от x , то, зная $f(x)$, можно найти $F(x)$. Это равнозначные выражения. Существенно, что здесь сила зависит только от положения (бывают случаи, когда сила зависит не только от положения).

Если тело падает под действием земного притяжения, его потенциальная энергия есть

$$U = mgx.$$

Отсюда для силы получаем:

$$f = -\frac{dU}{dx} = -mg.$$

Пусть это же тело падает в вязкой жидкости. Здесь возникает трение и закон падения будет другим. Если остановить тело, то силы трения нет. Сила трения не определена тем, в каком месте находится тело. Мы получим хорошее приближенное выражение для силы трения, предполагая, что она прямо пропорциональна скорости и действует навстречу скорости. Тогда

$$f = -mg - k\dot{x},$$

и дифференциальное уравнение движения таково:

$$m\ddot{x} = -mg - k\dot{x}. \quad (2)$$

Теперь сила f — функция не только от x , но и от $\dot{x}$. Уравнение (2) следует из второго закона Ньютона, но перейти от него к такому уравнению, которое было бы аналогично закону сохранения энергии в форме (1), простым образом невозможно (невозможно потому, что в выражение силы вошла производная $\dot{x}$). Здесь нет закона сохранения энергии в механическом смысле. Здесь развивается теплота и постоянной остается сумма внутренней энергии системы и развиваемой теплоты, которая в механические уравнения никак не входит.

Анализ, который был нами проведен, годится для случая, когда сила не зависит от скорости, но он ничего не может дать для общего случая. В этом общем случае можно, однако, пользоваться другим методом исследования, к которому мы теперь и перейдем. Он применим как к консервативным, так и к неконсервативным системам. Этот метод носит геометрический характер. Он связан с тем языком, на котором говорят все те, кто занимается квантами. Вся их терминология основана на этом методе. В более сложных случаях этот метод — единственный, и с ним нужно хорошо освоиться. Для нелинейных колебательных проблем беспроводной телеграфии этот метод, в сущности, был введен А. А. Андроновым.

Математическая постановка задачи такова. Дано нелинейное уравнение вида

$$m\ddot{x} = f(x, \dot{x}). \quad (3)$$

Вообще говоря, такое уравнение нельзя проинтегрировать. Как же подойти к исследованию движения? Как „выудить“ из уравнения,

какими свойствами обладают движения описываемой им системы?

Нас интересуют смещение x и скорость $\dot{x}$. Нельзя ли изучить зависимость между x и $\dot{x}$? Мы можем написать:

$$y = \dot{x}.$$

Каждому значению x соответствует определенное значение $y = y(x)$, т. е. скорость есть функция координаты. Поставим вопрос так: какую скорость имеет точка в данном положении? Ответить на него вовсе не легко даже в случае консервативной системы.

Итак, мы хотим найти вид функции $y(x)$.

Принято, вместо скорости $y = \dot{x}$, вводить в рассмотрение количество движения или импульс $y = m\dot{x}$. Последующее изложение при этом значительно упростится. Так делается в аналитической механике и в теории квантов. В сложных случаях это существенно; но пока речь идет об одной степени свободы, это не имеет большого значения.

Напишем:

$$y = y(x) = m\dot{x},$$

откуда

$$m\ddot{x} = y'(x)\dot{x} = \frac{yy'}{m}. \quad (4)$$

Подставляя (3) в (4), находим:

$$yy' = mf\left(x, \frac{y}{m}\right).$$

Мы получили, таким образом, дифференциальное уравнение для y как функции от x . Первоначальное уравнение движения было второго порядка (в него входила вторая производная от x по t), но y , выраженное как функция от x , удовлетворяет уравнению *первого* порядка. Это существенно: между первым и вторым порядком в случае нелинейного уравнения имеется громадная разница. Всегда ли можно понизить порядок? Если бы в выражение для силы входили не только x и y , но еще явным образом время t , то этого нельзя было бы сделать: в правой части осталось бы t . Употребленный нами прием помогает только тогда, когда t в выражение для силы не входит.

Можно ли *физически* выделить системы, у которых сила не зависит явно от времени? Явная зависимость силы от времени означает, что есть постороннее влияние на систему. Если система

замкнута, то такой зависимости не будет. Системы, где сила явно не зависит от времени, мы называем *автономными*. Вся область генерации колебаний в радиотехнике (кроме вопросов модуляции) приводит к рассмотрению именно автономных систем.

Мы свели задачу на исследование уравнения первого порядка. Зная y как функцию от x , уже нетрудно получить зависимость смещения x от t .

Итак, перед нами математическая задача — исследовать уравнение

$$yy' = f(x, y) \quad (5)$$

(для простоты мы положили $m=1$). Вообще говоря, решить такое уравнение мы не умеем. Мы можем провести только качественное исследование. В общем случае — это единственный путь. Для консервативной нелинейной системы этот путь неизменно приводит к цели. Вообще говоря, это вещи очень сложные, они требуют большого математического аппарата.

Вы знаете, что называется решением дифференциального уравнения. Функция

$$y = \varphi(x)$$

есть решение дифференциального уравнения (или удовлетворяет дифференциальному уравнению), если ее подстановка в дифференциальное уравнение превращает его в тождество. Возьмем плоскость x, y . Если $y = \varphi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению, то кривая, изображающая эту функцию, есть *интегральная кривая*.

Мы имеем одно уравнение первого порядка. Его общее решение зависит от одной произвольной постоянной, а значит, имеются различные интегральные кривые, соответствующие различным значениям этой произвольной постоянной, т. е. целое *семейство* интегральных кривых. Мы можем поэтому потребовать от функции $\varphi(x)$, чтобы она удовлетворяла не только дифференциальному уравнению, но еще и некоторому дополнительному условию. Потребуем, чтобы при $x = x_0$ было $y = y_0$. Здесь x_0 и y_0 — любые заданные величины. Нельзя заранее утверждать, что всегда существует такая функция, но можно указать достаточное условие того, что существует одна и только одна функция, удовлетворяющая поставленному требованию. На нашем геометрическом языке это требование означает, что интегральная кривая должна про-

ходить через точку (x_0, y_0) . Упомянутое выше достаточное условие таково: если в данной точке

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{f(x, y)}{y} \right] \right|_{x_0, y_0} < M, \quad (6)$$

где M — некоторое положительное число, то через эту точку проходит одна и только одна интегральная кривая. Таким образом, если в точке (x_0, y_0) производная $\partial[f/y]/\partial y$ конечна, то через точку (x_0, y_0) проходит интегральная кривая, и притом только одна. Если же мы случайно попали в точку, где условие (6) не удовлетворяется, то мы имеем дело с сомнительным случаем — сомнительным потому, что высказанное условие — достаточное, но не необходимое. Точки, для которых несправедливо утверждение, что через них проходит одна и только одна интегральная кривая, называются *особыми точками* дифференциального уравнения. Оказывается, что они имеют огромное значение в теории дифференциальных уравнений. Теория колебаний ими очень интересуется.

Возьмем немного более общий случай, чем (5), а именно уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad (7)$$

[в случае (5) $Q(x, y) = y$]. Производная dy/dx всюду конечна, кроме точки $Q = 0$. Если в точке $x = x_0, y = y_0$ имеем $P(x, y) = 0, Q(x, y) = 0$, то точка является особой. Через всякую простую точку проходит одна и только одна интегральная кривая. Через особые точки проходит несколько интегральных кривых или же не проходит ни одной.

Рассмотрим несколько примеров.

Первый пример.

$$\frac{dy}{dx} = -a^2 \frac{x}{y}.$$

Это уравнение легко интегрируется:

$$y^2 + a^2 x^2 = \text{const.}$$

Мы получаем семейство кривых, потому что константа может быть любая. Это — семейство эллипсов, причем через каждую точку проходит один эллипс (рис. 26). Подставляя в левую часть координаты точки, мы находим значение константы. Но зададим

начальное условие $x=0, y=0$. Тогда константа равна нулю, и мы имеем

$$y^2 + a^2 x^2 = 0.$$

Это не есть уравнение действительной кривой. Точка $x=0, y=0$ есть особая точка: через нее не проходит ни одна интегральная кривая.

Второй пример.

$$\frac{dy}{dx} = a^2 \frac{x}{y}.$$

Здесь, интегрируя, мы получаем:

$$y^2 - a^2 x^2 = \text{const.}$$

Это — семейство гипербол с общими асимптотами (рис. 27). Через особую точку $x=0, y=0$ проходят две интегральные кривые, а именно асимптоты.

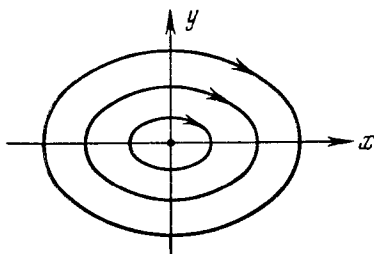


Рис. 26.

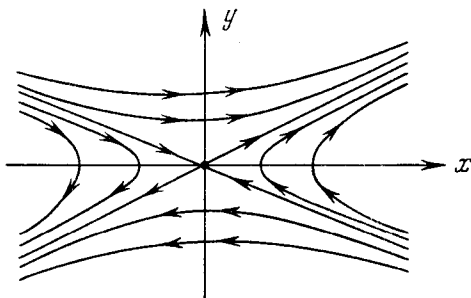


Рис. 27.

Мы получили уже два типа особых точек. В первом примере мы имели дело с *центром*, во втором особая точка называется *седлом* (col — впадина горы).

Вернемся снова к консервативной системе, для которой

$$yy' = f(x).$$

Особая точка

$$f(x) = 0, y = 0$$

либо седло, либо центр. Для того, чтобы узнать характер особой точки, разложим около нее $f(x)$ в ряд. Пусть в особой точке $f(x) = 0$. Тогда

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Если первый коэффициент отрицателен, то особая точка — центр, если положителен — седло.

Каков физический смысл особой точки? В ней $y=0$, т. е. скорость равна нулю, и $f(x)=0$, т. е. сила равна нулю.

Таким образом, особая точка изображает *состояние равновесия*. Потенциальная энергия системы имеет в особой точке экстремальное значение (максимум или минимум). Смотря по тому, будет ли a_1 положительным или отрицательным, будет максимум или минимум потенциальной энергии. Случай $a_1 > 0$ (седло) соответствует неустойчивому, $a_1 < 0$ (центр) — устойчивому равновесию. Если система консервативна, то могут быть только эти два типа особых точек. В неконсервативных системах возможны еще и другие.

В самом общем случае (7) особыми точками являются точки пересечения кривых $P(x, y)=0$, $Q(x, y)=0$. Каждой особой точке соответствует положение равновесия системы.

Представим себе теперь, что мы начертили интегральные кривые и нашли, что среди них есть замкнутые кривые. Замкнутая кривая есть изображение периодического явления. Доказать это очень просто. Пусть для $t=0$ имеем $x=x_0$, $y=y_0$. Если частица возвращается через некоторое время в положение $x=x_0$ и снова получает скорость $y=y_0$, то дальнейшее течение процесса идентично повторяется.

В этом рассуждении мы считали, что время возвращения τ в исходное состояние конечно. Может ли это время быть бесконечным? Нужно ввести одно новое понятие, и тогда станет очевидным, что этого не может быть. y есть скорость движения материальной точки. Совсем другое — скорость движения *изображающей* точки (x, y) вдоль интегральной кривой на фазовой плоскости — плоскости (x, y) . Для этой фазовой (или диаграммной) скорости в случае уравнения (3) имеем:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{y^2 + f^2(x, y)}.$$

Скорость ds/dt равна нулю, только если одновременно и $f(x, y)=0$ и $y=0$. Длина нашей замкнутой кривой конечна. Поэтому, если на этой кривой нет особой точки, период будет конечным.

Если удастся доказать, что среди интегральных кривых есть замкнутые кривые, то тем самым доказано, что возможны периодические движения. Для отыскания периодических решений дифференциального уравнения надо „ловить“ такие замкнутые кривые.

Если найдены особые точки и замкнутые интегральные кривые дифференциального уравнения, то найдены положения равновесия и периодические движения системы.

Интересно реальное осуществление фазовых диаграмм. Представьте себе катодный осциллограф. Пусть отклонение пучка в одном направлении будет пропорционально току (x), а в другом, перпендикулярном — напряжению ($y = \dot{x}$). Движение пятнышка представит тогда движение изображающей точки на фазовой плоскости. Можно, таким образом, на опыте начертить интегральные кривые.

ДЕВЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(15/XI 1930 г.)

Изображение движения на фазовой плоскости (продолжение). Особые точки и замкнутые кривые. Фазовая картина некоторых консервативных систем.

Теорема вириала и ее применение к кинетической теории газов.

Мы рассматривали в прошлый раз систему, описываемую уравнением вида

$$m\ddot{x} = f_1(x). \quad (1)$$

Отсюда, интегрируя, получаем:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + F(x) = W, \quad (2)$$

причем

$$f_1(x) = -F'(x).$$

Удобно рассматривать, вместо скорости $\dot{x}$, величину

$$m\dot{x} = y, \quad (3)$$

называемую импульсом или иногда — моментом. При этом уравнение (1) принимает вид

$$\dot{y} = f_1(x). \quad (4)$$

Для случая поступательного движения точки или вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси скорость и им-

Если найдены особые точки и замкнутые интегральные кривые дифференциального уравнения, то найдены положения равновесия и периодические движения системы.

Интересно реальное осуществление фазовых диаграмм. Представьте себе катодный осциллограф. Пусть отклонение пучка в одном направлении будет пропорционально току (x), а в другом, перпендикулярном — напряжению ($y = \dot{x}$). Движение пятнышка представит тогда движение изображающей точки на фазовой плоскости. Можно, таким образом, на опыте начертить интегральные кривые.

ДЕВЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(15/XI 1930 г.)

Изображение движения на фазовой плоскости (продолжение). Особые точки и замкнутые кривые. Фазовая картина некоторых консервативных систем.

Теорема вириала и ее применение к кинетической теории газов.

Мы рассматривали в прошлый раз систему, описываемую уравнением вида

$$m\ddot{x} = f_1(x). \quad (1)$$

Отсюда, интегрируя, получаем:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + F(x) = W, \quad (2)$$

причем

$$f_1(x) = -F'(x).$$

Удобно рассматривать, вместо скорости $\dot{x}$, величину

$$m\dot{x} = y, \quad (3)$$

называемую импульсом или иногда — моментом. При этом уравнение (1) принимает вид

$$\dot{y} = f_1(x). \quad (4)$$

Для случая поступательного движения точки или вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси скорость и им-

пульс очень просто связаны между собой. В общем случае связь более сложная, но она всегда определяется условием

$$y = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}},$$

где T — кинетическая энергия. Разделив уравнение (4) на (3), получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y}, \quad (5)$$

где $f(x) = mf_1(x)$.

Мы исследовали движение, исходя из этого дифференциального уравнения. Можно было бы поступить иначе — интегрировать соотношение (2). В простейших случаях можно при исследовании движения исходить из получающихся таким образом квадратур. Но для неконсервативных систем единственный путь — исследование интегральных кривых на фазовой плоскости.

Вообще говоря, через любую точку плоскости x, y проходит только одна интегральная кривая уравнения (5), но есть точки — они называются особыми, через которые проходит либо несколько интегральных кривых, либо ни одной. Для особых точек, в которых $f(x) = 0$ и $y = 0$, теорема Коши несправедлива.

Уравнение (5), относящееся к консервативной системе, может иметь два типа особых точек:

- 1) через которые не проходит *ни одна* интегральная кривая;
- 2) через которые проходят *две* интегральные кривые.

Точки первого типа называются центрами (centre), точки второго типа — седлами (col). Особые точки физически соответствуют состояниям равновесия. Таким образом, здесь может быть два рода состояний равновесия. Центры являются устойчивыми, седла — неустойчивыми состояниями равновесия, и, следовательно, характер особых точек служит критерием устойчивости.

Выясним, в каком направлении движется изображающая точка на фазовой плоскости. Если скорость, а следовательно, и y положительны, то x увеличивается, т. е. в верхней части фазовой плоскости изображающая точка движется так, что абсцисса увеличивается; если же скорость и y отрицательны (нижняя часть плоскости), то x уменьшается. Таким образом, движение происходит по часовой стрелке.

Как уже было сказано, особые точки соответствуют положениям равновесия. Замкнутые кривые на фазовой плоскости — это

периодические движения. Мы имеем на фазовой плоскости полную картину движения систем.

Я не буду останавливаться на общей качественной теории уравнений типа (5), а укажу лишь некоторые результаты.

Внутри замкнутой кривой всегда есть по крайней мере одна особая точка. Таким образом, колебания возникают только вокруг положения равновесия. Если внутри замкнутой кривой имеется одна особая точка, то это может быть только центр. Внутри замкнутой траектории могут находиться также одно седло и два центра или два седла и три центра. Вообще внутри замкнутой траектории возможно нечетное число особых точек и всегда число центров на единицу больше числа седел. Таким образом, возможны колебания вокруг нескольких положений равновесия, среди которых должны быть и неустойчивые. Все это справедливо для сколь угодно сложных консервативных систем.

Что получится, если особая точка расположена на замкнутой интегральной кривой? Около этой точки движение становится бесконечно медленным, и, следовательно, в этом случае нет периодического движения. Подходя к такой особой точке, изображающая точка останавливается, „застревает“, так как в особой точке сила и скорость равны нулю, а движение описывается дифференциальным уравнением второго порядка.

Разберем несколько простых примеров.

Начнем с гармонического движения. В этом случае уравнение (2) принимает вид

$$\frac{y^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = W.$$

Начало координат — особая точка; других особых точек нет. Существуют только периодические движения (рис. 26).

Рассмотрим, как ведет себя маятник с *не малой* амплитудой?

В этом случае $F(\varphi) = 2mgl \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ и

$$\frac{y^2}{2m} + 2mgl \sin^2 \frac{\varphi}{2} = W.$$

Интегральные кривые (рис. 28) показывают сразу всю картину движений маятника. Точки, через которые проходят две интегральные кривые, — это седла. Кривые нарисованы для ряда значений W . При $W=0$ получается центр. Потом идут замкнутые кривые, — при малой общей энергии получаются периодические решения. При

очень малой энергии — это почти эллипсы. Зададим такую энергию, при которой интегральная кривая проходит через точку неустойчивого равновесия — седло. Маятник стремится в это состояние в течение бесконечного времени. Он к нему приближается, но не доходит до него. Из нашей картины сразу видно, что, если мы сообщим маятнику еще большую энергию, периодичности уже не будет, маятник будет вращаться. Ход волнистой кривой показывает при этом, что возле центра маятник движется с наибольшей скоростью.

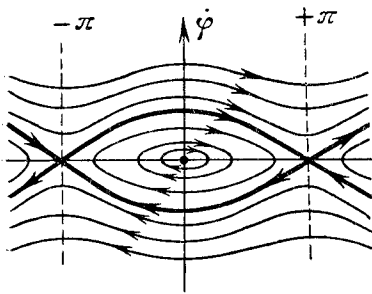


Рис. 28.

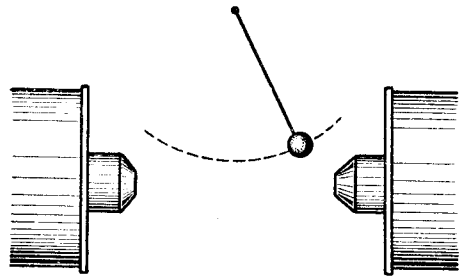


Рис. 29

Третий пример — железный маятник, помещенный между полюсами электромагнита (рис. 29). Устойчивое положение равновесия расщепляется на два таких положения, разделенных седлом. Внутри больших замкнутых кривых — два центра и одно неустойчивое положение равновесия. Картина на фазовой плоскости (рис. 30) сразу дает представление о всех возможных движениях.

Во всех случаях, когда существуют замкнутые кривые, изображающие периодические движения, они симметричны по отношению к оси абсцисс, так как скорость всегда имеет двойной знак:

$$y = \pm \sqrt{W - F(x)}.$$

Рассмотрим площадь эллипса (рис. 31), изображающего периодическое движение:

$$S = 2 \int_{x_1}^{x_2} y \, dx.$$

Вместо x и dx введем время:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{m}, \quad dx = \frac{y}{m} dt,$$

так что

$$S = 2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{y^2}{m} dt.$$

Промежуток времени от t_1 до t_2 составляет половину периода τ . Под знаком интеграла стоит удвоенная кинетическая энергия T .

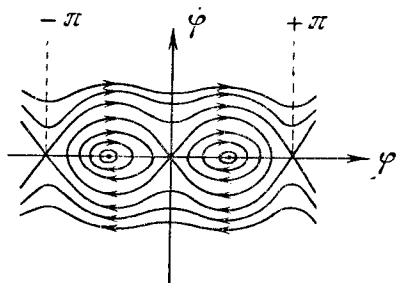


Рис. 30.

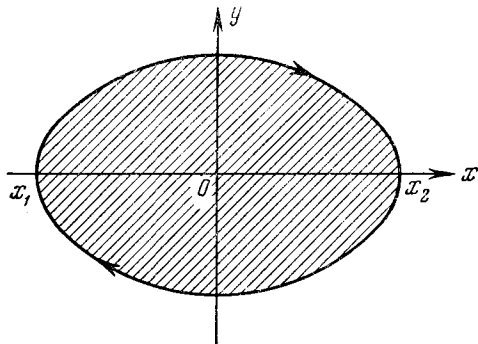


Рис. 31.

Таким образом,

$$S = 2 \int_{t_1}^{t_1 + \frac{\tau}{2}} 2T dt = \tau \cdot \frac{1}{\tau/2} \int_{t_1}^{t_1 + \frac{\tau}{2}} 2T dt,$$

или

$$S = \tau \cdot 2\bar{T}.$$

Замкнутая кривая ограничивает площадь, равную удвоенной средней кинетической энергии, умноженной на период. Вводя частоту $\nu = 1/\tau$, мы можем написать:

$$S = 2\bar{T}/\nu. \quad (6)$$

В квантовой теории это соотношение играет важную роль.

Вся ценность формулы (6) в том, что она справедлива в самом общем случае движения консервативной системы.

Возьмем частный случай гармонического осциллятора. Здесь соотношение (6) можно вывести еще иначе. Интегральная кривая — эллипс. Длины a и b его полуосей определяются соотношениями:

$$2mW = a^2, \quad \frac{2W}{k} = b^2.$$

Площадь эллипса есть

$$S = \pi ab = 2\pi W \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Но

$$2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \tau,$$

откуда

$$S = W/\nu. \quad (7)$$

Таким образом, в случае гармонического колебания площадь, охватываемая интегральной кривой, равна отношению *полной* энергии к частоте.

Но для гармонического колебания имеем:

$$\bar{T} = \bar{U},$$

а так как

$$\bar{T} + \bar{U} = \bar{W} = W,$$

получаем

$$\bar{T} = \bar{U} = \frac{W}{2}, \quad (8)$$

— полная энергия равна удвоенной средней кинетической энергии. Подставляя (8) в (7), мы приходим к соотношению (6). Запомним это общее соотношение и то, что в частном случае гармонических колебаний $\bar{T} = W/2$.

Существует ли какое-нибудь соотношение между средней кинетической и средней потенциальной энергией в общем случае? В механике для решения таких вопросов очень важную роль играет так называемая теорема вириала, которую мы сейчас докажем.

Будем исходить из самой простой, ньютоновой формы уравнений движения. Трем координатам i -той точки соответствуют три дифференциальных уравнения движения:

$$m_i \ddot{x}_i = X_i, \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i, \quad m_i \ddot{z}_i = Z_i.$$

Хотя в механике это не принято, мы будем писать все уравнения в таком виде:

$$m_i \ddot{x}_i = X_i, \quad (9)$$

т. е. будем нумеровать подряд все координаты: $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, \dots$ и обозначать их одной буквой x . При этом

$$m_1 = m_2 = m_3, \quad m_4 = m_5 = m_6, \dots$$

(каждая тройка относится к одной и той же материальной точке).

Умножив уравнение (9) на x_i , получаем:

$$m_i \ddot{x}_i x_i = X_i x_i,$$

или

$$\frac{d}{dt}(m_i x_i \dot{x}_i) - m_i \dot{x}_i^2 = X_i x_i.$$

Умножим теперь обе части равенства на dt , просуммируем по всем i , проинтегрируем между двумя какими угодно пределами $t, t + \tau$ и разделим на τ :

$$\frac{1}{\tau} \sum m_i x_i \dot{x}_i \Big|_t^{t+\tau} - \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \sum m_i \dot{x}_i^2 dt = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \sum X_i x_i dt. \quad (10)$$

Рассмотрим случай периодического движения. Пусть τ — период. Тогда

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i x_i \dot{x}_i \Big|_t^{t+\tau} = 0$$

и соотношение (10) принимает вид

$$2\bar{T} + V = 0, \quad (11)$$

где

$$\bar{T} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \sum \frac{m \dot{x}_i^2}{2} dt$$

есть среднее значение за период полной кинетической энергии

системы $T = \sum_{i=1}^{3n} \frac{m \dot{x}_i^2}{2}$, а

$$V = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \sum X_i x_i dt \quad (12)$$

есть среднее значение за период от суммы

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i x_i.$$

Выражение (12) Клаузиус назвал *вириалом* данной системы сил.

Пусть теперь движение не периодическое, но такое, что ни скорость, ни координаты не обращаются в бесконечность (*финитное* движение). При этом

$$\sum_{i=1}^{3n} |m_i x_i \dot{x}_i| < M, \quad (13)$$

где M — некоторое положительное число.

Возьмем τ очень большим. При достаточно большом τ в силу (13) левая часть (10) с каким угодно приближением равна нулю. При этом и для непериодического движения с любым приближением справедливо соотношение (11). Оно выражает теорему Клаузиуса о вириале.

Теорема вириала получила большое применение в кинетической теории газов. Частный пример позволит нам сделать несколько существенных дополнительных замечаний.

Рассмотрим достаточно разреженный газ. Он подчиняется уравнению состояния

$$pV = R\theta, \quad (14)$$

причем R пропорционально массе газа. Удобно брать 1 моль газа (число граммов, равное молекулярному весу). Тогда R — одно и то же для любого газа.

Построим самую грубую механическую картину. Будем считать, что молекулы — просто шары (это соответствует одноатомному газу). Их удары о стенки обуславливают давление. Каково соотношение между давлением и средней кинетической энергией молекул? (Для механической модели понятие температуры — совершенно чуждая вещь; мы же решаем механический вопрос.)

Пусть $\overline{u^2}$ — средний квадрат скорости одной молекулы. Тогда, по теореме вириала

$$2\overline{T} = Nm\overline{u^2} = -V.$$

Представим X_i как сумму внешних и внутренних сил:

$$X_i = X_i^{(e)} + X_i^{(i)}.$$

Общий вириал равен сумме соответствующих внешнего и внутреннего вириалов:

$$V = V^{(e)} + V^{(i)}.$$

Легко вычислить вириал внешних сил. Пусть сосуд представляет собой прямоугольный параллелепипед с ребрами a , b и c . Внешние силы действуют только со стороны стенок сосуда. На трех стенках $x=0$, $y=0$, $z=0$ вириал равен нулю. Строго говоря, это не очевидно, а нуждается в обосновании, так как если удары молекул о стенки — мгновенные, то сила обращается в бесконечность. В действительности, когда молекулы ударяют о стенки, они их слегка продавливают: „для того, чтобы оттолкнуть молекулу,“ стенка немного сдвигается (иначе силы не будет). На очень малом протяжении Δx в течение очень малого промежутка времени Δt сила $X_i^{(e)}$ очень велика. Но можно строго обосновать, что когда жесткость стенок неограниченно растет и $X_i^{(e)} \rightarrow \infty$, то Δx и Δt стремятся к нулю и притом так, что вириал тоже стремится к нулю.

На стенке $x=a$ вириал равен

$$a \sum \overline{X_i^{(e)}} = a(-pbc) = -pabc,$$

где p — давление. Действительно, $-\sum \overline{X_i^{(e)}}$ — это давление, умноженное на площадь стенки, ибо давление газа есть по определению средняя сила на единицу площади ее поверхности (давление на газ положительно, когда оно направлено внутрь).

Очевидно, по трем стенкам $x=a$, $y=b$, $z=c$

$$V^{(e)} = -3pabc = -3pV,$$

где $V=abc$ — объем газа. Следовательно,

$$Nmu^2 = -V^{(e)} + 3pV.$$

Это — основная формула кинетической теории газов.

Если газ очень разрежен, можно считать, что молекулы взаимодействуют только при соприкосновениях. Будем считать, что молекулы чрезвычайно малы. Тогда координаты двух молекул по какой-нибудь оси (назовем их здесь x_1 и x_2) в момент удара можно считать равными. По третьему закону Ньютона, силы взаимодействия $X_1^{(i)}$ и $X_2^{(i)}$, соответствующие координатам x_1 и x_2 , равны по величине и противоположны по направлению:

$$X_1^{(i)} = -X_2^{(i)}.$$

Таким образом, все слагаемые вида $X_1^{(i)}x_1 + X_2^{(i)}x_2$, из которых состоит сумма $\sum X_i^{(i)}x_i$ в выражении внутреннего вириала, равны

нулю, а значит, и сам внутренний вириал равен нулю. Сделанные предположения о взаимодействии молекул означают, что мы ограничиваемся моделью *идеального* газа, но именно для этого случая и справедлив закон Бойля-Мариотта, на основании которого мы написали (14). В результате

$$Nm\overline{u^2} = 3pV. \quad (15)$$

Сопоставляя (14) с (15), мы можем найти кинетическое толкование температуры: средняя кинетическая энергия молекулы есть

$$\frac{m\overline{u^2}}{2} = \frac{3R}{2N} \Theta.$$

Она пропорциональна температуре. Мы можем написать:

$$\frac{m\overline{u^2}}{2} = \frac{3}{2} k \Theta, \quad (16)$$

где

$$k = \frac{R}{N}$$

есть постоянная Больцмана. Соотношение (16) выражает основное положение классической статистической механики: температура есть мера кинетической энергии молекул.

Так как R известно, а N можно определить из опыта, то из опыта можно определить k , а следовательно, и среднюю кинетическую энергию молекулы газа. Мы получаем возможность оценить скорости молекул.

Запомним формулу (16). С ней связаны очень важные вопросы, относящиеся к возникновению квантовой теории. Мы их коснемся потом¹. Но вот на что я хочу указать теперь же. Может показаться, что мы вывели основную формулу (16) кинетической теории газов из законов Ньютона. Но в действительности она из них не следует. Мы молча сделали одно предположение, — предположение о том, что существует определенное, одинаковое давление на все стенки сосуда. Если бы, скажем, скорости всех молекул были параллельны оси x , то не было бы давления на боковые стенки. Понадобилось, таким образом, кроме законов Ньютона, добавочное предположение. Такого рода постулат всегда необходим в кинетической теории газов.

¹ [См. 10-ю лекцию, а также 29-ю и 30-ю.]

Мы применили теорему вириала к идеальному газу. Но она очень хороша и для более сложных систем. Из нее следуют очень разнообразные и интересные вещи.

Рассмотрим общий случай консервативной системы, т. е. системы, в которой существует потенциальная энергия — функция U от координат, такая, что

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

Тогда

$$V = - \sum \frac{\partial U}{\partial x_i} x_i.$$

Пусть потенциальная энергия есть однородная функция n -ой степени. По теореме Эйлера

$$\sum \frac{\partial U}{\partial x_i} x_i = nU,$$

так что

$$V = -n\bar{U}.$$

На основании (11) получается замечательное соотношение

$$2\bar{T} = n\bar{U}. \quad (17)$$

Если потенциальная энергия есть однородная квадратичная функция координат, то $n=2$ и

$$\bar{T} = \bar{U}.$$

Возьмем случай взаимодействия по закону тяготения Ньютона или по закону Кулона. Здесь существует потенциальная энергия

$$U = \text{const} - \lambda \sum_{i \neq k} \frac{1}{2} \frac{m_i m_k}{r_{ik}},$$

где λ — гравитационная постоянная, m_i и m_k — массы материальных точек, r_{ik} — расстояния между ними; или же

$$U = \text{const} + \sum_{i \neq k} \frac{1}{2} \frac{e_i e_k}{r_{ik}},$$

где e_i и e_k — электрические заряды. Положим:

$$\text{const} = 0,$$

т. е. будем считать потенциальную энергию равной нулю тогда, когда взаимодействующие точки находятся на бесконечно большом расстоянии друг от друга. Тогда U есть однородная функция (-1) -ой степени, и согласно (17)

$$2\bar{T} = -\bar{U}. \quad (18)$$

Если все заряды одноименны (имеет место только отталкивание), то

$$U = \sum_{i \neq k} \frac{1}{2} \frac{e_i e_k}{r_{ik}}$$

— положительная величина. Но кинетическая энергия всегда положительна: мы приходим к противоречию с равенством (18). В чем же дело?

Применяя ту или иную теорему, нельзя забывать, при каких предположениях она выведена. При существовании только отталкивания движение заведомо таково, что координаты и скорости не остаются ограниченными. При выводе же теоремы вириала было сделано существенное предположение о финитности движения.

Если есть и положительно и отрицательно заряженные частицы, то для того, чтобы движения были финитными, нужно, грубо говоря, чтобы общий потенциал разноименных зарядов превышал общий потенциал одноименных.

Полная энергия системы

$$W = T + U = \bar{T} + \bar{U}.$$

Если, кроме того, выполняется равенство (18), то

$$W = -\bar{T}. \quad (19)$$

Таким образом, при кеплеровском движении полная энергия всегда отрицательна.

При распылении системы, в которой потенциал разноименных зарядов преобладает над потенциалом одноименных, потенциальная энергия растет. Следовательно, согласно (18) и (19) кинетическая энергия уменьшается, а общая энергия растет. Таким образом, на распыление системы требуется затрата работы извне.

Согласно теории относительности запас энергии системы связан с ее массой M соотношением:

$$M = \frac{W}{c^2}.$$

Если мы распыляем систему с преобладанием потенциала разноименных зарядов, мы всегда увеличиваем ее массу. В распыленном состоянии масса частиц, составляющих атом, обязательно больше, чем масса атома.

ДЕСЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(25/XI 1930 г.)

Применения теоремы вириала (продолжение). Пример Ботуславского. Идеальный газ. Твердое тело. Статистический постулат Больцмана. Вычисление средней энергии осциллятора. Классическая теория теплоемкости твердого тела; ее неудовлетворительность. Равновесное излучение. Вопрос о распределении энергии в его спектре. Классическая теория; ее неудовлетворительность. Статистический постулат Планка; квантование энергии осциллятора.

Мы вывели теорему вириала

$$2\bar{T} = -V, \quad (1)$$

где V — вириал; T — кинетическая энергия системы. В тех случаях, когда потенциальная энергия U есть однородная функция координат, теорема вириала дает интересную зависимость между средней кинетической и средней потенциальной энергией:

$$2\bar{T} = n\bar{U}, \quad (2)$$

где n — степень однородной функции U . С другой стороны, всегда

$$\bar{T} + \bar{U} = W, \quad (3)$$

где W — полная энергия. Следовательно, если потенциальная энергия — однородная функция n -ой степени, то

$$\bar{T} = \frac{n}{n+2} W, \quad \bar{U} = \frac{2}{n+2} W.$$

Согласно теории относительности запас энергии системы связан с ее массой M соотношением:

$$M = \frac{W}{c^2}.$$

Если мы распыляем систему с преобладанием потенциала разноименных зарядов, мы всегда увеличиваем ее массу. В распыленном состоянии масса частиц, составляющих атом, обязательно больше, чем масса атома.

ДЕСЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(25/XI 1930 г.)

Применения теоремы вириала (продолжение). Пример Ботуславского. Идеальный газ. Твердое тело. Статистический постулат Больцмана. Вычисление средней энергии осциллятора. Классическая теория теплоемкости твердого тела; ее неудовлетворительность. Равновесное излучение. Вопрос о распределении энергии в его спектре. Классическая теория; ее неудовлетворительность. Статистический постулат Планка; квантование энергии осциллятора.

Мы вывели теорему вириала

$$2\bar{T} = -V, \quad (1)$$

где V — вириал; T — кинетическая энергия системы. В тех случаях, когда потенциальная энергия U есть однородная функция координат, теорема вириала дает интересную зависимость между средней кинетической и средней потенциальной энергией:

$$2\bar{T} = n\bar{U}, \quad (2)$$

где n — степень однородной функции U . С другой стороны, всегда

$$\bar{T} + \bar{U} = W, \quad (3)$$

где W — полная энергия. Следовательно, если потенциальная энергия — однородная функция n -ой степени, то

$$\bar{T} = \frac{n}{n+2} W, \quad \bar{U} = \frac{2}{n+2} W.$$

Мы рассмотрели следствия из соотношений (1), (2) и (3) для системы частиц, взаимодействующих по законам Ньютона или Кулона. Рассмотрим еще один забавный пример, данный Богуславским¹. Пусть мячик движется в поле силы тяжести, отражаясь от пола по законам упругого удара. Каково здесь соотношение между средней кинетической и средней потенциальной энергией? Силы, создающие вириал, здесь таковы: сила упругости F и сила тяжести. Вириал делится на два слагаемых:

$$V = V_{\text{упр}} + V_{\text{тяж}},$$

причем

$$V_{\text{упр}} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} Fz dt = 0,$$

так как F отлична от нуля только в момент удара, когда $z=0$. С силой тяжести связана потенциальная энергия

$$U = mgz.$$

Это однородная функция первого измерения ($n=1$), и, следовательно, согласно (2)

$$\overline{T} = \frac{1}{2} \overline{U}.$$

Этот пример — не совсем игрушечный. Полученный результат можно распространить на атмосферу: в ней молекулы воздуха движутся под действием силы тяжести и упругих сил, появляющихся при соударениях. Здесь также средняя кинетическая энергия вдвое меньше, чем средняя потенциальная энергия.

Применяя теорему вириала к модели идеального газа без внешних сил (за исключением тех, которые действуют со стороны стенок сосуда), мы пришли в прошлой лекции к соотношению

$$\frac{m \overline{u^2}}{2} = \frac{3}{2} k \Theta,$$

где Θ — абсолютная температура. Так как средний квадрат

¹ [С. А. Богуславский. Основы молекулярной физики и применение статистики к вычислению термодинамических потенциалов, стр. 16. Научные известия, М., 1917.]

скорости молекул u есть сумма средних квадратов ее компонент u_1 , u_2 и u_3 по трем осям координат, получаем:

$$\overline{mu_1^2} + \overline{mu_2^2} + \overline{mu_3^2} = 3k\Theta.$$

Если все направления равноправны, то три средние значения в левой части равны между собой, и, следовательно,

$$\overline{mu_1^2} = \overline{mu_2^2} = \overline{mu_3^2} = k\Theta.$$

Это можно выразить так: молекулы имеют три степени свободы, и кинетическая энергия T_1 , приходящаяся на каждую степень свободы, имеет одно и то же среднее значение:

$$\overline{T_1} = \frac{k}{2} \Theta.$$

Постоянная Больцмана есть

$$k = \frac{R}{N}, \quad (4)$$

где

$$R = 8,31 \cdot 10^7 \text{ эрг/град} \quad (5)$$

(N —число молекул в одном моле). Если известно N , то из (4) можно найти постоянную Больцмана. О том, как находят число N , я сейчас говорить не буду. Измерения дают

$$N = 6,02 \cdot 10^{23}.$$

Из (4) и (5) следует, что

$$k = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/град}.$$

Мы рассматривали газ как совокупность свободно летящих материальных точек. В кинетической теории большое значение имеет также другая модель: линейный осциллятор. Здесь, кроме кинетической энергии, имеется потенциальная энергия вида

$$U = \frac{\gamma x^2}{2},$$

где γ — положительная постоянная.

В истории физики линейный осциллятор сыграл огромную роль. На линейном осцилляторе — маятнике — развивалось понимание

основных законов механики. Лишь после этого смогли перейти к небесной механике. Квантовая физика возникла в связи с вопросом о средней энергии линейного осциллятора. Это была для нее первая пробная задача. Не удивительно поэтому, что мы придаем такое большое значение гармоническому осциллятору.

Механика развивалась на микроскопических телах, включая те, с которыми имеет дело астрономия. После того, как были установлены законы механики, возникла потребность проникнуть с их помощью в строение вещества. Овладев законами механики, стали переносить эти законы на процессы, происходящие в самих телах, с целью объяснить эти процессы. Предполагалось, что атомы подчиняются тем же законам, что и механические системы. При этом было достигнуто много успехов.

Первый успех — объяснение свойств идеального газа. Их объясняли так. Принимали, что молекулы — упругие шары, летящие, как свободные материальные точки и соударяющиеся между собой. С помощью этих ударов старались объяснить все явления в газах: теплопроводность, диффузию, внутреннее трение. Вторая задача, за которую взялись, — свойства твердого тела. Газ стоит на одном полюсе, твердое тело — на другом. Оно имеет определенную форму и строение.

Грубая модель твердого тела такова: каждый атом привязан какими-то силами к определенному положению равновесия. Если немного вывести атом из этого положения, то он ведет себя как осциллятор. Так как возможны все направления смещения в трех измерениях, то каждый атом грубо можно рассматривать как три независимых осциллятора. N атомов образуют $3N$ осцилляторов.

Так хотели понять твердое тело и, в частности, объяснить, как оно ведет себя при нагревании, найти его удельную теплоту — увеличение внутренней энергии при нагревании на 1° . Задача сводится к следующей: как зависит колебательная энергия осцилляторов от температуры?

Мы знаем механические законы движения осцилляторов. Можно ли отсюда получить ответ на поставленный вопрос? Нет, нельзя.

Законы механики недостаточны для ответа на любой вопрос такого рода. Они не дают ответа и на вопрос о том, как вообще движется то или другое тело. Только если задано, где тело находится в какой-нибудь момент времени и какова в этот момент его скорость, — только при этом условии законы механики указывают, что с ним будет в дальнейшем. На основании одних только

уравнений движения механики — без дополнительных данных — нельзя ответить ни на один механический вопрос.

Вернемся к нашим осцилляторам. Механика ничего не говорит о том, с какой энергией они движутся. Для ответа на этот вопрос необходимы еще какие-то данные, еще что-то нужно взять вне механики. Это „что-то“ приходит извне с помощью новой гипотезы. Совокупность из такой гипотезы плюс механика носит название статистической механики. В вопросах статистической механики всегда, кроме механики, есть вещи, взятые вне ее.

Вопрос ставится так: как распределена энергия между отдельными атомами? Существует определенный рецепт, дающий ответ на этот вопрос. Я не могу останавливаться на том, как этот рецепт был получен, но не думайте, что его можно вывести из механики. Это нечто новое. Можно постулировать этот рецепт. Можно сделать другой статистический постулат и из него вывести этот рецепт. Но из механики его вывести нельзя.

В чем же заключается этот рецепт? Статистическая механика утверждает, что при термодинамическом равновесии осцилляторы имеют самые разнообразные значения энергии, причем эти значения распределены по закону Больцмана. Этот закон заключается в следующем. Возьмем на фазовой плоскости осциллятора (x, y) (x — координата; $y = m\dot{x}$ — импульс) площадку $dx dy$. Вероятность dp того, что осциллятор находится на этой площадке, пропорциональная величине площадки, зависит от энергии осциллятора W следующим образом:

$$dp = Ae^{-W/k\Theta} dx dy, \quad (6)$$

причем k — постоянная Больцмана, Θ — абсолютная температура.

Повторяю: из механики этот закон вывести нельзя. Его можно сделать лишь более или менее естественным. Гиббс получил его потом в качестве следствия более общей гипотезы.

Если тело состоит из осцилляторов, то вероятность того, что осциллятор находится в состоянии ($x, x + dx; y, y + dy$) дается формулой (6), причем в данном случае

$$W = \frac{\gamma x^2}{2} + \frac{y^2}{2m}. \quad (7)$$

Наша задача будет заключаться в том, чтобы узнать, чему равняется энергия всего твердого тела. Механика плюс постулат (6) уже достаточны для решения поставленного вопроса.

Вычислим, какова средняя энергия осциллятора $\overline{W}$.

Если какая-нибудь величина имеет с вероятностью p_1 значение a и с вероятностью p_2 значение b , то ее среднее значение (или математическое ожидание) есть

$$\frac{ap_1 + bp_2}{p_1 + p_2},$$

причем $p_1 + p_2 = 1$.

Аналогичным образом

$$\overline{W} = \iint W A e^{-W/k\Theta} dx dy, \quad (8)$$

причем и здесь сумма вероятностей всех состояний также равна единице:

$$A \iint e^{-W/k\Theta} dx dy = 1. \quad (9)$$

Деля (8) на (9), находим:

$$\overline{W} = \frac{\iint W e^{-W/k\Theta} dx dy}{\iint e^{-W/k\Theta} dx dy}. \quad (10)$$

Чтобы найти среднее значение энергии осциллятора, остается только произвести математические операции, указанные в формуле (9).

Введем обозначения:

$$1/k\Theta = \alpha, \quad I = \iint e^{-\alpha W} dx dy. \quad (11)$$

I есть функция параметра α . Мы можем написать вместо (10):

$$\overline{W} = -I'(\alpha)/I(\alpha). \quad (12)$$

Вычислим теперь $I(\alpha)$. Подставляя (7) в (11), получаем:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \left(\frac{y^2}{2m} + \frac{\gamma x^2}{2} \right)} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha y^2}{2m}} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha \gamma x^2}{2}} dx.$$

Но, как известно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dz = \sqrt{\pi},$$

и, следовательно,

$$I(\alpha) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\gamma}} \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\nu \alpha}, \quad (13)$$

где ν — частота осциллятора.

Подставляя (13) в (12), получаем:

$$\overline{W} = \frac{1}{\alpha} = k \Theta.$$

Наш постулат приводит к выводу, что при равновесии средняя энергия осциллятора равна $k \Theta$. В свое время этот результат сыграл громадную роль.

В газе средняя кинетическая энергия поступательного движения на одну степень свободы равна $k \Theta/2$. Средняя кинетическая энергия осциллятора равна (при одной и той же температуре) средней кинетической энергии поступательного движения молекулы газа. Это получается независимо от того, каков период осциллятора. Поэтому здесь говорят о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы. Один из основных законов классической статистической механики заключается в том, что в любой системе, находящейся в равновесном состоянии, средняя кинетическая энергия на любую степень свободы равняется $k \Theta/2$. Этот закон равномерного распределения пронизывает всю молекулярную физику прошлого столетия.

Один моль состоит из N атомов, и каждый атом твердого тела эквивалентен трем осцилляторам. Энергия одного моля твердого тела равна поэтому

$$E = 3Nk\Theta,$$

а его удельная теплота

$$\frac{dE}{d\Theta} = 3Nk = 3R = 5,99 \text{ кал/град.} \quad (14)$$

Получился замечательный теоретический результат. Удельная теплота одного моля твердого тела одинакова для всех веществ. Дюлон и Пти подтвердили на опыте, что удельная теплота, отнесенная к одному молю, имеет для твердого тела значение 6 кал/град, и долгое время все было хорошо. Но именно здесь, в классической теории, появилась первая брешь, заставившая задуматься о том, правильна ли вся теория.

По теории значение, даваемое формулой (14), должно быть справедливо при любой температуре. Опыт показывает, что для низких температур это абсолютно неверно. При низких температурах удельная теплота твердых тел очень мала. Но есть еще гораздо более глубокое противоречие. То, что имеется $3N$ осцилляторов, это — только первое приближение. Атомы излучают и поглощают свет. В атоме есть электроны, играющие роль излучателей. Электроны, находящиеся в атомах, сами являются осцилляторами. Таким образом число осцилляторов не $3N$, а гораздо больше. Система заведомо имеет гораздо больше, чем $3N$ степеней свободы. С другой стороны, мы показали, что средняя энергия осциллятора не зависит от частоты. Следовательно, удельная теплота должна быть гораздо больше, чем та, которую мы получили. Мы сами себя опровергли! Однако с помощью теоремы о равномерном распределении были получены отличные результаты. Здесь возник первый тяжелый конфликт (правда, большинству физиков он казался случайным).

Но не на этом фронте был дан генеральный бой. Почему? Тела сложны; они в разных случаях ведут себя по-разному. Теоретически рассуждать над телами неудобно. Бой был дан по вопросу о „черном излучении“. Постараемся понять, в чем произошла коренная ломка и к чему в результате пришли.

Можно поставить такую задачу: найти удельную теплоту пустоты (если выражаться немного парадоксально), или: найти удельную теплоту черного излучения.

Представим себе абсолютно черное тело, т. е. тело с такой поверхностью, что все падающее на него излучение поглощается (можно ли ее реализовать — это другой вопрос). Кирхгоф показал, что при данной температуре все черные тела испускают излучение одинаковой интенсивности и с одинаковым спектральным распределением. Возьмем теперь замкнутую полость. Там установится равновесное электромагнитное излучение. Термодинамика приводит к заключению, что характер излучения не зависит от того, каковы стенки. Возьмем полость с какими угодно стенками (не обязательно черными) и будем поддерживать их при определенной температуре. В полости установится равновесное излучение, имеющее вполне определенный спектр плотности энергии. При обычных температурах мы не увидим этого излучения, но при температуре $800\text{--}1000^\circ$ все будет накалено, в полости будет яркий свет. Равновесное излучение в полости совпадает с излучением,

испускаемым черным телом при температуре полости. Его поэтому также называют черным излучением.

Определим, каково изменение энергии равновесного излучения при изменении температуры полости на 1° . В этом состоит вопрос об удельной теплоте черного излучения. Это — вполне реальный вопрос. В качестве ответа должен получиться универсальный закон. Он и практически очень интересен. Так, например, можно принять с известным приближением, что поверхность звезды есть поверхность абсолютно черного тела. Тогда, исследуя излучение от звезды, можно определить температуру ее поверхности.

Поставленный вопрос можно решить без всяких моделей, из термодинамических соображений. При этом получается знаменитый закон Стефана-Больцмана

$$E = \beta \Theta^4,$$

где β — постоянная. Но здесь интересно пойти дальше. В равновесном излучении представлены всевозможные цвета, всевозможные частоты. Как распределена энергия E по отдельным цветам? Какова энергия $\rho_\nu d\nu$, приходящаяся (в единице объема) на участок спектра от ν до $\nu + d\nu$, т. е. каково спектральное распределение черного излучения? Эта задача очень долго „не давалась“.

Попробуем рассуждать по Планку. Внесем в полость осциллятор. Из электромагнитной теории Максвелла следует, что между плотностью излучения и средней энергией осциллятора имеется следующая связь:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \overline{W}, \quad (15)$$

где c — скорость света в вакууме. Таким образом, если мы найдем среднюю энергию осциллятора $\overline{W}$, то мы сможем узнать ρ_ν . Но мы уже нашли, что при термодинамическом равновесии

$$\overline{W} = k\Theta$$

Допустим, что этот результат справедлив и здесь. Тогда

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k\Theta. \quad (16)$$

Это — закон Релея—Джинса. Опыт показывает, что он справедлив для высоких температур и для низких частот, но катастро-

фически неверен для низких температур и для высоких частот. Если мы захотим найти, исходя из (16), полную энергию излучения E в единице объема, то мы получим:

$$E = \frac{8\pi k\theta}{c^3} \int_0^{\infty} \nu^2 d\nu = \infty.$$

Вследствие того, что спектральная плотность ρ_ν неограниченно растет с частотой, получается, что при заданной температуре полная энергия бесконечно велика. Если же энергия E конечна, то она вся должна переключаться в быстрые колебания. Это — не мелкая неприятность. Это — нелепость, показывающая несостоятельность всей теории. По теории получается, что при установлении равновесия между телом и излучением вся энергия тела перейдет в излучение. В этом состоит так называемая „фиолетовая катастрофа“.

Вин дал для больших частот другую формулу:

$$\rho_\nu = A\nu^3 e^{-\lambda\nu/\theta} \quad (17)$$

где A и λ — постоянные. Как Вин получил эту формулу? В сущности, он ее угадал, но мы не будем на этом останавливаться. Опыт показал, что для очень больших частот справедлив как раз этот закон. Он не приводит к противоречию с законом Стефана-Больцмана, но он не дает совпадения с опытом при низких частотах.

Планк постарался найти эмпирическую формулу, которая для малых частот переходила бы в формулу Релея—Джинса, а для больших — в формулу Вина. Планк нашел такую формулу. Вот она:

$$\rho_\nu = \frac{A\nu^3}{e^{\lambda\nu/\theta} - 1}. \quad (18)$$

Легко убедиться, что для больших частот она переходит в (17), а для малых — в (16). Оказалось, что формула (18) очень хорошо совпадает с опытом для всех частот.

Планк решил ее вывести, объяснить, т. е. узнать, какие принципы к ней приводят. Он сделал при этом важнейший шаг в развитии физики. Он понял, что для того, чтобы получить эту формулу, необходимо что-то радикально изменить. Является ли путь Планка единственным? Этот вопрос оставался открытым.

Планк вернулся к исходным пунктам теории. Он оставил в силе соотношение (15) и сказал: весь вопрос — в нахождении $\overline{W}$.

В чем и как нужно изменить формулы (6) и (7)? Планк говорит: механика остается в силе, но нужно изменить начальные условия. Энергия осциллятора определяется начальными условиями. По принципу Больцмана возможна любая энергия. Планк противопоставил этому утверждение: энергия осциллятора может иметь только совершенно определенные значения, а именно:

$$0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots,$$

где h — некоторая постоянная. Это не выводится. Это — совершенно неожиданный „дикий“ постулат. Механике он не противоречит, так как это — *статистический* постулат.

Энергия осциллятора

$$W = \nu S,$$

где S — площадь соответствующего эллипса на фазовой плоскости¹. Поэтому постулат Планка можно сформулировать так: на фазовой диаграмме возможны только те эллипсы, для которых

$$S = nh \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Иначе говорят так: энергия осциллятора не может быть произвольной, она *квантуется*. Квант (доза) энергии равен $h\nu$; он тем больше, чем больше частота.

О ДИННАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(28/XI 1930 г.)

Вычисление средней энергии квантованного осциллятора. Квантовые формулы для спектральной плотности равновесного излучения и для энергии твердого тела. Понятие адиабатического инварианта. Адиабатическая инвариантность отношения средней кинетической энергии к частоте (на примерах).

Планк предположил, что энергия осциллятора может принимать только дискретный ряд значения

$$W = 0, h\nu, 2h\nu, \dots, nh\nu, \dots, \quad (1)$$

причем вероятность того, что осциллятор обладает энергией $nh\nu$, т. е. находится в n -ом состоянии, есть

$$P_n = Ae^{-nh\nu/k\theta}.$$

¹ [См. 9-ю лекцию.]

В чем и как нужно изменить формулы (6) и (7)? Планк говорит: механика остается в силе, но нужно изменить начальные условия. Энергия осциллятора определяется начальными условиями. По принципу Больцмана возможна любая энергия. Планк противопоставил этому утверждение: энергия осциллятора может иметь только совершенно определенные значения, а именно:

$$0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots,$$

где h — некоторая постоянная. Это не выводится. Это — совершенно неожиданный „дикий“ постулат. Механике он не противоречит, так как это — *статистический* постулат.

Энергия осциллятора

$$W = \nu S,$$

где S — площадь соответствующего эллипса на фазовой плоскости¹. Поэтому постулат Планка можно сформулировать так: на фазовой диаграмме возможны только те эллипсы, для которых

$$S = nh \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Иначе говорят так: энергия осциллятора не может быть произвольной, она *квантуется*. Квант (доза) энергии равен $h\nu$; он тем больше, чем больше частота.

О ДИННАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(28/XI 1930 г.)

Вычисление средней энергии квантованного осциллятора. Квантовые формулы для спектральной плотности равновесного излучения и для энергии твердого тела. Понятие адиабатического инварианта. Адиабатическая инвариантность отношения средней кинетической энергии к частоте (на примерах).

Планк предположил, что энергия осциллятора может принимать только дискретный ряд значения

$$W = 0, h\nu, 2h\nu, \dots, nh\nu, \dots, \quad (1)$$

причем вероятность того, что осциллятор обладает энергией $nh\nu$, т. е. находится в n -ом состоянии, есть

$$P_n = Ae^{-nh\nu/k\theta}.$$

¹ [См. 9-ю лекцию.]

Вычислим, исходя из этого постулата, среднюю энергию осциллятора:

$$\overline{W} = \sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \cdot Ae^{-nh\nu/k\theta}, \quad (2)$$

причем

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} Ae^{-nh\nu/k\theta}. \quad (3)$$

Исключая A , получаем:

$$\overline{W} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu/k\theta}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/k\theta}}.$$

Как и в предыдущей лекции, обозначим

$$\alpha = 1/k\theta. \quad (4)$$

Тогда

$$\overline{W} = I_1(\alpha)/I_0(\alpha), \quad (5)$$

где теперь

$$I_0 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu\alpha}, \quad I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu\alpha}.$$

Нетрудно видеть, что

$$I_1(\alpha) = -I_0'(\alpha).$$

I_0 есть сумма геометрической прогрессии:

$$I_0(\alpha) = \frac{1}{1 - e^{-h\nu\alpha}}. \quad (6)$$

Дифференцируя это выражение по α , получаем:

$$I_1(\alpha) = \frac{h\nu e^{-h\nu\alpha}}{(1 - e^{-h\nu\alpha})^2}. \quad (7)$$

Подставляя (6), (7) и (4) в (5), мы приходим к следующему выражению для средней энергии осциллятора:

$$\overline{W} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k\theta} - 1}. \quad (8)$$

Здесь средняя энергия уже существенно зависит от частоты осциллятора. Подставляя выражение (8) в формулу для плотности энергии излучения:

$$\rho\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \overline{W},$$

находим:

$$\rho\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/k\Theta} - 1}.$$

Таким образом, гипотеза Планка приводит к формуле для спектральной плотности равновесного излучения, которая, как было сказано в прошлой лекции, находится (при соответствующем выборе константы h) в полном согласии с опытом.

Применим выражение Планка для $\overline{W}$ к задаче о теплоемкости твердого тела. Энергия твердого тела, состоящего из N атомов, колеблющихся около своих положений равновесия с одинаковой собственной частотой ν , равна

$$E = 3N \overline{W} = \frac{3N}{e^{h\nu/k\Theta} - 1}. \quad (9)$$

Дифференцируя (9) по Θ , мы найдем выражение для теплоемкости, хорошо передающее качественный ход зависимости теплоемкости от температуры, наблюдаемый на опыте¹.

Если

$$h\nu/k\Theta \ll 1,$$

имеем приближенно:

$$\overline{W} = \frac{h\nu}{\left(1 + \frac{h\nu}{k\Theta}\right) - 1} = k\Theta, \quad (10)$$

т. е. формула (9) переходит в классическую. Посмотрим, могут ли квантовые закономерности, т. е. отличие (9) от (10), быть заметными в случае макроскопических электромагнитных колебаний.

Так как $k = 1,38 \cdot 10^{-18}$ эрг/град, имеем при $\Theta = 300^\circ$ (грубо):

$$k\Theta = 4 \cdot 10^{-14} \text{ эргов.}$$

¹ [См. 10-ю лекцию.]

Возьмем $\nu = 10^{10}$ сек $^{-1}$, что соответствует длине волны 3 см. Тогда, поскольку $h = 6,6 \cdot 10^{-27}$ эрг · сек, получаем (грубо):

$$h\nu = 6 \cdot 10^{-17} \text{ эргов};$$

$$h\nu/k\theta \sim 10^{-3} \ll 1.$$

Таким образом, здесь квантовые закономерности не будут сказываться; они лежат далеко за пределами чувствительности наших приборов.

Совсем иначе обстоит дело для видимого света. Возьмем длину волны $6 \cdot 10^{-5}$ см, т. е. $\nu = 5 \cdot 10^{14}$. Имеем (грубо):

$$h\nu = 3 \cdot 10^{-12};$$

$$h\nu/k\theta \sim 100;$$

$$\overline{W} = k\theta \cdot 100 \cdot e^{-100}.$$

Средняя энергия осциллятора ничтожно мала по сравнению с $k\theta$.

Как было сказано в предыдущей лекции, осциллятор Планка движется по законам классической механики. Точка, изображающая движение осциллятора на фазовой плоскости, движется по эллиптической орбите. Энергия осциллятора на данной орбите постоянна; она задана квантовыми условиями (1).

Согласно классической электродинамике, электрон, совершающий гармоническое колебание, должен был бы излучать. Осциллятор Планка излучает только при переходе из одного состояния в другое; при этом частота его излучения та же, что и частота обращения по эллиптической орбите на фазовой плоскости, одинаковая для всех орбит.

Бор, исходя из ядерной модели атома, предложенной Резерфордом, перенес на атом квантовые представления Планка. Ему пришлось при этом оторвать частоту излучения от частоты обращения электрона по орбите.

При квантовании движения осциллятора Планк считал параметры осциллятора неизменными. Рассмотрим поведение осциллятора при очень медленных изменениях параметров, например поведение маятника при его укорочении. Энергия осциллятора будет меняться за счет работы, производимой над ним внешними силами при изменении параметра. Этот случай был разобран Релеем.

Оказывается, что при очень медленном изменении параметров осциллятора отношение W/ν остается постоянным. Таким образом, при медленном изменении параметров квантованный осциллятор сохраняет свою квантованность, т. е. условие

$$W/\nu = nh$$

остается в силе. Величина W/ν является, как принято выражаться, адиабатическим инвариантом гармонического осциллятора. (Адиабатическим инвариантом называют величину, остающуюся неизменной при медленном изменении параметров.)

Рассмотрим случай шарика, движущегося по инерции между двумя стенками, находящимися друг от друга на расстоянии l (рис. 32, а), от которых он отражается по закону абсолютно упругого удара. Шарик совершает периодическое движение с неизменной по абсо-

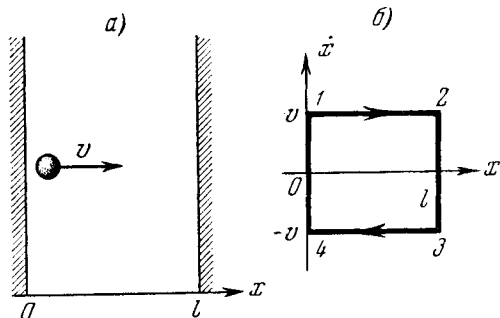


Рис. 32.

лютной величине скоростью $\pm v$. На фазовой плоскости движение изображается прямоугольником 1, 2, 3, 4 (рис. 32, б). Мы будем считать, что из 2 в 3 и из 4 в 1 совершается мгновенный перескок (на самом деле движение, конечно, сложнее).

Как изменится движение, если мы начнем очень медленно уменьшать параметр l , т. е. сближать стенки?

Применим теорему вириала¹. Здесь

$$2\bar{T} = -V = -\left\{ \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} X' x_1 dt + \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} X'' x_2 dt \right\},$$

где X' и X'' — силы, действующие на шарик со стороны первой и второй стенки. Так как

$$x_1 = 0, \quad x_2 = l,$$

имеем:

$$2\bar{T} = -l\bar{X}'' ,$$

или

$$\bar{X}'' = -\frac{2\bar{T}}{l} ,$$

¹ [См. 9-ю лекцию.]

где $\overline{X''}$ — среднее значение силы за период (среднее значение силы, с которой шарик действует на стенку, есть $-\overline{X''}$).

При сближении стенок на $|\Delta l|$ ($\Delta l < 0$) мы совершаем работу

$$\Delta A = -\frac{2\overline{T}}{l} \Delta l.$$

Эта работа равна увеличению средней энергии движения шарика:

$$\Delta \overline{T} = -\frac{2\overline{T}}{l} \Delta l,$$

откуда

$$\frac{\Delta \overline{T}}{\overline{T}} = -2 \frac{\Delta l}{l}. \quad (11)$$

Период движения шарика есть

$$\tau = \frac{2l}{v}. \quad (12)$$

Изменение его, вследствие сближения стенок, равно

$$\Delta \tau = 2 \frac{\Delta l \cdot v - l \cdot \Delta v}{v^2}. \quad (13)$$

Из (12) и (13) получаем:

$$\frac{\Delta \tau}{\tau} = \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta v}{v}. \quad (14)$$

В данном случае

$$2\overline{T} = mv^2, \quad \Delta \overline{T} = mv \Delta v,$$

т. е.

$$\frac{\Delta \overline{T}}{\overline{T}} = 2 \frac{\Delta v}{v}. \quad (15)$$

Подставляя в (14) $\frac{\Delta l}{l}$ из (11) и $\frac{\Delta v}{v}$ из (15), получаем:

$$\Delta \tau \cdot \overline{T} + \tau \cdot \Delta \overline{T} = 0,$$

т. е.

$$\overline{T} \tau = \text{const},$$

или

$$\frac{2\overline{T}}{v} = \text{const}, \quad (16)$$

где

$$\nu = 1/\tau$$

есть частота колебаний шарика.

Площадь цикла на фазовой плоскости равна

$$S = 2m\nu l = m\nu^2 \frac{2l}{\nu} = 2\bar{T}\tau = \frac{2\bar{T}}{\nu}.$$

Это — частный случай полученного ранее соотношения¹. На основании (16) имеем:

$$S = \text{const},$$

— площадь цикла есть адиабатический инвариант.

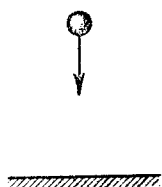


Рис. 33.

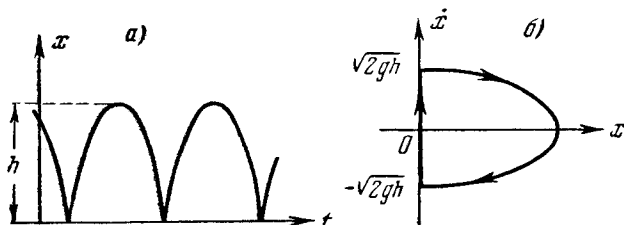


Рис. 34.

Можно рассмотреть аналогичную задачу для немного более сложного случая (рис. 33): упругий мячик движется вертикально под действием силы тяжести, отскакивая от горизонтального стола, причем ускорение тяжести (параметр) медленно меняется. Здесь график зависимости координаты от времени и траектория на фазовой плоскости имеют вид, показанный соответственно на рис. 34, а и б. Применяя теорему вириала, мы найдем также и здесь, что

$$\frac{2\bar{T}}{\nu} = \text{const}.$$

Рассмотрим колебательный контур (рис. 19), емкость которого медленно изменяется (раздвигаются пластины конденсатора). Здесь

$$T = \frac{LQ^2}{2}, \quad U = \frac{Q^2}{2C},$$

¹ [См. 9-ю лекцию.]

где Q — заряд конденсатора, меняющийся по закону

$$Q = A \sin(\omega t + \varphi),$$

причем

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}.$$

Закон сохранения энергии нам дает:

$$\frac{L\dot{Q}^2}{2} + \frac{Q^2}{2C} = W = \text{const.}$$

На фазовой плоскости $(Q, L\dot{Q})$ изображающая точка описывает эллипс с полуосями

$$\sqrt{2CW}, \quad \sqrt{2LW}.$$

Вычислим работу, совершаемую над конденсатором при изменении емкости. В каких случаях работа, потребная для изменения емкости, равна изменению энергии конденсатора $Q^2/2C$? Тогда, когда работа целиком идет на изменение этой энергии. Так обстоит дело, если конденсатор изолирован и, следовательно, его заряд Q остается постоянным.

Пусть мы изменили емкость изолированного конденсатора на dC , раздвинув или сблизив пластины. Работа раздвижения пластин изолированного конденсатора

$$dA = dU = d\frac{Q^2}{2C} = -\frac{Q^2}{2C^2}dC = -\frac{U}{C}dC$$

(положительная работа $dA > 0$ соответствует $dC < 0$, т. е. раздвижению пластин). Но можно утверждать большее, а именно: работа раздвижения *всегда* выражается формулой

$$dA = -\frac{U}{C}dC, \quad (17)$$

так как сила, действующая между пластинами, не зависит от того, изолированы они или нет (последнее имеет место, например, если они соединены с источником постоянного напряжения). Но рассмотрение изолированного конденсатора позволяет получить формулу (17) наиболее просто.

Если изменение параметра очень медленное, то можно считать величину $\dot{C}/C$ постоянной в течение одного периода колебаний. Тогда работа, совершаемая за период колебаний τ , будет

$$\Delta A = -\frac{\dot{C}}{C} \int_0^{\tau} U dt = -\frac{\dot{C}}{C} \bar{U} \tau. \quad (18)$$

Но

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\Delta C}{\tau}, \quad (19)$$

где ΔC — изменение емкости за время τ . Подставляя (19) в (18), получаем:

$$\Delta A = -\frac{\Delta C}{2} \bar{U} = -\frac{\Delta C}{2} \frac{W}{C}.$$

Эта работа пошла на увеличение полной энергии W :

$$\Delta W = -\frac{\Delta C}{2} \frac{W}{C},$$

или

$$\frac{\Delta W}{W} = -\frac{\Delta C}{2C}. \quad (20)$$

С другой стороны,

$$\tau = 2\pi \sqrt{LC},$$

откуда

$$\frac{\Delta \tau}{\tau} = \frac{\Delta C}{2C}. \quad (21)$$

Сравнивая (21) и (20), получаем:

$$\frac{\Delta \tau}{\tau} + \frac{\Delta W}{W} = 0. \quad (22)$$

В нашем случае (гармонический осциллятор)

$$W = 2\bar{T},$$

и, следовательно, на основании (22) мы снова получаем:

$$\frac{2\bar{T}}{v} = \text{const.}$$

Во всех рассмотренных нами случаях отношение средней кинетической энергии к частоте является адиабатическим инвариантом. Этот результат был обобщен на любую консервативную систему с одной степенью свободы¹.

¹ [Обобщение на случай n степеней свободы см. С. М. Рытов, Труды ФИАН, т. 2, вып. 1, стр. 41. Изд-во АН СССР, 1939].

ДВЕНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(5/XII 1930 г.)

Адиабатические инварианты (окончание): квантование осциллятора по Планку и теория адиабатических инвариантов; гипотеза Эренфеста. Квантование осциллятора в волновой механике. Колебательные системы с одной степенью свободы с учетом трения (сопротивления). Отрицательное сопротивление и второй закон термодинамики. Коэффициент полезного действия процесса зарядки конденсатора аккумуляторной батареей. Затухающие колебания: коэффициент затухания; логарифмический декремент. Маятник Фруда.

Вернемся к адиабатическим инвариантам и при этом кое-что дополним и подчеркнем.

Речь шла о применении классической механики к объяснению некоторых молекулярных явлений.

Механика не содержит в себе всех элементов, необходимых для объяснения этих явлений. Она не отвечает на вопрос: как движется тело? Механика отвечает только на вопрос: как движется тело, если заданы начальная скорость и начальное положение? Начальные положения и начальные скорости мы знаем — или можем узнать — в случае макроскопических тел. В микрокосмосе должен быть введен некоторый новый постулат. Естественно указать *вероятности* различных состояний микросистем (молекул, атомов). Здесь натолкнулись на следующую трудность. Если принять, что все начальные состояния возможны, и в согласии с этим предположением построить теорию черного излучения и теорию твердого тела, то получается грубое противоречие с опытом. Чтобы построить удовлетворительную теорию, нужно что-то в корне изменить, сделать какой-то решающий шаг. Планк сделал его — не в механике, а в статистике. Планк считал, что осциллятор движется по классическим законам, но начальные состояния не произвольны, а таковы, что энергия отдельного осциллятора

$$W = nh\nu \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

На основе этого предположения была создана новая статистика, и это дало блестящие результаты.

Однако нужно было отнестись к ним критически. Нужно было выяснить, как новые результаты уживаются с другими, твердо установленными. Как бы хорошо ни оправдывалась на опыте новая теория, все же оставалась известная неудовлетворенность,

какое-то неприятное состояние. Тут и возник тот вопрос, который мы теперь разбираем.

Будем считать, что осциллятор движется по законам классической механики. Следуя Планку, будем считать, что

$$\frac{W}{\nu} = nh. \quad (1)$$

Возьмем другой осциллятор, с другой энергией W' и с другой частотой ν' . Мы снова пишем:

$$\frac{W'}{\nu'} = nh.$$

Все это не противоречит механике (повторяю: механика о начальных состояниях ничего не говорит). Но мы можем себе представить другую постановку задачи. Сначала мы задали определенные начальные условия. Затем мы начали медленно менять параметры осциллятора. Наконец, параметры мы опять зафиксировали. Все это — одна механическая задача. Здесь все однозначно определено начальными условиями. Посмотрим, какова энергия осциллятора в конце процесса изменения параметров. Теперь мы не вольны отвечать на этот вопрос независимо от механики. Лоренц говорит¹: вследствие изменения параметра произошло изменение частоты; поэтому условие (1) теперь нарушено. Представим себе маятник. Начальные условия таковы, что он квантован. Затем мы начали его медленно укорачивать. В результате перед нами короткий маятник. Может случиться, говорит Лоренц, что этот короткий маятник не квантован. Конечно, это рассуждение предполагает, что классическая механика остается справедливой. В нем заключена такая мысль: два независимых осциллятора с частотами ν и ν' мы имеем право квантовать, но если мы переводим один в другой, хотя бы сколь угодно медленно, то нет этой свободы, — мы связаны классической механикой. Все направление мысли здесь таково, что для медленных изменений параметра сохраняется классическая механика.

На это можно ответить так: откуда известно, что при медленном изменении параметра нарушается условие (1)? Изменя пара-

¹ [H. A. Lorentz. La théorie du rayonnement et les quanta. Rapports et discussions de la Réunion tenue à Bruxelles. 1911. Стр. 450. Париж, Готье-Виллар, 1912.]

метр, мы совершаем некоторую работу и, следовательно, изменяем энергию системы. В начале частота осциллятора была ν . Мы задали начальную энергию W , равную $nh\nu$. Откуда мы знаем то, что новая энергия W' не окажется равной $nh\nu'$? Может быть, работа совершена как раз такая, какая нужна, чтобы новое значение энергии было равно $nh\nu'$?

Здесь возникает чисто механическая задача: дана система с одной степенью свободы; мы изменяем ее параметры, и при этом изменяются период и энергия; какие функции этих величин остаются постоянными?

Эту механическую задачу решил Больцман. Он показал, что есть величина, которая при медленном изменении параметров остается постоянной, и указал эту величину. В общем случае это не W/ν , а

$$\frac{2\bar{T}}{\nu}, \quad (2)$$

где $\bar{T}$ — среднее значение кинетической энергии. Эта чисто механическая теорема сразу устраняет неприятности в квантовой теории, связанные с изменением параметра.

Величины, которые остаются неизменными при медленном изменении параметра, называются адиабатическими инвариантами. О них подробно говорилось в связи с рядом примеров в прошлой лекции.

Планк квантовал не величину (2), а величину (1), — полную энергию, деленную на частоту. Он не думал о том противоречии, возможность которого мы обсуждаем. Планк рассматривал частный случай — гармонический осциллятор. Для него „случайно“ Планк правильно угадал, как надо квантовать: отношение W/ν равняется для гармонического осциллятора $2\bar{T}/\nu$. Во многих случаях (а именно: если потенциальная энергия — однородная функция) существует постоянное отношение между полной энергией и средней кинетической энергией¹. Но возможны случаи — и это самые распространенные случаи, — когда не существует такого постоянного отношения. Например, для маятника с большой амплитудой W и $2\bar{T}$ не находятся в постоянном отношении. Там W/ν не является адиабатическим инвариантом.

После того, как все это выяснилось, начали поступать наоборот. Стали разыскивать величины, являющиеся адиабатическими

¹ [См. 10-ю лекцию.]

инвариантами и их квантовать. Так, например, маятник — нелинейная система, и здесь нужно квантовать $2\overline{T}/\nu$. Теория адиабатических инвариантов показала, таким образом, что у Планка нет противоречий с механикой. С другой стороны, она помогла дальнейшему развитию квантовой теории. Конечно, указание на то, что квантовать нужно величины, являющиеся адиабатическими инвариантами, было только гипотезой. Эта гипотеза была высказана Эренфестом.

Следует ясно себе представлять, что существование адиабатических инвариантов ничего общего с квантами не имеет. О нем знал уже Больцман, и интересовался он адиабатическими инвариантами в связи с чисто механическими вопросами. Он исходил из желания — это было давно, до квантов — свести тепловые явления на механические.

Итак, теорема об адиабатических инвариантах есть чисто механическая теорема. Она имеет прямое отношение к теории колебаний. Это — теорема теории колебаний, относящаяся к медленным изменениям параметров консервативных систем. В дальнейшем пришлось отказаться от планковской установки на удержание классической механики и на дополнение ее правилами квантования. Современная волновая механика создана путем отказа и от самой классической механики, но теория адиабатических инвариантов имеет большое значение и там.

Я не буду здесь говорить о всей концепции волновой механики и ограничусь лишь тем, что она изменила в вопросе о гармоническом осцилляторе. Она утверждает, как и Планк, что энергия гармонического осциллятора принимает лишь ряд дискретных значений. Но, по Планку, эта энергия может иметь значения

$$0, h\nu, 2h\nu, \dots$$

(существенно, что осциллятор может иметь энергию, равную нулю). Согласно же современной волновой механике, состояния с энергией, равной нулю, не существует. Энергия гармонического осциллятора равна

$$W = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu \quad (n - \text{целое}),$$

т. е. равна

$$\frac{h\nu}{2}, \frac{3h\nu}{2}, \frac{5h\nu}{2}, \dots$$

При абсолютном нуле температуры все осцилляторы имеют наименьшую энергию $h\nu/2$. Наличие этой „энергии абсолютного нуля“ чрезвычайно типично для волновой механики. Оно приводит к далеко идущим следствиям.

Перейдем теперь снова к более прозаическим вещам.

Вернемся к резонатору с одной степенью свободы, но отбросим часть сделанных ранее идеализаций. До сих пор мы считали, что маятник имеет кинетическую и потенциальную энергию (контур — магнитную и электрическую), причем от их превращения в теплоту мы отвлекались (рассматривая контур, мы вводили параметры L и C , но не вводили сопротивления). Отсюда следовало, что процесс колебаний повторяется периодически. Но в действительности при колебаниях всегда развивается теплота. Маятник всегда имеет трение, контур — сопротивление. Учет трения или сопротивления приводит к теории затухающих колебаний.

Будем исходить из закона сохранения энергии. В случае колебательного контура

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{Q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} \right) + Ri^2 = 0 \quad (3)$$

(за единицу времени в электрическом контуре рассеивается энергия Ri^2).

Проводя в (3) дифференцирование и принимая во внимание, что

$$\frac{dQ}{dt} = i,$$

мы получаем дифференциальное уравнение

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (4)$$

Аналогичное уравнение для механической системы имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (5)$$

Оно получается в предположении, что энергия, превращаемая в теплоту в единицу времени, пропорциональна квадрату скорости, т. е. в предположении, что сила трения пропорциональна скорости. При малых скоростях закон трения (например, сопротивления воздуха) очень близок к этому. Но при больших скоростях, например для снаряда, уже ничего подобного не получается.

В случае вращательного движения мы найдем при аналогичных предположениях уравнение

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mu \frac{d\varphi}{dt} + D\varphi = 0, \quad (6)$$

где I — момент инерции, D — момент упругой силы при отклонении на угол $\varphi=1$, а μ — момент силы трения при угловой скорости $\dot{\varphi}=1$.

Уравнения (4), (5) и (6) мы запишем в общем виде:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (7)$$

Здесь ω_0 — циклическая частота того процесса, который происходит бы в системе в отсутствие трения.

Мы считаем, что $\delta > 0$, т. е. что сила трения всегда действует *против* движения. При этом во время колебаний электрическая и магнитная энергия (или кинетическая и потенциальная) превращаются в теплоту. Может ли δ быть отрицательным? При отрицательном трении энергия входила бы в систему, происходило бы превращение теплоты в электрическую и магнитную (кинетическую и потенциальную) энергию. Это не противоречит первому закону термодинамики, но противоречит *второму*.

Если бы было $\delta < 0$, мы могли бы заставить контур колебаться за счет энергии окружающего „теплового резервуара“, мы могли бы с помощью периодического процесса черпать энергию у одного резервуара и превращать ее в работу: осуществилось бы *perpetuum mobile* второго рода. К сожалению, этого сделать нельзя. Поэтому мы должны считать *постулативно*, что *если нет другого источника энергии*, то $\delta > 0$. Этим вовсе не сказано, что ни при каких условиях не может быть $\delta < 0$. Системы с $\delta < 0$ существуют, и они, может быть, даже важнее тех, где $\delta > 0$. В дальнейшем мы рассмотрим и системы с $\delta < 0$.

Обратим теперь внимание на такой вопрос. Прежде чем разрядить конденсатор, надо его зарядить, например с помощью аккумуляторной батареи (рис. 35). Как написать дифференциальное уравнение для процесса зарядки? Рассмотрим более общий случай разветвленной цепи (например, рис. 36).

Для составления уравнений разветвленной цепи закон сохранения энергии недостаточен. Здесь нужно воспользоваться первым и вторым законами Кирхгофа, учтя, что падения напряжения на

индуктивностях и емкостях имеют вид $L \frac{di}{dt}$ и $\frac{Q}{C}$. Я не буду обосновывать этот общий рецепт составления уравнений электрических цепей. Его обосновать не так просто, ибо, строго говоря, здесь неправильно пользоваться понятием потенциала или напряжения, так как электрическое поле не является здесь статическим.

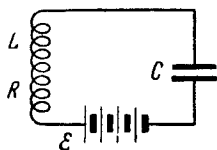


Рис. 35.

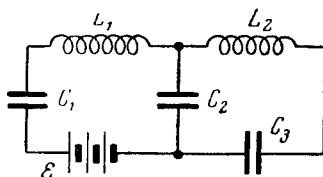


Рис. 36.

Для простого контура (рис. 19) мы придем, пользуясь законами Кирхгофа, к прежнему уравнению:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = 0.$$

В случае же зарядки прибавляется еще постоянная электродвижущая сила батареи $\mathcal{E}$:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}. \quad (8)$$

Из уравнения (8) вытекает очень интересное и практически чрезвычайно важное следствие. Его можно очень просто вывести из самого уравнения, не прибегая к решению (часто решить уравнение бывает трудно, но можно получить некоторые важные результаты из самого уравнения¹).

Умножим уравнение (8) на $i = \frac{dQ}{dt}$:

$$Li \frac{di}{dt} + Ri^2 + \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} = \mathcal{E}i,$$

и проинтегрируем от 0 до t :

$$\frac{Li_t^2}{2} - \frac{Li_0^2}{2} + R \int_0^t i^2 dt + \frac{Q_t^2}{2C} - \frac{Q_0^2}{2C} = \mathcal{E} \int_0^t i dt. \quad (9)$$

¹ [Ср. 27-ю лекцию.]

В случае зарядки начальные условия при $t=0$ таковы:

$$i_0 = 0, \quad Q_0 = 0. \quad (10)$$

При $t = \infty$ имеем:

$$i_t = i_\infty = 0, \quad Q_t = Q_\infty = C\mathcal{E}, \quad (11)$$

причем

$$\int_0^\infty i \, dt = Q_\infty. \quad (12)$$

Подставляя (10), (11) и (12) в (9), получаем:

$$R \int_0^\infty i^2 dt + \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = C\mathcal{E}^2,$$

или

$$R \int_0^\infty i^2 dt = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}. \quad (13)$$

Половина энергии, отдаваемой батареей, уходит на зарядку конденсатора, а другая половина превращается в теплоту. Можно как угодно менять сопротивление и индуктивность контура, коэффициент полезного действия при рассматриваемом способе зарядки всегда будет равен $1/2$. Это — самый невыгодный способ зарядки, какой только существует.

Результат (13) относится к случаю, когда мы в один прием заряжаем конденсатор до конца, до разности потенциалов $\mathcal{E}$. Но можно осуществить зарядку постепенно, порциями. К. п. д. оказывается тогда выше. Убедимся в этом.

Если конденсатор уже имеет начальный заряд $Q_0 = C\mathcal{E}_0$ [в отличие от (10)], то при включении электродвижущей силы $\mathcal{E} > \mathcal{E}_0$, на него перетечет заряд ($t \rightarrow \infty$)

$$\int_0^t i \, dt = C(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0).$$

Пользуясь этими выражениями вместо (10) и (12), нетрудно получить из (9), что

$$R \int_0^\infty i^2 dt = \frac{C(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)^2}{2}.$$

Будем производить зарядку n ступенями, повышая каждый раз электродвижущую силу на величину $\mathcal{E}/n$ и выжидая, когда ток (практически) прекратится. Тогда теплота, развиваемая за один шаг, будет

$$q_1 = \frac{C}{2} \left(\frac{\mathcal{E}}{n} \right)^2,$$

а полная теплота за все n шагов

$$q = n q_1 = \frac{C \mathcal{E}^2}{2n}.$$

Мы видим, что с ростом n (и соответственно с замедлением процесса зарядки, до окончательного потенциала $\mathcal{E}$) потери уменьшаются и к. п. д. стремится к единице. Физически это понятно: сила тока при каждом шаге, грубо говоря, в n раз меньше, чем при единовременной зарядке, а теплота квадратична относительно тока. Отсюда и получается выигрыш в n раз, но вместе с тем и замедление процесса примерно в n раз.

Из уравнения (7) можно получить полную картину колебательного процесса. Характер решения зависит от того, каков дискриминант характеристического уравнения. Если

$$\omega_0^2 > \delta^2,$$

то общее решение имеет вид

$$x = A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (14)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (15)$$

— действительная величина, а A и φ — произвольные постоянные.

Если

$$\omega_0^2 < \delta^2,$$

то общее решение таково:

$$x = A e^{-m_1 t} + B e^{-m_2 t},$$

где m_1 и m_2 — действительные величины, а A и B — произвольные постоянные. Этот случай мы пока рассматривать не будем¹.

¹ [См. 14-ю лекцию.]

Решение (14) — осцилляторное (рис. 37). Оно имеет бесконечное множество максимумов и минимумов. Но оно не периодическое: не существует такого τ , чтобы при любом t было

$$x(t + \tau) = x(t).$$

Однако нули функции $x(t)$ повторяются через равные промежутки времени.

Обозначим:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Величину τ принято называть периодом, хотя это и неправильно; повторяю: периода здесь нет.

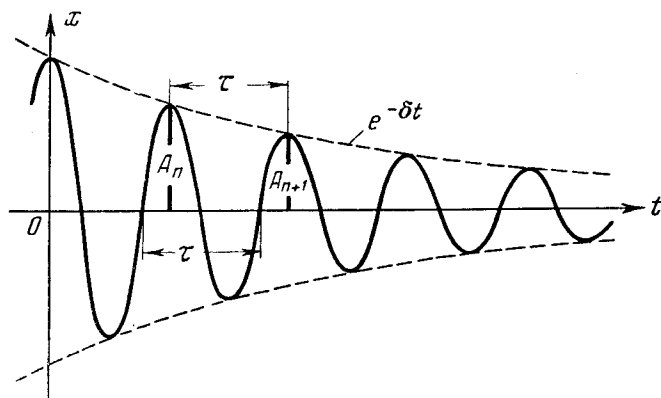


Рис. 37.

Промежуток времени между последовательными максимумами $x(t)$ тоже постоянен и равен τ ; поэтому „период“ здесь имеет двойной смысл. Максимумы находятся не посредине между нулями, а сдвинуты влево; но если $\delta \ll \omega_0$, то сдвиг очень мал. Если δ очень мало, то в течение некоторого времени система ведет себя приблизительно так, как если бы затухания не было. В ее внешних действиях часто проявляются черты, характерные для незатухающих колебаний. Но в других случаях имеется существенное отличие между слабо затухающими и незатухающими колебаниями. Для некоторых задач можно считать, что (14) есть „синусоидальное колебание с переменной амплитудой“.

Величина δ имеет размерность, обратную времени. Ее называют *коэффициентом затухания*. Если он мал, то убывание амплитуды происходит медленно.

Каково отношение двух последовательных амплитуд (т. е. максимумов)? Обозначив их через A_n и A_{n+1} (рис. 37), имеем:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\delta\tau}.$$

Разность логарифмов этих величин есть

$$d = \ln A_n - \ln A_{n+1} = \delta\tau. \quad (16)$$

Эту безразмерную величину называют *логарифмическим декрементом* (иногда называют логарифмическим декрементом половину этой величины, но я предпочитаю называть логарифмическим декрементом $\delta\tau$).

Фаза φ и начальная амплитуда A колебания (14) задаются начальными условиями, система же задает „период“ τ и логарифмический декремент d .

Чтобы хорошо понять физический смысл логарифмического декремента, нужно „вработаться“ в это понятие.

Пусть начальная амплитуда равна A . Через n периодов амплитуда будет Ae^{-nd} . Подождем пока будет $e^{-nd} = e^{-1}$, т. е. амплитуда уменьшится в e раз (грубо — в 3 раза). Это будет тогда, когда $nd = 1$, т. е. число „периодов“, протекшее от начала процесса, станет равно

$$n = \frac{1}{d}.$$

Таким образом, обратная величина логарифмического декремента есть число периодов, по истечении которого амплитуда уменьшается в e раз.

Можно дать логарифмическому декременту другое физическое толкование. Пусть система колеблется. Вследствие затухания, ее энергия постепенно уменьшается. Пусть в некоторый момент система имеет энергию W_0 , а через „период“ τ — энергию W_1 . Как показывает простой расчет,

$$\frac{W_0 - W_1}{W} = 2d, \quad \text{где} \quad W = \frac{W_0 + W_1}{2}.$$

Удвоенный логарифмический декремент равен отношению убыли энергии за „период“ к среднему значению энергии за „период“.

Приведу некоторые числа. Хороший камертон имеет d порядка $1/10000$. Это значит, что примерно через 10 тысяч колебаний его

амплитуда уменьшится до $1/3$. Без специальных приемов¹ нельзя осуществить электрический контур с таким малым декрементом; здесь в лучшем случае добивались $d \approx 0,2$.

Конечно, изолированный камертон осуществить нельзя: его колебания передаются другим телам. Равным образом электрический контур всегда излучает волны. Теория показывает, что обусловленные этим потери можно приближенно учесть, как увеличение логарифмического декремента.

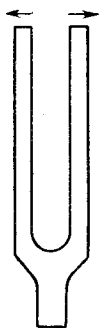


Рис. 38.

Камертон и замкнутый электрический контур излучают очень плохо. Чем это объясняется? Стержни камертона создают последовательность сгущений и разрежений воздуха, но стержни колеблются в противоположных фазах: в тот момент, когда один из стержней камертона движется вправо, другой движется влево (рис. 38). Происходит взаимное погашение излучений стержней (интерференция). Камертон излучает гораздо

меньше, чем сумма энергий, которые излучала бы каждая из его ножек в отдельности. Совершенно такая же компенсация излучений отдельных элементов происходит в случае замкнутого электрического контура (рис. 39).

Конечно, компенсация происходит не полностью; некоторое излучение остается. Для вопросов резонанса, воздействия внешней силы на контур, интересно знать, как зависит „частота“ ω от затухания. Из (15) и (16) получаем:

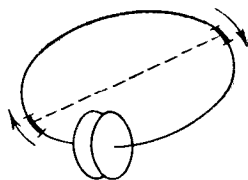


Рис. 39.

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{d^2}{4\pi^2}}.$$

Таким образом, малое затухание изменяет „частоту“ только во втором порядке. Пусть

$$\frac{d^2}{4\pi^2} \ll 1.$$

Тогда приближенно

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{d^2}{8\pi^2}\right).$$

Если, например, $d=0,1$ (это большой логарифмический декремент), то частоты ω и ω_0 различаются всего на $1/8000$. Таким образом,

¹ [См. 13-ую лекцию.]

даже при больших декрементах разница между ω и ω_0 еще ничтожна. В этой связи следует упомянуть о пьезокварцевых пластинках. Если заряжать обкладки такой пластинки, то она сжимается или расширяется; если ее сжимать, обкладки заряжаются. С пьезокварцем можно делать чудеса. Он позволяет осуществлять системы с чрезвычайно малым логарифмическим декрементом, например $d=1/50\,000$. Если логарифмический декремент кварца порядка 10^{-4} , то приблизительно через 10 тысяч колебаний амплитуда уменьшится до $1/3$. При частоте 10^6 колебаний в секунду это произойдет через $1/100$ секунды.

Вернемся к вопросу о том, возможны ли системы с отрицательным затуханием. Посмотрим, что это физически значит, к каким следствиям это приводит. Начнем с простой механической системы — маятника Фруда. Это, как мы увидим, аналог самого простого типа генератора с катодными лампами, применяемого в беспроводной телеграфии.

Маятник жестко скреплен со втулкой, насаженной на равномерно вращающийся вал. Втулка захватывается трением, и маятник отклоняется. Напишем дифференциальное уравнение движения маятника:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\gamma \frac{d\varphi}{dt} - D\varphi + D_1.$$

Оно отличается от (6) членом D_1 , выражающим момент силы трения, действующий на втулку со стороны вала. Этот момент зависит от их относительной угловой скорости $u = \dot{\varphi}$, т. е. при заданной угловой скорости вала u — от угловой скорости маятника $\dot{\varphi}$:

$$D_1 = f(u - \dot{\varphi}).$$

Вид функции f должен быть задан опытом.

ТРИНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(8/XII 1930 г.)

Затухающие и нарастающие колебания в линейной системе. Маятник Фруда (продолжение). Ламповый генератор. Невозможность незатухающих колебаний в линейной неконсервативной системе. Нелинейная задача о системе с постоянным трением. Разрывная идеализация характеристики электронной лампы.

В теории колебаний терминология еще плохо установилась даже в самых основных вещах. Величину $d = \delta\tau$ называют обычно логарифмическим декрементом, величину δ — коэффициентом затухания. Гаусс называл логарифмическим декрементом величину $\delta\tau/2$.

даже при больших декрементах разница между ω и ω_0 еще ничтожна. В этой связи следует упомянуть о пьезокварцевых пластинках. Если заряжать обкладки такой пластинки, то она сжимается или расширяется; если ее сжимать, обкладки заряжаются. С пьезокварцем можно делать чудеса. Он позволяет осуществлять системы с чрезвычайно малым логарифмическим декрементом, например $d=1/50\,000$. Если логарифмический декремент кварца порядка 10^{-4} , то приблизительно через 10 тысяч колебаний амплитуда уменьшится до $1/3$. При частоте 10^6 колебаний в секунду это произойдет через $1/100$ секунды.

Вернемся к вопросу о том, возможны ли системы с отрицательным затуханием. Посмотрим, что это физически значит, к каким следствиям это приводит. Начнем с простой механической системы — маятника Фруда. Это, как мы увидим, аналог самого простого типа генератора с катодными лампами, применяемого в беспроводной телеграфии.

Маятник жестко скреплен со втулкой, насаженной на равномерно вращающийся вал. Втулка захватывается трением, и маятник отклоняется. Напишем дифференциальное уравнение движения маятника:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\gamma \frac{d\varphi}{dt} - D\varphi + D_1.$$

Оно отличается от (6) членом D_1 , выражающим момент силы трения, действующий на втулку со стороны вала. Этот момент зависит от их относительной угловой скорости $u = \dot{\varphi}$, т. е. при заданной угловой скорости вала u — от угловой скорости маятника $\dot{\varphi}$:

$$D_1 = f(u - \dot{\varphi}).$$

Вид функции f должен быть задан опытом.

ТРИНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(8/XII 1930 г.)

Затухающие и нарастающие колебания в линейной системе. Маятник Фруда (продолжение). Ламповый генератор. Невозможность незатухающих колебаний в линейной неконсервативной системе. Нелинейная задача о системе с постоянным трением. Разрывная идеализация характеристики электронной лампы.

В теории колебаний терминология еще плохо установилась даже в самых основных вещах. Величину $d = \delta\tau$ называют обычно логарифмическим декрементом, величину δ — коэффициентом затухания. Гаусс называл логарифмическим декрементом величину $\delta\tau/2$.

Если δ отрицательно, формулы, полученные в прошлой лекции, остаются справедливыми, но весь процесс — существенно другой. Вместо затухания получается нарастание колебаний, идущее беспредельно. Вопрос заключается в том, существуют ли физические системы, у которых δ отрицательно, или это математическая фикция?

На предыдущей лекции мы получили для маятника со втулкой, насаженной на вращающуюся ось, нелинейное, дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi} + \mu \dot{\varphi} + D\varphi = f(u - \dot{\varphi}). \quad (1)$$

Из опыта мы знаем, что с ростом скорости трение в некотором интервале убывает:

$$f'(u) < 0.$$

Посмотрим сначала, что будет, если колебания очень малы. Тогда приближенно

$$f(u - \dot{\varphi}) = f(u) - f'(u)\dot{\varphi},$$

и уравнение (1) принимает вид

$$I\ddot{\varphi} + [\mu + f'(u)]\dot{\varphi} + D\varphi = f(u).$$

Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами, но оно имеет постоянную правую часть. Если $f(u) = 0$, то уравнение однородно. При этом существует решение $\varphi = 0$ — состояние равновесия. Если правая часть отлична от нуля, то существует равновесное решение

$$\varphi = \frac{f(u)}{D},$$

причем $\dot{\varphi} = 0$ (когда вал вращается, положение равновесия смещено).

Мы хотим исследовать колебания вокруг нового положения равновесия. Положим для этого

$$\varphi_1 = \varphi - \frac{f(u)}{D}.$$

Для φ_1 мы получаем однородное уравнение:

$$I\ddot{\varphi}_1 + [\mu + f'(u)]\dot{\varphi}_1 + D\varphi_1 = 0. \quad (2)$$

Вместо колебания вокруг нулевого положения, которое было при $u=0$, теперь происходит колебание вокруг смещенного положения равновесия (рис. 40). Общее решение уравнения (2) таково:

$$\varphi = \frac{f(u)}{D} + Ae^{-\frac{1}{2}[\mu + f'(u)]t} \cos(\omega t + \psi).$$

Если $f'(u) > 0$ или если $f'(u) < 0$, но по абсолютной величине меньше, чем μ , то ничего нового нет, колебания затухают. Но возможно

$$\delta' = \frac{1}{2}[\mu + f'(u)] < 0.$$

Тогда происходит *нарастание* колебаний. Этот случай несет в себе очень большие, существенные изменения по сравнению со случаем затухания колебаний. Физически нет возможности (принципиально!) ограничиться при наличии нарастания линейным уравнением. В случае же затухающих колебаний это возможно для большого круга задач.

Обратимся к другому примеру. Постараемся построить упрощенное дифференциальное уравнение катодного генератора. Но сначала повторим в двух словах некоторые общие сведения.

Изобретение катодной трубки¹ внесло переворот в радиотехнику. Действие катодной трубки основано на одном известном физическом явлении — эффекте Ричардсона. Металлический (вольфрамовый) катод нагрет примерно до 2500° . При этом с поверхности металла выходят электроны. Внутри металла всегда имеются свободные электроны, но выскочить при низкой температуре они не могут, так как есть препятствующее этому силовое поле. При нагревании металла скорости электронов увеличиваются, и некоторые из них могут выскочить. Электроны заряжены отрицательно, и при положительном напряжении на аноде все электроны, выделяемые металлом, летят на анод. Если напряжение на аноде отрицательно, то ток равен нулю (рис. 41). Но это слишком упрощенная картина. На самом деле ток меняется непрерывно (пунктирная

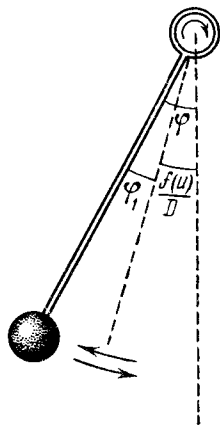


Рис. 40.

¹ [По современной терминологии — электронной лампы. Генератор также называется теперь не катодным, а ламповым.]

кривая на рис. 41). Это объясняется не принятым нами сначала во внимание взаимодействием электронов между собой. Явление это называется эффектом пространственного заряда.

Можно ввести третий электрод — сетку (рис. 42). Введение сетки — громадное достижение. На движение электронов сильнее всего влияет поле около катода (нити). Анод заряжен положительно. Сетка близка к катоду. Достаточно подать на сетку малый потенциал, чтобы около катода получилось сильное поле. Изменяя напряжение на сетке, мы сильно изменяем анодный ток.

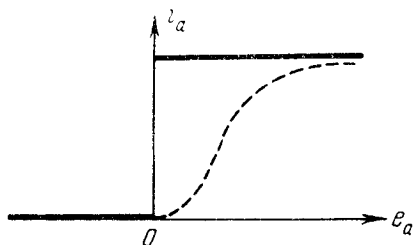


Рис. 41.

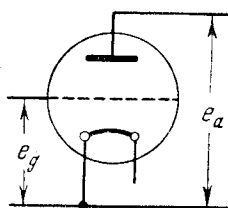


Рис. 42.

Сила тока зависит от напряжения на сетке и от напряжения на аноде. Эта зависимость имеет такой вид:

$$i_a = f(e_g + De_a),$$

где

$$D \ll 1.$$

Это значит, что действие анода на много слабее, чем действие сетки: анодом „перехватывается“ лишь часть силовых линий, исходящих от катода. Величину D иногда называют „прохват“ (по-немецки *Durchgriff*)¹.

Вот как, в общих чертах, действует катодная лампа. С ней можно сделать бесконечно много разных вещей. Нас сейчас интересует схема, показанная на рис. 43. Это одна из основных схем, которыми пользуется теперь беспроводная телеграфия. Ее впервые построили с другой целью, но оказалось, что в ней самопроизвольно возникают незатухающие колебания. Подбирая L и C , можно получить колебания с различным собственным периодом.

¹ [В настоящее время для величины D общепринятым является термин „проницаемость“].

Нам нужно написать дифференциальное уравнение этой схемы. Опыт показывает, что в ней могут происходить колебания, и теория должна позволить нам овладеть этим явлением (вначале им владели плохо). Уравнение мы составим с помощью метода, подобного тому, который используется для цепей постоянного тока, — метода Кирхгофа.

Обход по колебательному контуру дает уравнение

$$IR = -L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C}$$

При этом $i = \frac{dQ}{dt}$ (i — ток в ветви с конденсатором), но $i \neq I$, так как есть разветвление. Здесь

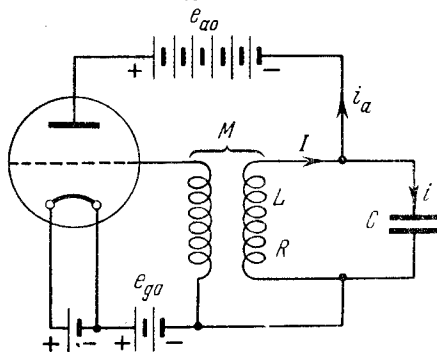


Рис. 43.

$$i = I - i_a,$$

и, следовательно,

$$\frac{dQ}{dt} = I - i_a. \quad (4)$$

Продифференцируем (3) и подставим в (4). Мы получаем:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{i_a}{C},$$

или

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\delta \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 i_a, \quad (5)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2\delta = \frac{R}{L}.$$

Из уравнения (5) еще ничего получить нельзя. Все дело в правой части. Что такое i_a ? Существует определенная характеристика лампы (зависимость анодного тока от управляющего напряжения), которая должна быть задана на основе экспериментальных данных. Пусть батареи анода и сетки имеют электродвижущие силы e_{a0} и e_{g0} . Анодное напряжение складывается из электродвижущей силы батареи и электродвижущей силы $-L \frac{dI}{dt}$ в катушке колебательного контура. Магнитное поле тока в контуре

пронизывает сеточную катушку, и в ней наводится электродвижущая сила $-M \frac{dI}{dt}$. Таким образом,

$$i_a = f \left[e_{g0} - M \frac{dI}{dt} + D \left(e_{a0} - L \frac{dI}{dt} \right) \right]. \quad (6)$$

Коэффициент M может быть как положительным, так и отрицательным. Его знак очень существенен. Если обе катушки навиты одинаково (рис. 44, а), то M положительно; если одна намотана влево, другая — вправо (рис. 44, б), то M отрицательно.

Из (5) и (6) получаем:

$$\ddot{I} + 2\delta \dot{I} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 f [e_{g0} - MI + D(e_{a0} - LI)]. \quad (7)$$

Мы решили первую задачу — установили дифференциальное уравнение.



Рис. 44.

Схема, которая была только что изложена, чрезвычайно упрощена.

1. Если рабочая точка лампы попадает в область $e_g > 0$, то электроны частью попадают на сетку. Мы не принимаем во внимание этот ток сетки. В настоящее время работают так, что сеточный ток очень мал. Но в технике иногда приходится с ним считаться.

2. Когда мы писали напряжение на аноде в виде $e_{a0} - LI$, мы не приняли во внимание составляющую RI напряжения на контуре. Легко видеть, что чем меньше логарифмический декремент контура, тем меньше эта составляющая по сравнению с $-LI$. Если предположить, что колебания близки к синусоидальной форме $A \cos \omega t$, то

$$RI \sim RA, \quad LI \sim A\omega L,$$

и отношение этих величин будет порядка

$$\frac{R}{\omega L} = \frac{d}{\pi}.$$

Таким образом, когда R/L мало по сравнению с ω , т. е. логарифмический декремент контура мал, составляющей RI можно пренебречь. Если бы мы приняли ее во внимание, то это очень усложнило бы задачу. Но для линейного случая можно провести и такое, более полное, рассмотрение.

Уравнение (7) — опять нелинейное уравнение, но вблизи равновесия можно свести задачу к линейному уравнению с постоянными коэффициентами так же, как в задаче о маятнике Фроуда. Можно написать приближенно, для малых $\dot{I}$, разлагая функцию f в ряд и отбрасывая члены порядка выше первого:

$$\ddot{I} + 2\delta \dot{I} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 f(e_{g0} + De_{a0}) - \omega_0^2 f'(e_{g0} + De_{a0})(M + DL)\dot{I}.$$

Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами и с постоянной правой частью.

Какие здесь возможны случаи? Если коэффициенты положительны, то нет ничего нового по сравнению с обычным затухающим контуром. Если коэффициент при первой производной от тока отрицателен, то будет нарастание колебаний. Где граница между обоими случаями?

Производная $f'(e_{g0} + De_{a0})$ от анодного тока — это крутизна характеристики S в данной рабочей точке (трубки в основном характеризуются двумя постоянными: S и D). При

$$2\delta + \omega_0^2 S(M + DL) > 0$$

имеет место затухание, но при

$$2\delta + \omega_0^2 S(M + DL) < 0 \quad (8)$$

будет нарастание колебаний. Таким образом, равенство

$$2\delta + \omega_0^2 S(M + DL) = 0$$

дает границу самовозбуждения генератора.

Когда имеет место (8), генератор сам раскачивается. Это неравенство можно написать немного иначе:

$$R + \frac{(M + DL)S}{C} < 0. \quad (9)$$

Отсюда следует одно интересное замечание. Так как

$$L > 0, \quad C > 0, \quad D > 0, \quad S > 0,$$

то для нарастания колебаний необходимо, чтобы было

$$M < 0,$$

т. е. нужно связать катушки вполне определенным образом (если одну катушку перевернуть, колебания пропадут). Чтобы величина $2\delta + \omega_0^2 S(M + DL)$ была отрицательна, нужно, кроме того, связать катушки достаточно сильно. Формула (9) — одна из основных формул радиотелеграфии.

Сделаем общее замечание. При $\delta < 0$ имеем:

$$x = \text{const} + Ae^{+|\delta|t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (10)$$

Нарастающие колебания получаются, если $A \neq 0$. Имеется положение равновесия $x = \text{const}$, но равновесие — неустойчивое. Пусть

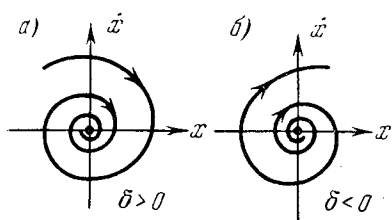


Рис. 45.

вначале x равно $\text{const} +$ сколь угодно малая величина. Это и значит, что A отлично от нуля. Дальнейший процесс описывается уравнением (10). Система все дальше и дальше отходит от положения равновесия. Смотря потому, будет ли $\delta < 0$ или $\delta > 0$, мы имеем дело с неустойчивым или с устойчивым положением равновесия.

Уже при рассмотрении консервативной системы мы встречали устойчивые и неустойчивые состояния равновесия¹. Они были связаны с определенными типами особых точек на фазовой плоскости. В случае центра равновесие устойчиво, в случае седла — неустойчиво. Применим здесь тот же подход — рассмотрим фазовую плоскость. Она будет теперь иметь совсем другой вид, чем в случае консервативной системы. Здесь нет континуума замкнутых интегральных кривых, а есть семейство спиралей. В консервативных системах в окрестности устойчивого равновесия колебания периодические. Здесь же колебания около устойчивого равновесия обязательно затухают, и система стремится возвратиться в равновесное состояние (рис. 45, а). Если имеет место неустойчивость, то система совершает нарастающие колебания и беспрестанно удаляется от состояния равновесия (рис. 45, б). Оба эти случая, как вы видели, могут осуществиться на практике. Особые точки типа, изображенного на рис. 45, а и б, называются *фокусами* (устойчивым и неустойчивым). Движение по интегральным кривым происходит по часовой стрелке.

¹ [См. 9-ую лекцию.]

Всякое исследование предполагает идеализацию. Написав линейное уравнение, мы ограничились малыми колебаниями. При $\delta > 0$ уравнение, которое мы писали, полностью могло охватить проблему. Здесь в течение всего процесса от $t=0$ и до $t=\infty$ у нас нет увеличения амплитуды. Если предпосылки малости выполнены вначале, то они еще лучше выполняются в дальнейшем. Линейное уравнение давало, таким образом, ответ на вопрос о том, каков *весь* процесс. В случае, когда $\delta < 0$, дело обстоит совсем иначе. Если даже задать такие начальные условия, при которых отклонение мало, то тем не менее наверняка наступит момент, когда наши предпосылки сделаются неправильными. Таким образом, в случае $\delta < 0$ линейное уравнение *принципиально* не может описывать процесс в его целостности, на неограниченном отрезке времени. При $\delta < 0$ процесс автоматически переходит в такую область, где необходимо исследование с помощью *нелинейного* уравнения. Абсурдно пользоваться линейным уравнением тогда, когда нарушена лежащая в его основе предпосылка; между тем процесс автоматически ведет к ее нарушению.

Речь шла о линейном однородном уравнении с *постоянными* коэффициентами. Как обстоит дело с другими линейными уравнениями, например с переменной правой частью? Могут ли они дать ответ на вопрос о том, что происходит в ламповом генераторе? Я утверждаю, что не могут.

Такие уравнения соответствуют системам, на которые действуют внешние силы, зависящие заданным образом от времени. Нас же здесь интересуют такие системы, которые *сами* определяют все элементы происходящего в них процесса. Дифференциальные уравнения таких систем не содержат времени явно. Такие системы называют *автономными*.

Если автономная система подчиняется *линейному* дифференциальному уравнению, то в общем случае оно имеет вид

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = c,$$

причем все a_i , а также c — постоянные (вообще говоря, коэффициенты a_i линейного уравнения могут зависеть от t). Движения линейных автономных систем либо затухают, либо нарастают. Ни одно не ведет к установившемуся периодическому процессу. Говоря точнее, незатухающие колебания могут получиться в линейной системе только тогда, когда система консервативна. Но этот случай для

нас сейчас мало интересен. В консервативной системе нет обмена энергии, характерного для генератора: генератор излучает, энергия колебаний пополняется за счет энергии батареи.

Все линейные системы имеют следующие свойства. Если y_1 — решение, то Cy_1 (C — постоянная) тоже решение. Если y_1 и y_2 — решения, то $y_1 + y_2$ — тоже решение. В линейной системе периодические решения могут быть только в отсутствие обмена энергии того типа, о котором только что говорилось (система консервативна). При этом амплитуда зависит всецело от начальных условий. Она не определяется самой системой. В генераторе получаются незатухающие колебания, амплитуда которых, как мы увидим¹, не зависит от начальных условий.

Таким образом ясно, что овладеть процессами в генераторе с помощью линейных уравнений невозможно.

Очень долго хотели подойти к незатухающим колебаниям „линейно“. Пришлось кардинально пересмотреть весь подход, отказаться от линейности. Правда, некоторые вопросы, относящиеся к генераторам, можно решить с помощью линейных уравнений. Я имею в виду вопросы устойчивости или неустойчивости равновесия. Но на чем остановится нарастание колебаний, какая установится амплитуда, — об этом на основе линейного уравнения сказать ничего нельзя. Для этого нужно перейти к нелинейным уравнениям, и здесь возникает необъятный круг вопросов. Я не могу говорить о них подробно, но я хотел бы все же их затронуть.

Чего можно ожидать в случае, если положение равновесия неустойчиво? Возможен уход изображающей точки в бесконечность. Возможен уход в другое устойчивое состояние равновесия. Наконец, — и это для нас физически самое интересное — возможно стремление к замкнутой кривой на фазовой плоскости, т. е. стремление к периодическому режиму. Каждому незатухающему колебательному процессу соответствует изолированная замкнутая кривая (рис. 46), к которой стремятся соседние кривые. Такая кривая чужда линейным уравнениям. Она называется *предельным циклом* Пуанкаре. На связь предельных циклов с незатухающими колебаниями указал А. А. Андронов. Начав с исследования нескольких простых случаев, он пришел к общему выводу о том, что математическим (геометрическим) образом незатухающих колебаний является предельный цикл.

¹ [См. 14-ую лекцию.]

Вопрос о фактическом нахождении предельных циклов оставим в стороне. Это — трудный вопрос. Но важно знать, что искать незатухающие колебания в неконсервативных системах — это на математическом языке значит искать предельные циклы.

Фундаментальное отличие от консервативных систем заключается здесь в том, что энергия системы сохраняется, несмотря на то, что система непрерывно затрачивает энергию. Откуда же берется энергия для восполнения потерь?

В маятнике Фроуда энергия поступает в систему вследствие вращения вала. В случае генератора источником энергии является анодная батарея. Излучаемая энергия в конечном итоге поставляется батареей.

Займемся задачей об установлении колебаний в ламповом генераторе. Задача нелинейная, и для того, чтобы можно было решить

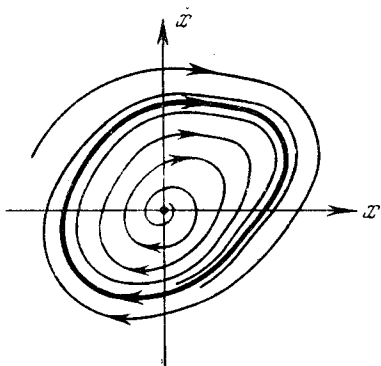


Рис. 46.



Рис. 47.

ее до конца, мы очень сильно ее упростим, допустим сильную идеализацию.

Для иллюстрации метода начнем с нелинейной задачи о затухающих колебаниях. Возьмем случай постоянного трения (это хорошо известный пример).

Пусть на горизонтальном столе лежит масса, привязанная к двум пружинам (рис. 47). Здесь очень неплоха следующая идеализация: сила трения по абсолютной величине постоянна и равна λmg . Сила трения положительна или отрицательна, смотря по тому, движется ли масса влево или вправо (так называемое *сухое* трение).

Задача математически ставится так:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= -\lambda mg & \text{при } \dot{x} > 0; \\ m\ddot{x} + kx &= +\lambda mg & \text{при } \dot{x} < 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, нужно решить два уравнения, причем одно

сменяет другое, когда меняется знак $\dot{x}$. В этом заключается нелинейность задачи.

Найдем решение первого уравнения. В силу этого решения скорость $\dot{x}$ в некоторый момент обращается в нуль. Далее скорость будет отрицательной. Нужно перейти в этот момент ко второму уравнению и взять для него в качестве начальных условий те условия, которые получились в конце движения, описанного первым уравнением. Таким образом, мы упрощаем задачу: вместо чрезвычайно трудной задачи, задаваемой нелинейным уравнением, решаем две задачи, задаваемые линейными уравнениями. Потом мы припасовываем их, т. е. составляем решение нелинейной задачи из отдельных кусков решений линейных задач.

Аналогичным образом можно рассмотреть задачу о колебании стрелки, опирающейся на иглоку; здесь также имеет место сухое трение.

Решения уравнений (11) изображают незатухающие синусоидальные колебания вокруг сменяющихся положений равновесия (рис. 48). При этом предполагается, что начальное отклонение превосходит по абсолютной величине $\lambda mg/k$ (в противном случае упругая сила уравновешивается силой трения покоя и тело остается в равновесии). В результате чередования кусков синусоидальных колебаний около двух положений равновесия движение затухает, причем легко видеть, как уменьшаются последовательные амплитуды. Если в начале амплитуда равна x_0 , то последующие амплитуды будут

$$x_0 - 2\lambda \frac{mg}{k}, \quad x_0 - 4\lambda \frac{mg}{k}, \quad \dots$$

Наступит момент, когда масса попадет в полосу

$$|x| < \lambda \frac{mg}{k},$$

и на этом движение прекратится. В противоположность линейному случаю, где покой наступает через бесконечное время, здесь он наступает через конечное время.

Вы видите, как просто и изящно здесь удается справиться с нелинейностью.

Представим себе другой случай. Пусть „трение“ направлено по движению, причем величина трения попрежнему постоянна. Решая задачу таким же способом, мы увидим, что амплитуда будет неограниченно расти. Пусть теперь, наряду с этим „тре-

нием“, есть вязкое трение, пропорциональное скорости и направленное против движения. Метод остается в силе, и задачу можно решить очень легко.

Случай, о котором идет речь, осуществляется в ламповом генераторе при соответствующей идеализации характеристики.

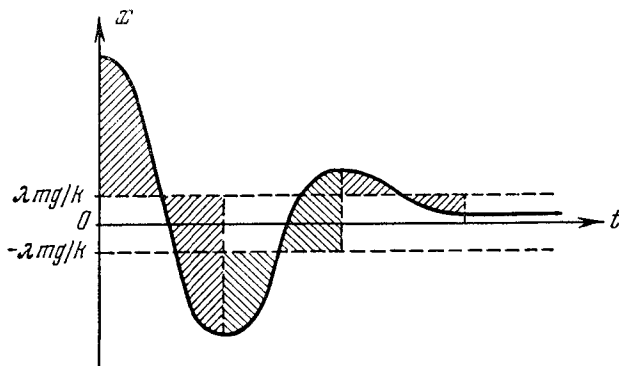


Рис. 48.

Если характеристика (рис. 49) очень крутая и если размах напряжения на сетке достаточно велик, то большая часть пути изображающей точки приходится на горизонтальные части характеристики. Можно поэтому идеализировать характеристику так, как показано жирными прямыми на рис. 49. Получается задача, аналогичная той, которую мы только что решали: два сменяющиеся линейные уравнения с постоянными правыми частями.

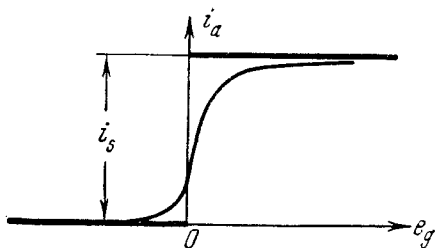


Рис. 49.

Мы рассмотрим в следующей лекции такой упрощенный ламповый генератор. Окажется, что в нем возможен периодический процесс, и мы найдем его амплитуду. Это не та амплитуда, которая действительно устанавливается, но для ответа на ряд принципиальных вопросов этого упрощенного рассмотрения достаточно.

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(15/XII 1930 г.)

Идеализированный ламповый генератор. Периодическое движение. Его устойчивость. Процесс установления колебаний. Предел применимости идеализации. Изменение мощности генератора при параллельном включении нескольких ламп. Коэффициент полезного действия генератора. Линейная система с одной степенью свободы; случай, когда движения аperiodичны. Действие внешней периодической силы на линейную систему с одной степенью свободы; предварительное понятие о резонансе.

В маятнике Фроуда и в ламповом генераторе происходит возрастание колебаний, положение равновесия неустойчиво. Линейное уравнение не может дать ответа, каков будет установившийся режим. Мы вступили, таким образом, в область нелинейных колебаний и нелинейных уравнений.

Процесс, происходящий в ламповом генераторе, нельзя охватить одним линейным дифференциальным уравнением, но, как уже было сказано, его можно описать в некоторых случаях с помощью двух различных линейных уравнений. При этом приходится работать с разрывными функциями. Этот прием идеализации приводит в некоторых случаях к хорошим, проверенным на опыте результатам.

Остановимся на практически исключительно важной задаче о том, каковы установившиеся колебания в ламповом генераторе. Для того, чтобы решить эту задачу, характеристику лампы мы принимаем разрывной. Мы идеализуем задачу так: когда сеточное напряжение отрицательно, анодный ток равен нулю; когда сеточное напряжение положительно, анодный ток равен току насыщения. Такая идеализация возможна в том случае, когда размахи сеточного напряжения очень велики по сравнению с интервалом сеточного напряжения, в котором происходит заметное нарастание анодного тока. Когда этот интервал пробегается очень быстро, такая идеализация качественно правильна и позволяет уяснить себе механизм явлений, хотя количественно она недостаточна.

В рассматриваемом ламповом генераторе (рис. 43)

$$e_g - e_{g0} = -M \frac{dI}{dt}.$$

Мы уже видели, что равновесие может быть неустойчиво при $M < 0$, т. е. если напряжение на сетке положительно тогда, когда

ток I в колебательном контуре нарастает. При сделанной идеализации характеристики (рис. 49) анодный ток:

$$i_a = i_s > 0 \quad \text{при} \quad \frac{dI}{dt} > 0;$$

$$i_a = 0 \quad \text{при} \quad \frac{dI}{dt} < 0.$$

Мы получаем следующие два дифференциальные уравнения:

$$\ddot{I} + 2\delta\dot{I} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 i_s \quad \text{при} \quad \dot{I} > 0; \quad (1)$$

$$\ddot{I} + 2\delta\dot{I} + \omega_0^2 I = 0 \quad \text{при} \quad \dot{I} < 0. \quad (2)$$

Как связать их решения? Начнем с такого состояния, при котором $\dot{I} > 0$. При этом нужно пользоваться уравнением (1). В какой-то момент $\dot{I}$ обращается в нуль и меняет знак и нужно перейти к уравнению (2). Ни ток, ни напряжение не могут иметь скачков. Поэтому в момент, когда мы переходим к уравнению (2), мы должны взять за начальные такие значения I и $\dot{I}$, которые получаются в этот момент из уравнения (1). При максимальном (по абсолютной величине) отрицательном значении I производная $\dot{I}$ опять проходит через нуль и становится положительной. Нужно опять прибегнуть к уравнению (1), соблюдая условие непрерывности I и $\dot{I}$, и т. д.

Оба уравнения дают затухающие колебания „периода“

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}},$$

но возле различных положений равновесия: уравнение (2) — около нуля, уравнение (1) — около $I = i_s$ (рис. 50). Если в начальный момент $I = I_0 > 0$, $\dot{I} = 0$ (максимум тока), то через полколебания (через время $\tau/2$) мы будем иметь ток

$$I' = -I_0 e^{-\delta\tau/2},$$

а после полного колебания (еще через время $\tau/2$) ток будет равен

$$I_1 = I_0 e^{-\delta\tau} + i_s (1 + e^{-\delta\tau/2}). \quad (3)$$

Периодическое повторение, т. е. незатухающее колебание, получится при условии, что

$$I_1 = I_0. \quad (4)$$

Если это возможно, то система уравнений (1) и (2) допускает периодическое решение. Требуя, чтобы наряду с (3) выполнялось условие (4), мы получаем

$$I_0 = I_0 e^{-\delta\tau} + i_s (1 + e^{-\delta\tau/2}),$$

откуда

$$I_0 = i_s \frac{1 + e^{-\delta\tau/2}}{1 - e^{-\delta\tau}}. \quad (5)$$

Такова амплитуда установившегося колебания. Она определяется параметрами системы и не зависит от начальных условий. Такая

установившаяся амплитуда — нечто существенно новое по отношению к линейным системам.

Если $\delta\tau$ мало по сравнению с единицей, то приближенно

$$I_0 = \frac{2i_s}{\delta\tau}. \quad (6)$$

При этом I_0 очень велико по отношению к току насыщения i_s . Каждое колебание состоит из двух половин „затухающих синусоид“. Чтобы количественно охарактеризовать отличие колебания от синусоидального,

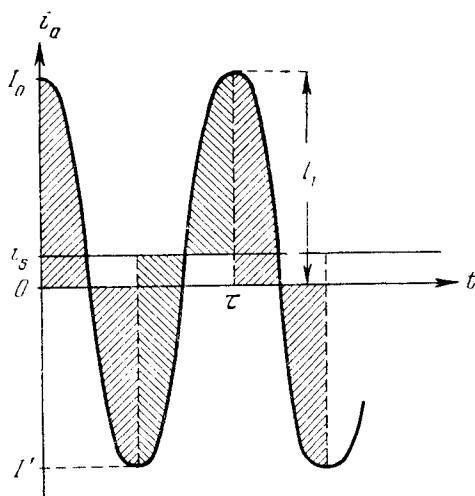


Рис. 50.

нужно разложить процесс в ряд Фурье. При $\delta\tau \ll 1$ колебания очень близки к синусоидальным.

С помощью уравнений (1) и (2) легко разрешить следующие вопросы:

1. Устойчиво ли найденное периодическое решение? Может случиться, что существует периодическое решение, но оно не соответствует реальному периодическому процессу. Нужно ввести новое понятие — понятие *устойчивого* периодического движения. Вопрос заключается в следующем: если слегка изменить начальные условия, то останется ли движение вблизи периодического или уйдет от него? Реальным периодическим процессам соответствуют только устойчивые периодические движения.

2. Устанавливается ли найденное периодическое колебание? (Мы доказали *возможность* периодического режима, но мы не доказали, что этот режим действительно устанавливается при любых начальных условиях).

Построим график I_1 как функции I_0 , т. е. график уравнения (3). Это будет прямая линия AB (рис. 51). Ее точка пересечения с прямой $I_1 = I_0$ соответствует найденному периодическому решению. Если мы начнем с произвольного начального значения I'_0 , меньшего, чем амплитуда периодического решения, то мы найдем значения амплитуды через период, через два периода и т. д. построением, показанным на рис. 51. Если в начале амплитуда больше значения, соответствующего периодическому решению (например, I''_0 на рис. 51), происходит аналогичный процесс с обратной стороны. Мы видим, что при любой начальной амплитуде точка, изображающая колебание генератора стремится к точке пересечения, показанной на рис. 51. Таким образом, мы приходим к выводу, что периодическое решение не только существует, но является *устойчивым* периодическим решением.

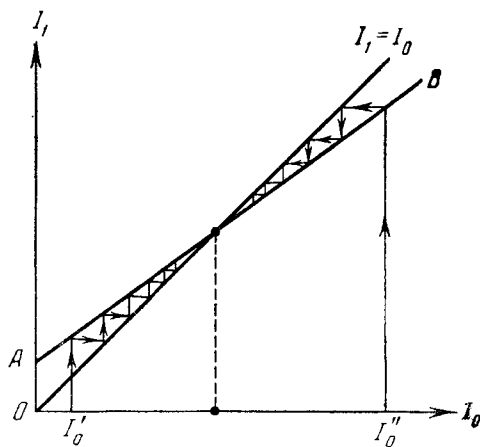


Рис. 51.

Откуда бы ни начался процесс в рассматриваемой схеме, при сделанной идеализации он обязательно придет к периодическому решению (5). На практике бывают случаи, когда периодические колебания существуют, но они устойчивы только „в малом“, только по отношению к достаточно малым изменениям начальных условий. С этим связаны известные явления „срыва“ в ламповом генераторе. Устойчивость „в малом“ и „в большом“ (т. е. по отношению к любому изменению начальных условий) — разные вещи. Положение равновесия может быть устойчиво „в большом“ (рис. 52, а) или только „в малом“ (рис. 52, б). Такие же случаи возможны и для периодических решений.

При сделанной идеализации лампового генератора получилась чрезвычайно простая математическая теория. Те же, в сущности,

рассуждения можно провести на фазовой плоскости ($I, \dot{I}$) и получить на ней замкнутую кривую — предельный цикл, — изображающую периодическое решение. На нее навиваются другие интегральные кривые. Это соответствует тому подходу, о котором уже говорилось¹. Такой подход здесь не сложнее и, быть может, нагляднее. Если усложнить идеализацию, исследование на фазовой плоскости становится, повидимому, необходимым.

Сравним рассмотренный идеальный случай с реальной схемой; сравним наши выводы с результатами опытов.

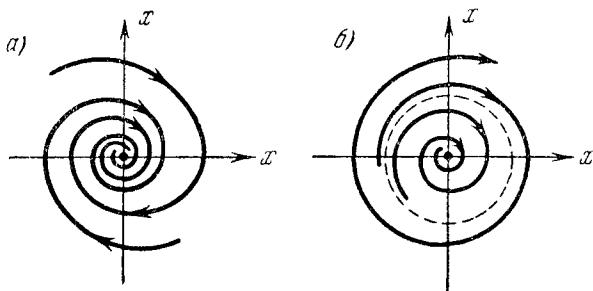


Рис. 52.

Поставим несколько вопросов, относящихся к зависимости установившихся колебаний от параметров. Вопросы эти сами напрашиваются.

Формулу (6) можно переписать в таком виде:

$$I_0 = \frac{2i_s}{d}, \quad (7)$$

где d — логарифмический декремент контура:

$$d = \delta\tau = \frac{R}{2L} \cdot 2\pi \sqrt{LC} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (8)$$

Будем уменьшать беспречно сопротивление контура R . Тогда согласно (7) и (8) нет предела увеличению амплитуды колебаний I_0 . Но в действительности такой предел существует (это видно хотя бы из того, что при беспречном росте I_0 беспречно растет мощность $RI_0^2/2$, поглощаемая в контуре).

Никакую идеализацию нельзя продолжать „до бесчувствия“. Нужно идеализировать со смыслом, помнить об ограничениях.

¹ [См. 9-ую лекцию.]

Очень распространена склонность верить в формулу „до конца“, в то время как всегда нужно уяснить себе, до каких пределов та или иная формула справедлива.

Мы молчаливо предположили, что напряжение на аноде

$$e_a = e_{a0} - LI$$

все время положительно.

Здесь LI — напряжение на индуктивности. Если колебания почти синусообразны, оно имеет амплитуду, равную ωLI_0 . Если $\delta \rightarrow 0$, эта амплитуда возрастает, и напряжение на аноде перестает быть все время положительным. Оно остается все время положительным в лучшем случае при

$$e_{a0} - \omega LI_0 = 0. \quad (9)$$

Рассмотрим этот оптимальный случай. Из (7), (8) и (9) получаем:

$$R = \frac{2Li_s}{\pi Ce_{a0}}. \quad (10)$$

Отсюда видно, что R нельзя делать бесконечно малым. Если взять R меньше значения (10), то в некоторые моменты анодного тока не будет, если даже напряжение на сетке положительно, и тогда наша теория не годится.

Очень легко изменить схему так, чтобы при R , меньшем, чем (10), опять войти в нужную область:

$$e_{a0} - \omega LI_0 > 0.$$

Это можно сделать путем перераспределения индуктивности контура (рис. 53, а) или добавления индуктивности в анодную цепь (рис. 53, б).

Поставим теперь вопрос: как „вытянуть“ из схемы возможно больше энергии? Сюда же относится такой вопрос. Представьте себе, что вы не меняете схему, но включаете в нее две тождественные лампы параллельно (рис. 54). Ясно, что при прочих равных условиях анодный ток i_a удваивается. Тогда колебательный ток тоже удваивается, а энергия увеличивается в 4 раза. Возьмите три лампы, — энергия увеличится в 9 раз и т. д. Но ведь мощность, отдаваемая батареей, растет пропорционально анодному току, т. е. числу ламп. Получается парадокс.

Его разрешение состоит в следующем. Если вначале лампа использована полностью, т. е. так что выполняется условие (9),

то для двух ламп теория уже не годится, так как $e_{a0} - \omega L \cdot 2I_0$ будет отрицательно. Для того, чтобы она оставалась справедливой, нужно увеличить R вдвое. Но если при включении второй лампы вы увеличите R вдвое, то энергия увеличится только вдвое. Итак, если лампа была использована полностью, то при добавлении второй лампы нужно изменить схему. Удвоением числа ламп действительно можно учетверить энергию, но только в том случае, если до этого лампы не были полностью использованы.

Интересен коэффициент полезного действия лампового генератора. В среднем за период батарея отдает мощность

$$W = \frac{e_{a0} i_s}{2},$$

а контур потребляет мощность

$$W_0 = \frac{I_0^2 R}{2}$$

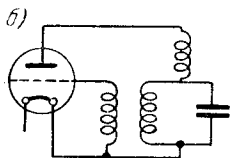
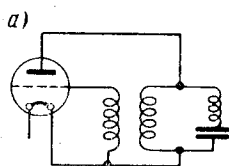


Рис. 53.

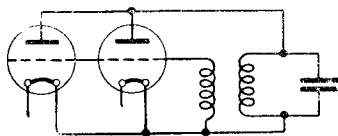


Рис. 54.

(полезная мощность). Под коэффициентом полезного действия здесь надо понимать

$$\eta = \frac{W_0}{W}.$$

При наибольшем токе, совместимом с условием применимости нашей теории, т. е. при выполнении условия (9), имеем:

$$\eta = \frac{2}{\pi} \approx 64\%.$$

Это — совершенно недостаточный коэффициент полезного действия. Для того, чтобы его увеличить, нужно изменить режим работы лампы. В этом направлении нет предела, нет принципиальных трудностей. Можно достигнуть без затруднений коэффициента полезного действия 97—98%.

Почему у нас амплитуда I_0 не зависит от M ? Из-за взятой нами исключительной характеристики. Мы приняли, что значение

анодного тока определяется исключительно *знаком* напряжения на сетке. Конечно, в случае реальной характеристики амплитуда тока зависит от величины коэффициента взаимной индукции.

На этом мы закончим рассмотрение систем, совершающих незатухающие колебания.

Вернемся к линейному уравнению

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Решая его подстановкой

$$x = e^{mt},$$

мы получаем для m характеристическое уравнение

$$m^2 + 2\delta m + \omega_0^2 = 0$$

с корнями

$$m_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Может случиться, что $\omega_0 < \delta$. Тогда оба корня действительны. Они оба положительны, если $\delta < 0$, и оба отрицательны, если $\delta > 0$. Пусть имеет место последний случай. Обозначим:

$$m_1 = -\lambda_1, \quad m_2 = -\lambda_2.$$

Тогда

$$x = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t}, \quad (11)$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Движение является *апериодическим* (неколебательным).

A и B — произвольные постоянные. Значения $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$ можно задать как угодно. При этом

$$x_0 = A + B,$$

$$\dot{x}_0 = -\lambda_1 A - \lambda_2 B.$$

Пусть начальные условия таковы, что A и B имеют один и тот же знак. Тогда x не обращается в нуль ни при каком конечном t . В самом деле, $x = 0$ только если

$$-\frac{A}{B} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t};$$

но это равенство не может выполняться, так как левая часть отрицательна, а правая — положительна. Таким образом, x асимптотически стремится к нулю, монотонно убывая.

Если A и B имеют различные знаки, x может один раз обратиться в нуль при конечном t .

Рассмотрим последний случай, когда

$$\delta = \omega_0, \quad \lambda_1 = \lambda_2.$$

При этом решение (11) принимает вид

$$x = Ae^{-\lambda t}. \quad (12)$$

Если мы захотим приспособить такое решение к начальным условиям, то нам нехватит одной постоянной интегрирования. Не трудно, однако, показать, что в этом специальном случае, наряду с решением вида (12), имеется решение вида $te^{-\lambda t}$ и общее решение таково:

$$x = Ae^{-\lambda t} + Bte^{-\lambda t}.$$

В нем опять имеются две независимые константы, и его можно приспособить к любым начальным условиям.

Случай, когда λ_1 и λ_2 почти равны друг другу, и случай, когда они в точности равны, физически близки друг другу. Замечу, что этот случай важен в теории измерительных приборов. Часто требуется, чтобы измерительный прибор как можно быстрее приходил в положение равновесия. Оказывается, это требование выполняется как раз тогда, когда характеристическое уравнение имеет равные корни.

При $\delta < 0$ имеем:

$$x = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t},$$

т. е. x представляет собой аperiодически возрастающую величину. Если система выведена из положения равновесия, то со временем x растет беспредельно. Здесь — опять неустойчивое положение равновесия (а значит, опять линейное дифференциальное уравнение не может полностью описать процесс). Соответствующая ему особая точка называется *неустойчивым узлом* (рис. 55, а). Может быть и устойчивый узел ($m_{1,2} < 0$, рис. 55, б).

Перейдем к поведению колебательных систем под действием внешних сил. Этот вопрос — один из основных в теории колебаний. Мы ограничимся линейными системами.

Мы рассматривали маятник, груз на пружине, балку, контур с емкостью и индуктивностью. Как ведут себя такие системы под действием сил, заданных как функция времени? Основное, заме-

чательное явление, которое при этом наблюдается, — это явление *резонанса*.

Мост можно рассматривать в первом приближении, как систему с одной степенью свободы. Ритмическая (периодическая) сила возникает, например, тогда, когда по нему в ногу идут войска.

Всякий кабель в первом приближении — цепь с емкостью и индуктивностью. Периодическая сила возникает тогда, когда кабель питается от машины переменного тока.

Во всех этих случаях, пока частота внешней силы p значительно меньше собственной частоты системы ω_0 , колебания слабые. Пусть амплитуда внешней силы остается постоянной, но меняется ее частота. Когда p становится близка к ω_0 , начинается сильная раскачка. Мы называем это явление резонансом. Если p значительно превышает ω_0 , опять все успокаивается.

Пусть некоторая периодическая сила дает амплитуду смещения, скажем, 1 мм. При неизменности амплитуды внешней силы изменение ее частоты на 30% может увеличить амплитуду смещения, скажем, до 1 м. Генератор электродвижущей силы в 1000 вольт может создать в кабеле напряжение в 10 000—20 000 вольт. При резонансе колебания могут иметь другой *порядок* величины, чем в отсутствие резонанса.

Резонанс может быть весьма опасным. Случалось, что вследствие резонанса разрывались валы пароходов. В радиотехнике резонанс играет положительную роль. Он применяется для того, чтобы приемник сильно реагировал на определенную частоту, и дает колоссальное увеличение чувствительности для данной частоты.

Резонанс играет большую роль и в оптике, в явлениях дисперсии и абсорбции. Тот факт, что ртутный пар для некоторых (немногих) частот непрозрачен, а для всех остальных прозрачен, объясняется резонансом.

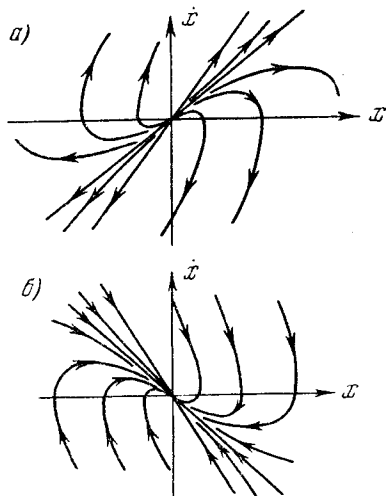


Рис. 55.

Известно большое значение резонанса в акустике. Благодаря резонансу опытное ухо различает, что аккорд состоит из таких-то нот.

Явление резонанса связано со *всей формой воздействия*, оно охватывает длительный промежуток времени. Нельзя говорить: резонанс наступил в такой-то момент. Здесь существенное значение имеет понятие *процесса*, а не понятие состояния в данный момент.

Уравнение

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0 \quad (13)$$

имеет такой смысл: масса, умноженная на ускорение, равна сумме упругой силы и силы трения. Теперь к ним прибавляется внешняя сила — заданная функция времени:

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = f(t). \quad (14)$$

Укажем некоторые свойства этого неоднородного уравнения (уравнения с правой частью).

В случае однородного уравнения (13), если x_1 и x_2 являются решениями, то

$$x = Ax_1 + Bx_2$$

тоже есть решение. Для уравнения с правой частью это уже несправедливо. Но пусть далее

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t) \quad (15)$$

и пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — решения уравнения (14), соответствующие каждому из слагаемых в правой части (15). Тогда уравнение (14) имеет решение

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Так как очень широкий класс функций можно представить в виде суммы гармонических колебаний, мы приходим к выводу, что для многих задач достаточно уметь решить уравнение (14) для случая, когда справа стоит один синусоидальный член. Мы ограничимся этим случаем. Фазу правой части возьмем равной нулю (так как начало отсчета времени можно выбрать произвольно).

Пусть x_0 — общее решение однородного уравнения (13). Если x_1 — какое-то частное решение неоднородного уравнения (14), то

$$x = x_0 + x_1$$

есть общее решение неоднородного уравнения. Но $x_1 + \frac{x_0}{2}$ также является частным решением (14), а значит, и

$$x = x_1 + \frac{x_0}{2} + x_0$$

также есть общее решение неоднородного уравнения. Из этого видно, что разделение общего решения неоднородного уравнения на общее решение однородного и частное решение неоднородного неоднозначно. Почему приходится останавливаться на этом? Принято говорить: колебание, определяемое уравнением (14), есть сумма вынужденного и собственного колебаний. Это предполагает, что существует однозначное разбиение на вынужденное и собственное колебание. Но, как было только что сказано, разделение решения неоднозначно. Как вяжется одно с другим? Тут недостает одного уточнения. Когда мы имеем вынужденное колебание, мы ищем *периодическое* частное решение неоднородного уравнения. Такое решение — единственное, и, следовательно, разбиение общего решения неоднородного уравнения на *периодическое* решение и общее решение однородного уравнения однозначно.

ПЯТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(18/XII 1930 г.)

Действие внешней синусоидальной силы на линейную систему с одной степенью свободы. Установившиеся колебания. Энергетические соотношения. Резонанс для заряда (смещения) и для тока (скорости). Резонансные кривые. Измерение декремента. Фазовые соотношения. Измерение декремента с помощью электродинамометра.

Вынужденные колебания гармонического осциллятора описываются линейным дифференциальным уравнением второго порядка с переменной правой частью. Нас интересует случай, когда правая часть синусоидальна, т. е. дифференциальное уравнение приводится к виду

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = E \cos pt, \quad (1)$$

где в механическом случае x — смещение и

$$E = \frac{E'}{m} \quad (1a)$$

есть общее решение неоднородного уравнения. Но $x_1 + \frac{x_0}{2}$ также является частным решением (14), а значит, и

$$x = x_1 + \frac{x_0}{2} + x_0$$

также есть общее решение неоднородного уравнения. Из этого видно, что разделение общего решения неоднородного уравнения на общее решение однородного и частное решение неоднородного неоднозначно. Почему приходится останавливаться на этом? Принято говорить: колебание, определяемое уравнением (14), есть сумма вынужденного и собственного колебаний. Это предполагает, что существует однозначное разбиение на вынужденное и собственное колебание. Но, как было только что сказано, разделение решения неоднозначно. Как вяжется одно с другим? Тут недостает одного уточнения. Когда мы имеем вынужденное колебание, мы ищем *периодическое* частное решение неоднородного уравнения. Такое решение — единственное, и, следовательно, разбиение общего решения неоднородного уравнения на *периодическое* решение и общее решение однородного уравнения однозначно.

ПЯТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(18/XII 1930 г.)

Действие внешней синусоидальной силы на линейную систему с одной степенью свободы. Установившиеся колебания. Энергетические соотношения. Резонанс для заряда (смещения) и для тока (скорости). Резонансные кривые. Измерение декремента. Фазовые соотношения. Измерение декремента с помощью электродинамометра.

Вынужденные колебания гармонического осциллятора описываются линейным дифференциальным уравнением второго порядка с переменной правой частью. Нас интересует случай, когда правая часть синусоидальна, т. е. дифференциальное уравнение приводится к виду

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = E \cos pt, \quad (1)$$

где в механическом случае x — смещение и

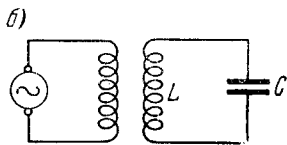
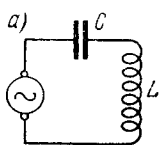
$$E = \frac{E'}{m} \quad (1a)$$

(E' — амплитуда внешней силы, m — масса), а в электрическом случае x — заряд конденсатора и

$$E = \frac{E'}{L} \quad (16)$$

(E' — амплитуда внешней э. д. с., L — индуктивность). Внешняя э. д. с. может быть непосредственно включена в контур, а может создаваться посредством индукции (рис. 56, а и б).

Часто для решения уравнения (1) пользуются комплексными выражениями. Правую часть заменяют выражением Ee^{ipt} , и получается *новое* уравнение



$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = Ee^{ipt}. \quad (2)$$

Действительная часть решения уравнения (2) является решением уравнения (1).

Рис. 56.

Уравнение (2) решается подстановкой

$$x = Ce^{ipt}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получаем:

$$(-p^2 + 2\delta ip + \omega_0^2) Ce^{ipt} = Ee^{ipt},$$

откуда

$$C = \frac{E}{\omega_0^2 - p^2 + 2\delta ip}. \quad (4)$$

Нас интересует действительная часть (3). Пользуясь методом, изложенным в начале курса¹, мы находим, что эта действительная часть имеет вид

$$x = X \cos(pt - \varphi), \quad (5)$$

причем

$$X^2 = CC^*, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{\operatorname{Im} C}{\operatorname{Re} C}. \quad (6)$$

¹ [См. 3-ю лекцию.]

Подставляя в (6) выражение (4), получаем:

$$X = \frac{E}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}; \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta p}{\omega_0^2 - p^2}. \quad (8)$$

Если $\omega_0^2 - p^2 > 0$, то наименьшее положительное значение φ , определяемое уравнением (8), находится в первом квадранте. Если $\omega_0^2 - p^2 < 0$, оно находится во втором квадранте.

Мы нашли одно из частных решений неоднородного уравнения. Общее решение мы получим, прибавив к нему общее решение однородного уравнения:

$$x = X \cos(pt - \varphi) + Ae^{-\delta t} \cos(\omega t - \psi), \quad (9)$$

где

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2.$$

Здесь A и ψ — произвольные постоянные. Для того, чтобы удовлетворить любым начальным условиям $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, при $t = 0$, нужны как раз две произвольные постоянные.

Как уже было сказано в прошлой лекции, деление общего решения неоднородного уравнения на две части — решение неоднородного уравнения и общее решение однородного — неоднозначно. Но в данном случае можно однозначно разделить общее решение неоднородного уравнения на такие две части: *периодическое* решение неоднородного уравнения + общее решение однородного.

Если ждать достаточно долгое время, то собственные колебания делаются как угодно близки к нулю. Через достаточно долгое время, каковы бы ни были начальные условия, остается чисто периодическое колебание. Поэтому оно представляет самостоятельный физический интерес.

Все свойства, о которых мы будем говорить, относятся к этому *установившемуся* процессу. Они полностью сказываются лишь через достаточно долгое время. Поэтому, например, говорить о резонансе в первые мгновения после включения внешней силы бессмысленно.

Вынужденное периодическое колебание имеет частоту p , равную частоте действующей силы и, вообще говоря, отличную от ω . Частота, с которой колеблется осциллятор в установившемся

режиме при вынужденных колебаниях, совершенно не зависит от его собственной частоты.

Заметим теперь, что если смещение или заряд меняется по закону (5), то скорость (или ток) будет

$$\dot{x} = -pX \sin(pt - \varphi). \quad (10)$$

При собственных (незатухающих) колебаниях сумма кинетической и потенциальной энергий остается постоянной. Остается ли эта сумма постоянной также и при синусоидальных вынужденных колебаниях? Подставим в выражение полной энергии

$$W = \frac{kx^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

выражения (5) и (10), полученные для x и $\dot{x}$. Это дает

$$W = \frac{k}{2} X^2 \cos^2(pt - \varphi) + \frac{m}{2} p^2 X^2 \sin^2(pt - \varphi).$$

Отсюда видно, что полная энергия непостоянна. Все время идет переход энергии из источника в рассматриваемую систему и обратно. Полная энергия постоянна только при

$$k = mp^2.$$

Мы приходим обратным путем к уже известному результату: без внешней силы осциллятор колеблется с частотой, равной $\sqrt{k/m}$. Мы видим далее, что, несмотря на синусоидальность колебания, не имеет места равенство средней кинетической и средней потенциальной энергии. Если $p^2 > \omega_0^2$, то $\bar{T} > \bar{U}$; если $p^2 < \omega_0^2$, то $\bar{T} < \bar{U}$. Равенство средних потенциальной и кинетической энергий играет важную роль для собственных колебаний. Но то, к чему мы привыкли для собственных колебаний, нельзя переносить на вынужденные.

При прочих равных условиях амплитуда вынужденных колебаний X пропорциональна амплитуде действующей силы E . Амплитуда и фаза сильно зависят от того, в каком отношении находится период внешней силы к периоду собственных колебаний.

Будем исследовать, при каком соотношении частоты внешней силы и собственной частоты наступает резонанс (понимая под резонансом максимум амплитуды вынужденных колебаний). Здесь возникают различные задачи, ведущие к различным резонансам.

1. Пусть $\omega_0 = \text{const}$, изменяется p . Продифференцировав X по p , легко найти, что максимум амплитуды смещения или заряда X будет при

$$p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

Таким образом, „резонансная“ частота внешней силы не равна собственной частоте ω_0 и не равна „частоте“ затухающего осцилляторного процесса $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Резонанс наступает не при изохронизме, а при p , несколько меньшем, чем ω_0 .

2. Пусть попрежнему $\omega_0 = \text{const}$, изменяется p ; но теперь мы будем интересоваться максимумом амплитуды тока или скорости $\dot{X}$. Нужно, следовательно, искать максимум выражения

$$\dot{X} \equiv pX = \frac{pE}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}} = \frac{E}{\sqrt{4\delta^2 + \left(\frac{\omega_0^2 - p^2}{p}\right)^2}}. \quad (11)$$

Ясно, что максимум будет при

$$\omega_0^2 - p^2 = 0,$$

т. е. здесь резонанс наступает тогда, когда период внешней силы равен периоду незатухающего колебания.

Для максимальных значений амплитуды заряда и тока имеем:

$$X_{\max} = \frac{E}{2\delta\omega_0}, \quad \dot{X}_{\max} = \frac{E}{2\delta}. \quad (12)$$

Итак, резонанс в смысле максимума амплитуды тока и резонанс в смысле максимума амплитуды заряда возникают при *различных* значениях p . Насколько велика разница между ними? X максимально при

$$p^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2,$$

а $\dot{X}$ максимально при

$$p^2 = \omega_0^2.$$

Напишем для первого случая:

$$p^2 = \omega_0^2 \left(1 - 2 \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \right),$$

или, поскольку

$$\frac{\delta}{\omega_0} = \frac{d}{2\pi},$$

где d — логарифмический декремент,

$$p^2 = \omega_0^2 \left(1 - 2 \frac{d^2}{4\pi^2} \right).$$

Пусть $d = 1/100$. Тогда $d/2\pi = 1/600$, а $(1/600)^2$ — очень малая величина. При очень тонких опытах можно констатировать отличие между обоими значениями p . Но почти всегда им можно пренебречь и считать, что оба резонанса наступают, когда $p = \omega$ (здесь можно не различать ω_0 и $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$).

3. Когда наступает максимум X , если меняется ω_0 ? Это случай, который имеет место в практике беспроводной телеграфии, когда настраивают приемник, меняя емкость конденсатора. Как легко видеть, здесь максимум опять наступает при $\omega_0 = p$.

Можно сказать, что если затухание мало, резонанс наступает при изохронизме. Этого приближения часто достаточно.

Мы выяснили, когда наступает максимум. Но насколько он резкий? Насколько остра кривая резонанса? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, воспользуемся другим написанием формул (7) и (11), — тем написанием, которым пользовался Релей. Из формулы (8) легко получить для $\sin \varphi$ выражение

$$\sin \varphi = \frac{2\delta p}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}. \quad (13)$$

На основании (13) можно написать для X и $\dot{X}$ очень простые выражения:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{E \sin \varphi}{2\delta p}; \\ \dot{X} &= \frac{E \sin \varphi}{2\delta}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Допустим, что нас интересует зависимость от расстройки максимального значения кинетической энергии, т. е. величины

$$T = \frac{m}{2} \dot{X}^2. \quad (15)$$

Мы знаем, что $T = T_{\max}$ при $\omega_0 = p$, т. е. при $\sin \varphi = 1$. Поэтому на основании (14), (15) и (8) получаем:

$$\frac{T_{\max} - T}{T} = \operatorname{ctg}^2 \varphi = \left(\frac{\omega_0^2 - p^2}{2\delta p} \right)^2, \quad (16)$$

откуда

$$\frac{T}{T_{\max}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0^2 - p^2}{2\delta p} \right)^2}.$$

Разделим числитель и знаменатель в скобке на $\omega_0 p$ и введем „степень изохронизма“

$$\frac{p}{\omega_0} = q. \quad (17)$$

Мы получим:

$$\frac{T}{T_{\max}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{q} - q \right)^2 / \left(\frac{d}{\pi} \right)^2}. \quad (18)$$

Это — очень удобное и сравнительно простое выражение. Из него видно, что отношение $T/T_{\max}$ зависит не от трех отдельных переменных p , ω_0 и δ , а от двух их комбинаций (q и d). В этом заключается одна из причин того, почему так существенен логарифмический декремент.

Возьмем, например, $d/\pi = 0,01$, $q = 0,8$. Тогда

$$\frac{T}{T_{\max}} = \frac{1}{1 + 2 \cdot 10^3}.$$

Из этого примера ясно, почему резонанс имеет такое огромное значение. Здесь достаточно расстройки на $20^3/0$, чтобы энергия упала в 2000 раз.

Энергия при резонансе может быть и в миллионы раз больше, чем вдали от резонанса. Этого удалось достигнуть сравнительно недавно с помощью пьезокварца. Амплитуды колебаний кварцевой пластинки в „нормальных“ условиях порядка всего лишь 10^{-6} мм, но при резонансе кварцевые пластинки иной раз разлетаются.

Резонансная кривая, изображающая формулу (18), дает возможность экспериментально определить логарифмический декремент.

Вернемся к формуле (16). При малых расстройках, т. е. когда ω_0 мало отличается от p , приближенно

$$(\omega_0 + p)(\omega_0 - p) = 2p(\omega_0 - p),$$

и формула (16) дает:

$$\frac{T_{\max} - T}{T} = \frac{(\omega_0 - p)^2}{\delta^2} = \frac{\left(\frac{\omega_0 - p}{\omega_0} \right)^2}{\left(\frac{d}{2\pi} \right)^2}.$$

Энергия падает вдвое по сравнению с резонансом при

$$\frac{\omega_0 - p}{\omega_0} = \frac{d}{2\pi}. \quad (19)$$

Определив расстройку, при которой ордината резонансной кривой равна половине ординаты в максимуме, можно вычислить по формуле (19) логарифмический декремент.

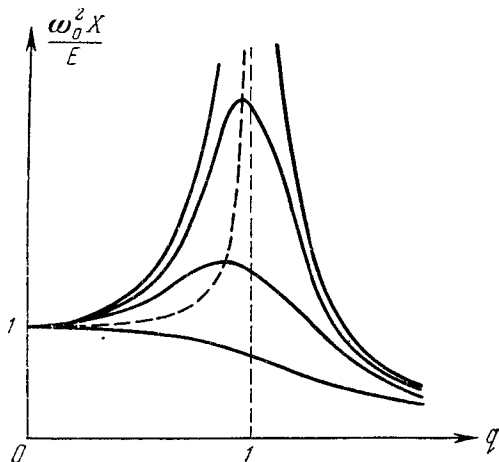


Рис. 57.

$$\left| \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \right| = \frac{2\pi}{d},$$

т. е. острота настройки обратно пропорциональна логарифмическому декременту контура.

При резонансе на основании (12) и (16) амплитуда тока

$$I = \dot{X} = \frac{E}{2\delta} = \frac{E'}{R}.$$

Индуктивность и емкость друг друга компенсируют, и получается такое же соотношение между током и электродвижущей силой, как в случае постоянного тока. Фаза тока совпадает при этом с фазой электродвижущей силы так же, как если бы мы имели чисто омическое сопротивление.

Приведем несколько резонансных кривых для амплитуды смещения ($\omega_0^2 X/E$) в зависимости от q , соответствующих различным значениям декремента (рис. 57). Из них видно, как максимум смещается в зависимости от декремента.

Как изменяется сдвиг фаз между внешней силой, с одной стороны, и током или зарядом в контуре — с другой, в зависимости от расстройки?

Формулу (8) также не трудно записать через параметры $d = 2\pi\delta/\omega_0$ и $q = p/\omega_0$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{qd}{\pi(1 - q^2)}.$$

Если частота внешней силы очень мала, то практически $\operatorname{tg} \varphi = 0$, т. е. смещение изменяется в фазе с внешней силой. Если $p \rightarrow \infty$, то $\operatorname{tg} \varphi$ тоже стремится к нулю, но будучи отрицательным. Следовательно, сдвиг фаз стремится к π : в тот момент, когда внешняя сила действует вправо, смещение направлено влево. При резонансе ($q = 1$) сдвиг фаз равен $\pi/2$. Чем меньше d , тем меньше нужно удалиться от резонанса, чтобы сдвиг фаз стал практически равен 0 или π (рис. 58).

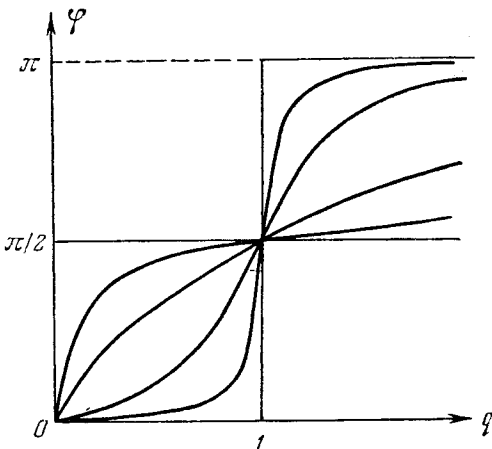


Рис. 58.

То обстоятельство, что между внешней силой и смещением должен существовать сдвиг фаз, а также какой именно он должен

быть, можно вывести из простых энергетических соображений.

Рассмотрим установившийся режим. Умножим уравнение

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = E' \cos pt$$

на i и усредним за полный период. Это дает:

$$R \overline{i^2} = E' \overline{\cos pt \cdot i}. \quad (20)$$

Справа стоит средняя мощность, отдаваемая внешним источником, слева — средняя потребляемая мощность. Будем приближаться к резонансу (оставляя E' постоянным); i растет по амплитуде, но $\overline{i^2}$ растет гораздо быстрее. Отсюда ясно, что соотношение (20) не могло бы оставаться правильным, если бы между внешней э. д. с. и током (а следовательно, и зарядом) не было меняющейся с настройкой разности фаз.

Можно простым образом вывести из энергетического соотношения (20) зависимость амплитуды тока от φ . Подставим в (20)

$$i = \dot{x} = -\dot{X} \sin(pt - \varphi).$$

Получаем:

$$R\dot{X}^2 \overline{\sin^2(pt - \varphi)} = -E'\dot{X} \overline{\cos pt \cdot \sin(pt - \varphi)}.$$

Но

$$\overline{\sin^2(pt - \varphi)} = \frac{1}{2}, \quad \overline{\cos pt \cdot \sin(pt - \varphi)} = -\frac{\sin \varphi}{2}.$$

Следовательно,

$$R\dot{X}^2 = \dot{X}E' \sin \varphi,$$

откуда мы снова приходим к формуле (14):

$$\dot{X} = \frac{E'}{R} \sin \varphi.$$

Как мы теперь видим, это релеевское написание формулы для амплитуды имеет довольно глубокий физический смысл. Связь между амплитудой тока и фазой диктуется энергетическими требованиями. Раздельное рассмотрение амплитуды и фазы не выявляет той связи между их изменениями, которая обусловлена энергетическими соотношениями. Есть ряд физических явлений, где эта связь существенна.

Рассмотрим электродинамометр. В нем действует между катушками, в которых текут переменные токи i_1 и i_2 , пара сил с моментом

$$M \sim i_1 i_2. \quad (21)$$

Пусть ток i_1 берется прямо от источника переменной в. д. с. (через омическое сопротивление), а ток i_2 течет в резонансном контуре (рис. 59). В этом случае

$$i_1 = \alpha E \sin pt, \quad i_2 = \dot{X} \sin(pt - \varphi) \quad (22)$$

(α — постоянная). На основании (14), (21) и (22)

$$M = \text{const} \cdot \sin \varphi \cdot \overline{\sin pt \sin(pt - \varphi)}.$$

Но

$$\overline{\sin pt \cdot \sin(pt - \varphi)} = \frac{\cos \varphi}{2},$$

и, следовательно,

$$M = \text{const} \cdot \sin \varphi \cos \varphi = \text{const} \cdot \sin 2\varphi.$$

Соответствующую этой формуле зависимость момента от настройки изображает особая резонансная кривая (рис. 60). При настройке контура в резонанс

$$\sin \varphi = 1, \quad \cos \varphi = 0,$$

т. е. в случае резонанса момент сил отсутствует.

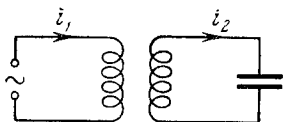


Рис. 59.

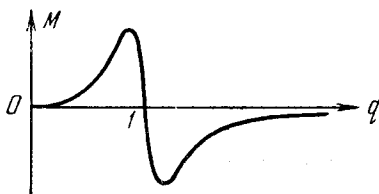


Рис. 60.

Максимум и минимум M соответствуют $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, т. е. $\text{tg } \varphi = \pm 1$, или

$$\frac{2\delta p}{\omega_0^2 - p^2} = \pm 1.$$

Это — то самое соотношение (19):

$$\left| \frac{\omega_0 - p}{\omega_0} \right| = \frac{d}{2\pi},$$

которое мы получили раньше для случая, когда энергия в контуре падает вдвое по сравнению с резонансом.

Таким образом, из резонансной кривой для M (найдя максимум и минимум) также можно определить декремент. Кроме того, получается *нулевой* метод нахождения резонанса, позволяющий устанавливать настройку в резонанс с очень большой точностью.

Мы рассмотрели простой электрический пример — электродинамометр, но аналогичные вещи встречаются в гидродинамике: например, взаимодействие двух пульсирующих шаров, исследованное Бьеркнесом и послужившее моделью, с помощью которой старались объяснить многие явления.

На примере электродинамометра хорошо видна роль разности фаз при взаимодействии между колебательными системами.

Рассмотренные явления важны при взаимодействии между резонаторами. Этим вопросам значительное внимание уделил П. Н. Лебедев¹.

Другой случай, где основную роль играют фазовые соотношения между внешней силой и возбуждаемым колебанием, встречается в оптике, в теории дисперсии и поглощения².

ШЕСТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(25/XII 1930 г.)

Резонанс в технике. Резонанс в оптике; фазовые соотношения. Неустойчивый режим; нарастание колебаний в затухающем осцилляторе. Резонанс в незатухающем осцилляторе. Мнимое опровержение теории относительности. Сила, состоящая из ряда синусоидальных составляющих. Физическое значение разложения Фурье. Противоречие между требованиями селективности и правильного воспроизведения модуляции. Ошибочная точка зрения Флеминга в вопросе о реальности боковых полос.

Повторим кратко свойства резонанса, в случае когда действует синусоидальная сила. При установившемся режиме происходит незатухающее синусоидальное колебание с периодом действующей силы. Амплитуда смещения максимальна, когда период действующей силы приблизительно совпадает с собственным периодом. Максимум выражен тем резче (резонансная кривая тем острее), чем меньше логарифмический декремент. Если частота внешней силы p гораздо меньше собственной частоты ω_0 , то смещение и сила почти синфазны. При резонансе (при $p = \omega_0$) сдвиг фаз между смещением и внешней силой равен 90° , т. е. сила максимальна при прохождении через положение равновесия. Если $p \gg \omega_0$, то смещение и сила имеют противоположные фазы.

Здесь самое главное — это резкий максимум амплитуды при синхронизме. Бывали случаи, когда цепные мосты разрушались, когда по ним шла в ногу колонна солдат. (Отчасти из-за подоб-

¹ [П. Н. Лебедев. Экспериментальное исследование пондеромоторного действия волн на резонаторы. Избр. соч. под ред. А. К. Тимирязева, М., 1949.]

² [См. 16-ую лекцию.]

Рассмотренные явления важны при взаимодействии между резонаторами. Этим вопросам значительное внимание уделил П. Н. Лебедев¹.

Другой случай, где основную роль играют фазовые соотношения между внешней силой и возбуждаемым колебанием, встречается в оптике, в теории дисперсии и поглощения².

ШЕСТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(25/XII 1930 г.)

Резонанс в технике. Резонанс в оптике; фазовые соотношения. Неустойчивый режим; нарастание колебаний в затухающем осцилляторе. Резонанс в незатухающем осцилляторе. Мнимое опровержение теории относительности. Сила, состоящая из ряда синусоидальных составляющих. Физическое значение разложения Фурье. Противоречие между требованиями селективности и правильного воспроизведения модуляции. Ошибочная точка зрения Флеминга в вопросе о реальности боковых полос.

Повторим кратко свойства резонанса, в случае когда действует синусоидальная сила. При установившемся режиме происходит незатухающее синусоидальное колебание с периодом действующей силы. Амплитуда смещения максимальна, когда период действующей силы приблизительно совпадает с собственным периодом. Максимум выражен тем резче (резонансная кривая тем острее), чем меньше логарифмический декремент. Если частота внешней силы p гораздо меньше собственной частоты ω_0 , то смещение и сила почти синфазны. При резонансе (при $p = \omega_0$) сдвиг фаз между смещением и внешней силой равен 90° , т. е. сила максимальна при прохождении через положение равновесия. Если $p \gg \omega_0$, то смещение и сила имеют противоположные фазы.

Здесь самое главное — это резкий максимум амплитуды при синхронизме. Бывали случаи, когда цепные мосты разрушались, когда по ним шла в ногу колонна солдат. (Отчасти из-за подоб-

¹ [П. Н. Лебедев. Экспериментальное исследование пондеромоторного действия волн на резонаторы. Избр. соч. под ред. А. К. Тимирязева, М., 1949.]

² [См. 16-ую лекцию.]

ных явлений отошли от построения нежестких мостов.) Возможен также резонанс парового корпуса, резонанс фундамента, на котором установлена машина. Главный способ устранения этих явлений — изменение периода. Но есть и другие способы, о которых будет идти речь впоследствии¹.

Явление резонанса имеет место и в случае действия пондеромоторных сил между двумя осцилляторами. Таковы, например, притяжение и отталкивание (в зависимости от разности фаз) пульсирующих шаров, находящихся в жидкости.

Перейдем к оптике. Основные явления при прохождении света через тела, в сущности, связаны с резонансом.

Лет двадцать тому назад дело представляли себе очень просто. Вещество отличается от вакуума тем, что в нем содержатся резонаторы определенного собственного периода. Когда на среду падает световая волна определенной частоты, она возбуждает резонаторы с этой частотой. Действие прозрачной среды состоит в следующем: на падающую волну налагаются вторичные волны, излучаемые резонаторами, возбужденными падающей волной. Это приводит к изменению поля.

Все оптические свойства среды выводятся из этой картины. Если рассчитать измененное поле, то получается как раз то, что мы знаем из феноменологической оптики. Например, преломление тождественно сдвигу фазы измененной волны по отношению к падающей. Эта модель объясняет также действие на свет пластинок различной толщины.

При резонансе резонаторы сильно раскачиваются. Этим объясняется поглощение (абсорбция). С помощью простых представлений удалось дать достаточно полную картину дисперсии и абсорбции. Натриевый пар поглощает только определенную длину волны, а именно ту, которую он сам испускает. Для более длинных волн показатель преломления больше единицы, для более коротких — меньше единицы (это были в свое время замечательные открытия). Последнее объясняется тем, что если частота света ниже резонансной, измененная волна отстает по фазе от падающей; если же частота света выше резонансной, то получается наоборот — опережение по фазе.

Теперь физика отошла от этой модели: все факты говорят о том, что такая простая модель неверна. Однако полученные

¹ [Применение успокоителей, см. 26-ую и 27-ую лекции.]

с ее помощью соотношения в большой мере сохраняются и в новой теории. Поэтому практически оптика часто продолжает работать с этой моделью. Многие заключения сохраняются в полной силе.

Нам остается рассмотреть в связи с резонансом некоторые принципиальные вопросы и некоторые задачи и вопросы, возникающие при практических *положительных* применениях (в начале лекции говорилось об *отрицательных* сторонах резонанса). В радиотелеграфии, в радиотелефонии резонанс — инструмент, которым пользуются.

Мы рассматривали до сих пор установившийся режим. Рассмотрим теперь такую задачу. Пусть на резонатор в момент $t=0$ *начинает* действовать сила. Тогда нужно решить уравнение с правой частью

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = E \sin pt \quad (1)$$

при определенных начальных условиях (мы писали раньше в правой части $E \cos pt$, а теперь пишем $E \sin pt$, но этим мы просто переставляем начало отсчета времени). Нужно найти такое решение x , для которого

$$x=0, \quad \dot{x}=0 \quad \text{при } t=0.$$

Это решение определено однозначно.

Математика указывает, как найти такое решение. Нужно взять *общее* решение уравнения (1)

$$x = X \sin(pt - \varphi) + Ae^{-\gamma t} \cos \omega t + Be^{-\delta t} \sin \omega t \quad (2)$$

и подогнать в нем произвольные постоянные под начальные условия. Положим в (2) $t=0$, $x=0$. Это дает уравнение

$$-X \sin \varphi + A = 0. \quad (3)$$

Далее, продифференцируем (2) и положим $t=0$, $\dot{x}=0$. Это дает еще одно уравнение. Из двух полученных таким образом линейных алгебраических уравнений мы определим A и B .

Прделаем это для частного случая.

С самого начала предположим, что декремент мал и имеет место резонанс, т. е. $p = \omega_0 \approx \omega$ (с точностью до δ^2). Тогда φ равно 90° и

$$X = \frac{E}{2\delta\omega_0}.$$

Уравнение (3) дает при этом $A=X$, а из условия $\dot{x}(0)=0$ мы получаем в этом случае, что B — малая величина порядка δ/p . В первом приближении, если пренебречь δ/p по сравнению с единицей, т. е. положить $B=0$, находим:

$$x = -\frac{E}{2\delta\omega_0}(1 - e^{-\delta t}) \cos \omega_0 t. \quad (4)$$

В начале, несмотря на совпадение частот p и ω_0 , колебание x очень мало. Оно увеличивается — происходит нарастание амплитуды — по мере уменьшения $e^{-\delta t}$.

Получается такая картина. При очень малых декрементах амплитуда колоссальна, но ее установление длится очень долго. Явление резонанса характерно для *установившегося* режима. Чем более резко выражен резонанс, тем медленнее происходит установление. Можно это выразить так: резко выраженный резонанс долго не наступает.

Если силу выключить, колебания затухают. Затухание колебаний тем медленнее, чем меньше δ . При малом δ сила медленно раскачивает систему и колебания долго длятся после того, как прекратилось действие силы. Во избежание ошибок, нужно это постоянно иметь в виду. Укажем одну из распространенных ошибок.

Для целей беспроводной телеграфии требуется изменять нечто в колебаниях передатчика, с тем чтобы амплитуда в приемнике изменялась как можно сильнее. Обычно изменяют амплитуду колебаний в передатчике. Было сделано предложение — изменять *частоту* передатчика. При малом затухании резонансная кривая очень крута, и поэтому, говорили, достаточно ничтожного изменения частоты, чтобы сильно изменить амплитуду.

Критика этого предложения заключается в следующем. Если изменение частоты происходит очень медленно, то утверждение справедливо. Но если оно не происходит очень медленно, то утверждение совсем несправедливо. Приемник не попадает в точку A (рис. 61) сразу. Он придет в нее тем медленнее, чем острее резонансная кривая. Условия передачи таковы, что быстрота изменения задается — ею нельзя распоряжаться. При быстрых же изменениях острота эффекта иллюзорна и цель не достигается.

Поставим теперь задачу о колебаниях *незатухающего* контура под действием внешней силы. Этот случай проще. Рассмотрение незатухающего контура для ряда вопросов имеет смысл.

Пусть $\delta \rightarrow 0$. Тогда в пределе формула (7) предыдущей лекции дает:

$$X = \frac{E}{\omega_0^2 - p^2}. \quad (5)$$

Если $|\omega_0^2 - p^2|$ велико по отношению к δ^2 , т. е. далеко от резонанса, формула (5) приводит к удовлетворительным результатам. Пусть теперь $\omega_0 = p$. Тогда по формуле (5) $X = \infty$: если при приближении к резонансу не учитывать затухания, амплитуда растет неограниченно. Отсюда видно, что достаточно близко от

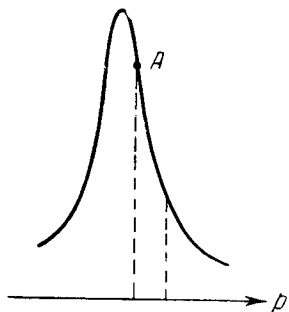


Рис. 61.

резонанса мы обязаны при рассмотрении установившегося колебания принимать во внимание затухание, как бы оно ни было мало. Но как мы видели, чем меньше δ , тем медленнее устанавливается колебание. Когда δ стремится к нулю, $X \rightarrow \infty$, но стационарный режим устанавливается через бесконечное время, т. е. не устанавливается никогда. Поэтому формула (5) не приводит к физическому противоречию.

Из формулы (2) мы не получим при $\omega_0 = p$ установившегося (периодического) решения. Его нельзя получить и из периодического решения, полагая в нем $p = \omega_0$. Но *какое-то* решение должно существовать и в этом случае. Его можно найти другим путем.

Общее решение уравнения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = E \sin \omega_0 t$$

есть

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t - \frac{E}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t. \quad (6)$$

Последний член (он является частным решением неоднородного уравнения) неограниченно растет со временем. Происходит неограниченное накопление энергии. Решение

$$x = -\frac{t}{2\omega_0} \cos \omega_0 t \quad (7)$$

можно получить и из формулы (4) путем перехода к пределу $\delta = 0$. Как уже подчеркивалось, нельзя думать, что резонанс

наступает сразу. Если сила действует очень короткое время, то она не может вызвать большого нарастания колебаний, даже если нет трения.

Рассмотрим один относящийся сюда оптический парадокс. Исследование установившегося режима приводит к выводу, что показатель преломления n больше или меньше единицы, смотря по тому, что больше — частота падающего света или собственная частота молекулярных резонаторов. Показатель преломления равен отношению скорости света в вакууме к скорости света в теле. Пусть показатель преломления меньше единицы. Тогда скорость света в теле больше, чем скорость света в вакууме c . Опыт показывает, что действительно в некоторых случаях $n < 1$. Кое-кто думал вывести отсюда возражение против теории относительности, так как одно из ее основных утверждений состоит в том, что ни один сигнал не может распространяться скорее, чем свет в пустоте.

В действительности никакого противоречия нет. Теория относительности запрещает распространение сигнала со скоростью, большей c . Показатель преломления относится к установившимся колебаниям. Когда распространяется начало сигнала, электроны не успели еще придти в колебание. Сигнал вначале распространяется так, как будто бы молекул нет. Сигнал равносителен установившемуся режиму, и из того, что $n < 1$, еще нельзя ничего заключить о скорости распространения сигнала.

Поставим теперь несколько более общую задачу. Нас часто интересуют периодические или почти-периодические силы $f(t)$. Их можно представить в виде суммы синусоид с различными периодами (математика нас учит, как это следует делать). Если мы это сделаем, то получим уравнение вида

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \sum_i E_i \cos(p_i t + \psi_i). \quad (8)$$

Мы знаем, что, найдя решение для случая, когда в правой части стоит один член суммы, мы сможем написать решение (8) как сумму отдельных таких решений.

Возьмем специальный случай. Пусть самая малая (по абсолютной величине) разность между частотами p_i есть

$$p_1 - p_2 = \Delta p.$$

Пусть логарифмический декремент резонатора чрезвычайно мал по сравнению с $|\Delta p|/p_i$. Настроим резонатор на p_1 . Тогда

все члены с частотами, отличными от p_1 , будут малы по сравнению с членом частоты p_1 .

Если резонатор с достаточно малым затуханием настроен на частоту одной из синусообразных слагаемых силы, то остальные слагаемые практически совершенно незаметны. Такой резонатор выделяет определенный синусообразный член внешней силы, а именно тот, на который он настроен. Резонатор, это — реактив на *синусообразные* колебания. Он откликается именно на синусообразные колебания, а *не вообще* на периодические. Если действует периодическая сила периода, равного собственному периоду резонатора, но в которой „случайно“ нет синуса (или косинуса) нужной частоты, — резонанса не будет.

Например, как будет вести себя резонатор, настроенный на частоту p , в случае силы

$$f_1(t) = a_2 \sin 2pt + a_3 \sin 3pt$$

($p = \omega_0$) и в случае силы

$$f_2(t) = a_1 \sin pt$$

(обе силы имеют одинаковый период)? Во втором случае он откликнется сильно; в первом случае он откликнется очень слабо. Для резонанса важен не период действующей силы, а наличие в разложении правой части на сумму синусов (или косинусов) члена с синусом (или косинусом) определенной частоты.

Вообразите, что вы раскачиваете маятник. Вы даете ему толчок. Он немного отклоняется и возвращается обратно. Если вы будете снова его толкать в „нужные“ моменты (через период), то действие толчков будет накапливаться, — будет резонанс. Если вы будете толкать маятник через каждые два периода, то тоже будет резонанс, — маятник будет опять сильно раскачиваться.

Этот результат противоречит представлению о том, что для резонанса необходимо совпадение периода внешней силы с собственным периодом. Но он находится в согласии с тем, что было только что сказано.

Если разложить кривую (рис. 62) в ряд синусов, то при периоде толчков, равном удвоенному собственному периоду, этот ряд содержит синус собственного периода. Благодаря этому наступает резонанс.

Неправильно думать, что условием резонанса является совпадение периодов. Единственный критерий резонанса дает разложе-

ние на синусоиды. Этим и объясняется та важная роль, которую играет в физике ряд Фурье.

Любую функцию, в частности периодическую, можно представить как сумму других функций и притом самым разнообразным образом. Возможно разложение не только по синусам и косинусам, но и по другим функциям. Какое разложение правильно? С точки зрения математики все грамотные разложения правильны и поставленный нами вопрос не имеет содержания. Он аналогичен вопросу: что правильно, $a^2 - b^2$ или $(a - b)(a + b)$? Оба выражения представляют собой одно и то же.

Вся соль здесь — в *физике*, в том, как исследуется процесс, на что рассматриваемое колебание действует. Если методом исследования является резонанс, то можно выделить каждый отдельный член ряда Фурье. Поэтому единственно правильное или, лучше сказать, целесообразное представ-



Рис. 62.

ление при исследовании процесса с помощью резонанса — это ряд Фурье. Здесь разложение на другие функции не ведет к цели. То или иное разложение правильно, разумно, в зависимости от системы, на которую колебание действует, в частности в зависимости от физического прибора, с которым работают.

В беспроводной телеграфии и телефонии резонанс — важный инструмент, фундаментально используемый. Необходимо знать, какого рода вопросы при этом возникают.

Мы хотим передавать сигналы. Если передатчик работает синусообразно, то он может дать знать лишь о том, что он работает. Для передачи *сообщения* передатчик должен *изменять* амплитуду своих колебаний определенным образом, — *сообразно* тому, что должно быть передано. В этом состоит *модуляция*. Синусоиду модулируют, например, тем, что поют перед микрофоном. При этом амплитуда колебаний передатчика уменьшается или увеличивается сообразно колебаниям давления воздуха. Пусть акустическая частота есть ν . Тогда (приблизительно) амплитуда колебаний передатчика меняется по закону

$$E = E_0(1 + k \cos \nu t)$$

и сигнал имеет вид

$$y = E \cos pt = E_0(1 + k \cos \nu t) \cos pt. \quad (9)$$

Это — самый простой случай модуляции передатчика.

Передатчик действует на приемник, на линейный осциллятор. Формула (9) показывает, какова при этом внешняя сила, действующая на контур приемника. Какие свойства этого контура существенны при действии такой силы?

Приемная станция настроена на данный передатчик. Вместе с тем имеется большое число других передатчиков. Требуется настроить приемник так, чтобы они ему не мешали, чтобы он мог от них „отстроиться“. Желательно, чтобы одновременно могло работать возможно большее число передающих станций.

Итак, к приемнику предъявляются следующие требования:

1. Он должен правильно передавать модуляцию данного передатчика.

2. Он не должен откликаться на другие передатчики (селективность).

3. Кроме того, имеются помехи, форма и сила которых от нас не зависят (атмосферные разряды, грозы). Желательно построить приемник так, чтобы он был нечувствителен к помехам.

К сожалению, первое требование и остальные два противоречивы, так что приходится идти на компромисс.

Наиболее простой модуляции соответствует формула (9). Ее можно записать и в таком виде:

$$y = E_0 \cos pt + \frac{kE_0}{2} \cos(p - \nu)t + \frac{kE_0}{2} \cos(p + \nu)t. \quad (10)$$

Получились три синусообразные колебания. Следовательно, на приемное устройство действуют три колебания с тремя частотами p , $p - \nu$, $p + \nu$. Частота p называется несущей частотой, частоты $p - \nu$ и $p + \nu$ называются боковыми полосами. Амплитуды вынужденных колебаний, соответствующих трем синусоидальным составляющим силы (10), таковы:

$$\frac{E_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}, \quad \frac{\frac{kE_0}{2}}{\sqrt{[\omega_0 - (p \pm \nu)]^2 + 4(p \pm \nu)^2 \delta^2}},$$

или, если $p = \omega_0$ (приемник настроен на несущую частоту передатчика),

$$\frac{E_0}{2\delta\omega_0}, \quad \frac{\frac{kE_0}{2}}{\sqrt{(\nu^2 \mp 2\omega_0\nu)^2 + 4(\omega_0 \pm \nu)^2 \delta^2}} \approx \frac{kE_0}{4\delta\omega_0 \sqrt{1 + \frac{\nu^2 4\pi^2}{\omega_0^2 d^2}}}.$$

Предположим, что затухание контура приемника очень мало:

$$\frac{\nu^2}{\omega_0^2} \gg \frac{d^2}{4\pi^2}.$$

Тогда боковые полосы практически не попадают в приемник. Он реагирует так, как будто бы модуляции нет, т. е. приемник не чувствует, модулирован сигнал или нет, он не слышит того, что говорит передатчик. Таким образом, нельзя брать декремент очень малым.

Мы получим в приемнике хорошую модуляцию, если резонанс не изменит заметно отношение амплитуд синусоидальных составляющих (несущей и боковых). Для хорошего воспроизведения модуляции должно быть поэтому

$$\frac{\nu^2}{\omega_0^2} \ll \frac{d^2}{4\pi^2}, \quad (11)$$

относительная величина частоты модуляции должна быть гораздо меньше, чем $d/2\pi$. Если требуется, чтобы правильно передавалась модуляция, мы не имеем права брать очень малый декремент.

При $p/2\pi = 10^6$ (длина волны 300 м), $\nu/2\pi = 3000$, т. е. при $\nu/p = 0,003$, условие (11) дает:

$$d \gg 0,003 \cdot 2\pi,$$

или

$$d \gg 0,019.$$

Даже для умеренно хорошего воспроизведения модуляции здесь необходим сравнительно большой логарифмический декремент. Но это противоречит требованию высокой селективности. Кроме того, чем больше логарифмический декремент, тем сильнее сказываются помехи¹.

Какие есть способы улучшить положение? Что нам задано и что мы можем менять? Частота модуляции ν — это частота речи. Ее менять мы не можем. Значит, если ν задано, то для достижения хорошего воспроизведения модуляции нужно увеличивать ω_0 , пока не будет выполнено условие (11). При большом числе станций требование хорошей модуляции заставляет переходить к коротким волнам.

¹ [См. 17-ую лекцию.]

Все, что говорилось, относится и к телеграфной передаче. Здесь требование селективности накладывает ограничение на скорость передачи. Малый логарифмический декремент несовместим с быстротой работы. Но здесь требования — менее жесткие, чем при передаче звука. Для хорошей музыкальной передачи нужно передавать частоты до 5—10 тысяч колебаний в секунду. При радиотелефонных переговорах достаточно, чтобы хорошо передавались более низкие частоты. Хорошая телеграфная работа, довольно быстрая — 120 слов в минуту. Такая быстрота телегра-

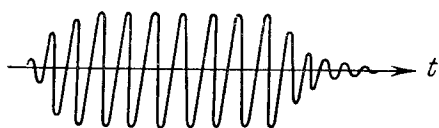


Рис. 63.

фирования соответствует, грубо говоря, частоте модуляции около 150 колебаний в секунду. Это гораздо более медленная модуляция, чем в радиотелефонии. Кроме того, здесь не очень страшно, если кривая получается немного смазанной (рис. 63). Тем не менее

даже в радиотелеграфии нельзя пользоваться теми малыми логарифмическими декрементами, которые нам доступны. Это привело бы к слишком сильному искажению сигналов:

Итак, в случае приема с помощью линейной системы мы всегда находимся между Сциллой и Харибдой: требования селективности и хорошего воспроизведения модуляции противоречивы. Приходится каждый раз думать о том, какой выбрать компромисс. Если сообщается о сенсационном открытии, о новом принципе, устраняющем — в пределах линейных систем — противоречие между требованиями селективности и хорошего воспроизведения модуляции, то можно сразу сказать, что это неверно. Недавно сообщалось, что такой принцип найден и даже запатентован Робинсоном, но из этого ничего не вышло.

Мы разлагали простейшее модулированное колебание на три синусоидальных колебания. Флеминг¹ говорит следующее. Эти три волны „не реальны“. Законодательство ограничивает частоту модуляции. Оно требует, чтобы при передаче модуляция была не более быстрой, чем 10 тысяч колебаний в секунду. Это мотивируется тем, что в противном случае близкие по частоте станции не смогут работать. Но так как боковые частоты не реаль-

¹ [A. Fleming. Nature, 125, 92, 1930.]

ны, говорит Флеминг, то такое законодательство не имеет смысла.

Вопрос „реальны“ или „не реальны“ боковые полосы, не имеет смысла. Так вопрос ставить нельзя. Переход от формулы (9) к (10) — простая тригонометрия. Никакое приемное устройство не различит, имеется ли одна модулированная волна или соответствующие ей три волны от трех немодулированных передатчиков.

Вопрос о реальности боковых полос — это такой же вопрос, как, например, что реально: то, что $10 = 2 + 8$, или то, что $10 = 5 + 5$? Правильно ставить вопрос можно только так: как целесообразно в данном конкретном случае представить число 10. А это зависит от того, что вы хотите сделать.

По вопросу о „реальности“ боковых полос возникла целая литература¹.

СЕМНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(28/XII 1930 г.)

Действие помех на линейную колебательную систему с одной степенью свободы. Увеличение отношения сигнал/помеха при уменьшении затухания.

Рассмотрим действие помех на линейный контур. Помехи — явление непериодическое. Они имеют не дискретный, а сплошной спектр.

Вспомним некоторые соотношения, относящиеся к случаю действия синусоидальной внешней силы на линейную систему. Пусть

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = E \cos pt. \quad (1)$$

Тогда при установившихся колебаниях

$$\begin{aligned} x &= X \cos(pt - \varphi), \\ \dot{x} &= -\dot{X} \sin(pt - \varphi), \end{aligned} \quad (2)$$

¹ [C. L. Fortescue, H. Bedford, H. W. Baxter и др. Nature, 125, 198, 271, 1930; Exper. Wir. a. Wir. Eng., 7, 119, 1930; 8, 4, 257, 259, 312, 431, 538, 660, 1931.]

ны, говорит Флеминг, то такое законодательство не имеет смысла.

Вопрос „реальны“ или „не реальны“ боковые полосы, не имеет смысла. Так вопрос ставить нельзя. Переход от формулы (9) к (10) — простая тригонометрия. Никакое приемное устройство не различит, имеется ли одна модулированная волна или соответствующие ей три волны от трех немодулированных передатчиков.

Вопрос о реальности боковых полос — это такой же вопрос, как, например, что реально: то, что $10 = 2 + 8$, или то, что $10 = 5 + 5$? Правильно ставить вопрос можно только так: как целесообразно в данном конкретном случае представить число 10. А это зависит от того, что вы хотите сделать.

По вопросу о „реальности“ боковых полос возникла целая литература¹.

СЕМНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(28/XII 1930 г.)

Действие помех на линейную колебательную систему с одной степенью свободы. Увеличение отношения сигнал/помеха при уменьшении затухания.

Рассмотрим действие помех на линейный контур. Помехи — явление непериодическое. Они имеют не дискретный, а сплошной спектр.

Вспомним некоторые соотношения, относящиеся к случаю действия синусоидальной внешней силы на линейную систему. Пусть

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = E \cos pt. \quad (1)$$

Тогда при установившихся колебаниях

$$\begin{aligned} x &= X \cos(pt - \varphi), \\ \dot{x} &= -\dot{X} \sin(pt - \varphi), \end{aligned} \quad (2)$$

¹ [C. L. Fortescue, H. Bedford, H. W. Baxter и др. Nature, 125, 198, 271, 1930; Exper. Wir. a. Wir. Eng., 7, 119, 1930; 8, 4, 257, 259, 312, 431, 538, 660, 1931.]

причем

$$X = \frac{E \sin \varphi}{2\delta p}, \quad \dot{X} = \frac{E \sin \varphi}{2\delta}, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta p}{\omega_0^2 - p^2}. \quad (4)$$

Среднее значение какой-нибудь величины y есть

$$\bar{y} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} y(t) dt, \quad (5)$$

или, если $y(t)$ — периодическая функция с периодом τ ,

$$\bar{y} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} y(t) dt. \quad (6)$$

Воспользуемся выражением (6) для вычисления среднего значения квадрата силы тока (или скорости). Имеем:

$$\overline{\dot{x}^2} = \dot{X}^2 \overline{\sin^2(pt - \varphi)}.$$

Но

$$\overline{\sin^2(pt - \varphi)} = \frac{1}{2},$$

и, следовательно,

$$\overline{\dot{x}^2} = \frac{1}{2} \dot{X}^2 = \frac{E^2}{8\delta^2} \sin^2 \varphi.$$

Пусть W_p — объемная плотность энергии, создаваемая на месте приема передающей станцией. Тогда можно принять, что

$$E^2 = \alpha W_p,$$

где α — некоторый коэффициент пропорциональности, зависящий, вообще говоря, от p . Следовательно,

$$\overline{\dot{x}^2} = \beta \frac{W_p \sin^2 \varphi}{\delta^2}, \quad (7)$$

причем $\beta^2 = \alpha/8$. В случае резонанса

$$\overline{\dot{x}^2} = \beta \frac{W_{\omega_0}}{\delta^2}. \quad (8)$$

Пусть теперь действует сумма синусоидальных в. д. с. разных периодов:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \sum_i E_i \cos(p_i t + \psi_i).$$

При установившемся колебании

$$\dot{x} = - \sum_i \dot{X}_i \sin(p_i t + \psi_i - \varphi_i),$$

где

$$\dot{X}_i = \frac{E_i \sin \varphi_i}{2\delta}.$$

Проводя аналогичный расчет с помощью (5), получаем:

$$\overline{\dot{x}^2} = \frac{1}{2} \sum_i \dot{X}_i^2 = \sum_i \frac{\beta_i}{\delta^2} W_{p_i} \sin^2 \varphi_i. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь действие помех. Как сказано, помехи имеют непрерывный спектр (рис. 64). u_p есть спектральная плотность на частоте p . Это означает, что $u_p dp$ есть та часть объемной плотности энергии, которая относится к интервалу частот $(p, p + dp)$.

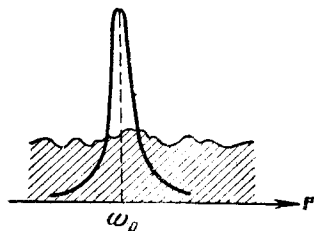


Рис. 64.

В случае помех сумму (9) нужно заменить интегралом, так что

$$\overline{\dot{x}^2} = \frac{1}{\delta^2} \int_0^\infty \beta u_p \sin^2 \varphi dp. \quad (10)$$

При достаточно малом δ существенную роль в интеграле играют только те „члены“, в которых p близко к ω_0 (рис. 64); остальные практически ничего не дают. Поэтому мы можем написать приближенно вместо (10):

$$\overline{\dot{x}^2} = \frac{\beta_{\omega_0} u_{\omega_0}}{\delta^2} \int_{\omega_0 - \Delta p}^{\omega_0 + \Delta p} \sin^2 \varphi dp. \quad (11)$$

Но согласно (4)

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{(\omega_0 + p)(\omega_0 - p)}{2\delta p},$$

или приближенно, при $\delta \ll \omega_0$,

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\omega_0 - p}{\delta},$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{dp}{\delta}. \quad (12)$$

На основании (12) мы можем переписать (11) в таком виде:

$$\overline{x^2} = \frac{\beta_{\omega_0} u_{\omega_0}}{\delta} \int_0^{\pi} d\varphi = \frac{\pi \beta_{\omega_0} u_{\omega_0}}{\delta}.$$

Таким образом, энергия от помех увеличивается с уменьшением коэффициента затухания δ обратно пропорционально его первой степени. Согласно же (8) энергия от регулярного сигнала частоты $p = \omega_0$ растет обратно пропорционально δ^2 . Отношение

$$\frac{\text{энергия помех}}{\text{энергия регул. сигнала}} = \pi \frac{u_{\omega_0}}{W_{\omega_0}} \delta = \text{const} \cdot \delta = \text{const} \cdot d.$$

Отсюда видно, что для уменьшения относительной энергии помех нужно уменьшать логарифмический декремент контура.

Заметим, что в случае помех поглощаемая мощность не зависит от коэффициента затухания.

Когда мы уменьшаем затухание, оставляя постоянными ω_0 и p , то действие колебаний любой частоты увеличивается, но неодинаково. Действие колебаний той частоты, на которую контур настроен, возрастает гораздо больше, чем действие колебаний с частотами, далекими от резонанса. Этим и объясняется уменьшение отношения энергии помех к энергии сигнала при уменьшении затухания.

Представление энергии помех в виде

$$\int_0^{\infty} u_p dp$$

связано с теоремой Релея в теории интеграла Фурье¹.

На этом мы закончим изучение резонанса. Хотя мы рассмотрели резонанс в простейшей системе, мы затронули все же ряд вопросов, которыми нужно хорошо владеть. До сих пор в этих вопросах делаются грубые ошибки.

Возьмем, например, Флеминга. Это — крупный радиоспециалист, член Королевского общества (английской Академии наук). Его

¹ [См., например, Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. М.—Л., 1941.]

книга „Волны в воде, воздухе и эфире“ — в общем неплохая, там есть много интересных сведений. Но по поводу резонанса там имеется явный вздор. Говорится, например, что мальчик, стреляя из рогатки, может разрушить железнодорожный мост через Темзу. Это невозможно из-за затухания.

ВОСЕМНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(5/1 1931 г.)

Уравнение колебаний маятника с горизонтально и вертикально колеблющейся точкой подвеса. Контур с периодически меняющейся емкостью. Теория линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим движение маятника, точка подвеса которого совершает заданное гармоническое колебание относительно инерциальной системы отсчета x_1, z_1 .

Предположим сначала, что точка подвеса колеблется горизонтально (рис. 65). Пусть

$$x_0 = a \cos pt$$

есть координата точки подвеса в системе отсчета x_1, z_1 . Напишем уравнение движения в неинерциальной системе отсчета x, z , в которой точка подвеса маятника покоится. Здесь нужно ввести силу инерции ($-m\ddot{x}_0$), направленную по оси x , и уравнение движения таково:

$$I\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi - m\ddot{x}_0 \cos \varphi, \quad (1)$$

где I — момент инерции маятника, φ — угол отклонения, m — масса, l — длина, причем

$$I = ml^2.$$

При достаточно малых колебаниях можно считать приближенно, что

$$\sin \varphi = \varphi, \quad \cos \varphi = 1,$$

и уравнение (1) принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = -\frac{\ddot{x}_0}{l} = -\frac{ap^2}{l} \cos pt. \quad (2)$$

книга „Волны в воде, воздухе и эфире“ — в общем неплохая, там есть много интересных сведений. Но по поводу резонанса там имеется явный вздор. Говорится, например, что мальчик, стреляя из рогатки, может разрушить железнодорожный мост через Темзу. Это невозможно из-за затухания.

ВОСЕМНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(5/1 1931 г.)

Уравнение колебаний маятника с горизонтально и вертикально колеблющейся точкой подвеса. Контур с периодически меняющейся емкостью. Теория линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим движение маятника, точка подвеса которого совершает заданное гармоническое колебание относительно инерциальной системы отсчета x_1, z_1 .

Предположим сначала, что точка подвеса колеблется горизонтально (рис. 65). Пусть

$$x_0 = a \cos pt$$

есть координата точки подвеса в системе отсчета x_1, z_1 . Напишем уравнение движения в неинерциальной системе отсчета x, z , в которой точка подвеса маятника покоится. Здесь нужно ввести силу инерции ($-m\ddot{x}_0$), направленную по оси x , и уравнение движения таково:

$$I\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi - m\ddot{x}_0 \cos \varphi, \quad (1)$$

где I — момент инерции маятника, φ — угол отклонения, m — масса, l — длина, причем

$$I = ml^2.$$

При достаточно малых колебаниях можно считать приближенно, что

$$\sin \varphi = \varphi, \quad \cos \varphi = 1,$$

и уравнение (1) принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = -\frac{\ddot{x}_0}{l} = -\frac{ap^2}{l} \cos pt. \quad (2)$$

Это — уравнение вынужденных колебаний; маятник движется так же, как под действием заданной синусоидальной внешней силы.

Пусть теперь точка подвеса колеблется вертикально (рис. 66):

$$z_0 = a \cos pt.$$

Напишем и для этого случая уравнение движения в неинерциальной системе отсчета, относительно которой точка подвеса покоится.

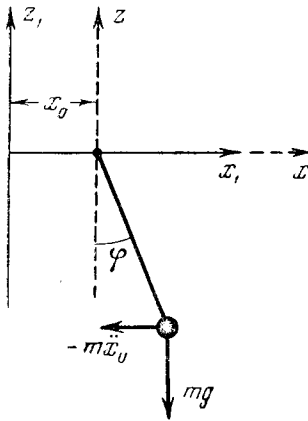


Рис. 65.

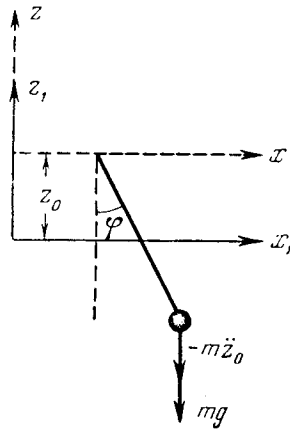


Рис. 66.

Теперь сила инерции ($-m\ddot{z}_0$) направлена по оси z , и уравнение движения таково:

$$I\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi - m\ddot{z}_0 \sin \varphi,$$

или приближенно, при малых φ ,

$$\ddot{\varphi} + \frac{g + \ddot{z}_0}{l} \varphi = 0.$$

Подставляя сюда z_0 , получаем:

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{l} (g - ap^2 \cos pt) \varphi = 0. \quad (3)$$

Это — уравнение совсем другого типа, чем (2). Система здесь также неавтономна, но нет периодической внешней силы: от времени зависит коэффициент при φ .

Рассмотрим еще один пример: колебательный контур, в котором емкость конденсатора периодически меняется со временем.

Будем считать, что конденсатор плоский и что расстояние d между пластинами меняется синусоидально:

$$d = d_0(1 + k \cos pt).$$

Емкость равна

$$C = \frac{S}{4\pi d},$$

где S — площадь пластин. Заряд на конденсаторе q удовлетворяет, следовательно, уравнению

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{4\pi}{S}(1 + k \cos pt)q = 0.$$

Получилось уравнение того же типа, что и (3).

В последнее время физики заинтересовались задачами, приводящими к линейным уравнениям с периодическими коэффициентами. Такие задачи встречаются в небесной механике, в машиностроении (электровозы)¹, в теории твердого тела (вследствие периодичности кристаллической решетки потенциальная энергия электрона есть периодическая функция координат).

В этой лекции мы познакомимся с математической теорией линейных уравнений с периодическими коэффициентами вида

$$\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x = 0, \quad (4)$$

причем $p_1(t)$ и $p_2(t)$ — периодические функции периода τ :

$$p_1(t + \tau) = p_1(t);$$

$$p_2(t + \tau) = p_2(t).$$

Уравнение (3) является частным случаем уравнения вида (4).

Будем считать, что уравнение (4) удовлетворяет условию Коши — Липшица и что, следовательно, существует решение, и притом единственное, удовлетворяющее произвольным заданным начальным условиям:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — линейно независимые частные решения уравнения (4). Общее решение может быть представлено в виде их линейной комбинации:

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2,$$

¹ [См. 19-ую лекцию.]

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Необходимым и достаточным условием линейной независимости функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ является неравенство нулю детерминанта Вронского:

$$W = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}.$$

Любые два линейно независимые решения уравнения (4) образуют так называемую фундаментальную систему решений.

Рассмотрим частные решения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ уравнения (4), удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) &= 1, & \psi(0) &= 0, \\ \dot{\varphi}(0) &= 0, & \dot{\psi}(0) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Согласно известной теореме теории линейных дифференциальных уравнений

$$W(t) = W(0) e^{-\int_0^t p_1(\xi) d\xi}. \quad (6)$$

В данном случае

$$W(0) = \begin{vmatrix} \varphi(0) & \psi(0) \\ \dot{\varphi}(0) & \dot{\psi}(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad (7)$$

и, следовательно,

$$W(t) = e^{-\int_0^t p_1(\xi) d\xi} \neq 0.$$

Таким образом, решения φ и ψ образуют фундаментальную систему.

Докажем теперь, что существует такое решение $x_1(t)$ уравнения (4), которое через период воспроизводит себя с точностью до постоянного множителя, т. е. такое, что

$$x_1(t + \tau) = s x_1(t), \quad (8)$$

где s — постоянная. Из (8) следует, что

$$x_1(t + n\tau) = s^n x_1(t).$$

Заметим, что если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — решения уравнения (4), то в силу периодичности коэффициентов этого уравнения $\varphi(t + \tau)$ и $\psi(t + \tau)$

тоже являются решениями. Как и всякое решение, они могут быть выражены линейно через фундаментальную систему $\varphi(t)$, $\psi(t)$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t+\tau) &= a\varphi(t) + b\psi(t), \\ \psi(t+\tau) &= c\varphi(t) + d\psi(t) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(a, b, c, d — постоянные), откуда

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}(t+\tau) &= a\dot{\varphi}(t) + b\dot{\psi}(t), \\ \dot{\psi}(t+\tau) &= c\dot{\varphi}(t) + d\dot{\psi}(t). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Положив в (9) и (10) $t=0$ и приняв во внимание (5), получаем:

$$\left. \begin{aligned} a &= \varphi(\tau), \quad b = \dot{\varphi}(\tau), \\ c &= \psi(\tau), \quad d = \dot{\psi}(\tau). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Возьмем теперь решение

$$x(t) = A\varphi(t) + B\psi(t), \quad (12)$$

где A, B — постоянные. Можно ли их подобрать таким образом, чтобы выполнялось соотношение (8)?

Подставляя (12) в (8), получаем:

$$A\varphi(t+\tau) + B\psi(t+\tau) = s[A\varphi(t) + B\psi(t)],$$

откуда, принимая во внимание (9),

$$[A(a-s) + Bc]\varphi + [Ab + B(d-s)]\psi = 0.$$

Это равенство должно выполняться тождественно (при любом t). Так как $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ линейно независимы, отсюда следует, что

$$\left. \begin{aligned} A(a-s) + Bc &= 0, \\ Ab + B(d-s) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Это — система линейных и однородных относительно A и B уравнений. Она имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a-s & c \\ b & d-s \end{vmatrix} = s^2 - (a+d)s + \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

Пусть s_1 и s_2 — корни уравнения (14). Подставляя их значения в (13), мы находим из этих уравнений соответствующие значения отношения A/B :

$$\frac{A}{B} = -\frac{c}{a-s_1}, \quad \frac{A}{B} = -\frac{c}{a-s_2}.$$

При таких значениях отношения A/B решение (12) удовлетворяет условию (8), т. е. воспроизводит себя через период с точностью до множителя s_1 или s_2 . Если s_1 и s_2 не равны между собой, существует два линейно независимых решения, обладающие свойством (8). Обозначим их через $x_1(t)$ и $x_2(t)$:

$$x_1(t + \tau) = s_1 x_1(t),$$

$$x_2(t + \tau) = s_2 x_2(t).$$

Решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ также образуют фундаментальную систему.

Введем посредством соотношений

$$s_1 = e^{\lambda_1 \tau}, \quad s_2 = e^{\lambda_2 \tau}$$

новые постоянные λ_1 и λ_2 . Они называются характеристическими показателями. Так как s_1 и s_2 , вообще говоря, комплексны, то x_1 , x_2 , а также λ_1 и λ_2 , вообще говоря, тоже комплексны.

Разложим s , λ и x на действительные и мнимые части:

$$s = a + ib;$$

$$\lambda = \alpha + i\beta;$$

$$x = \xi + i\eta.$$

Имеем:

$$s = e^{\alpha \tau} e^{i\beta \tau}, \quad x(t + \tau) = e^{\alpha \tau} e^{i\beta \tau} x(t).$$

Умножение на $e^{\alpha \tau}$ означает увеличение модуля x в $e^{\alpha \tau}$ раз; умножение на $e^{i\beta \tau}$ означает поворот вектора на комплексной плоскости на угол $\beta \tau$ (рис. 67). Вектор $x(t)$ за время τ поворачивается на некоторый угол, и если $\alpha > 0$ — *удлиняется*, а если $\alpha < 0$ — *укорачивается*. Если $\alpha = 0$, вектор за время τ поворачивается, но длина его принимает исходное значение.

Но $\alpha = \ln |s|/\tau$, а следовательно:

$$\text{при } \alpha > 0 \quad |s| > 1,$$

$$\text{при } \alpha < 0 \quad |s| < 1,$$

$$\text{при } \alpha = 0 \quad |s| = 1.$$

На плоскости a , b (рис. 68, а) области внутри окружности $|s| = 1$ соответствуют убывающие со временем решения, области вне этой окружности — возрастающие со временем решения, самой окружности — периодические решения. Соответствующие области

на плоскости α, β (рис. 63, б): полуплоскость левее оси $\alpha=0$, полуплоскость правее этой оси, сама ось $\alpha=0$.

Вспомним теперь, что s является корнем квадратного уравнения (14).

Обозначим в нем:

$$p = a + d, \quad q = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Решения φ и ψ действительны, так как коэффициенты уравнения (4), а также начальные значения (5) действительны. Поэтому a, b, c, d , а следовательно, и p, q — действительные постоянные. Необходимое и достаточное условие того, чтобы оба корня s_1 и s_2 уравнения (14)

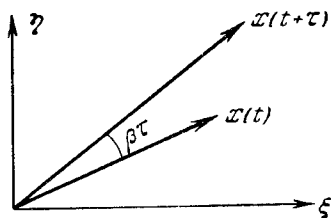


Рис. 67.

$$s^2 - ps + q = 0$$

были по модулю меньше единицы ($|s_1| < 1, |s_2| < 1$), таково:

$$q < 1, \quad 1 + p + q > 0, \quad 1 - p + q > 0.$$

Корни s_1 и s_2 действительны, если

$$p^2 - 4q \geq 0,$$

и комплексны, если

$$p^2 - 4q < 0.$$

Таким образом, на плоскости p, q (рис. 69) случаю $|s_1| < 1, |s_2| < 1$ соответствует область внутри треугольника $(-2, 1), (2, 1), (-1, 0)$, заключенного между прямыми $q = 1, 1 + p + q = 0, 1 - p + q = 0$.

В этом случае все решения уравнения (4) затухают к состоянию равновесия $x = 0, \dot{x} = 0$. В случае, когда хотя бы один из модулей $|s_1|$ или $|s_2|$ больше единицы, существует нарастающее решение — состояние равновесия неустойчиво. Значениям p и q , лежащим внутри параболы

$$4q = p^2$$

(заштрихованная область), соответствуют комплексные корни, значениям p и q вне заштрихованной области — два действительных корня. Точкам параболы соответствует кратный корень.

Если выполнено условие (8), т. е. если

$$x(t + \tau) = sx(t) = e^{\lambda\tau} x(t),$$

то функция

$$\Phi(t) = x(t) e^{-\lambda t}$$

есть периодическая функция с периодом τ . Это легко показать:

$$\Phi(t + \tau) = e^{-\lambda(t+\tau)} x(t + \tau) = e^{-\lambda\tau} e^{-\lambda t} x(t + \tau) = e^{-\lambda\tau} x(t) = \Phi(t).$$

Следовательно, решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ имеют вид:

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} \Phi_1(t), \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t} \Phi_2(t),$$

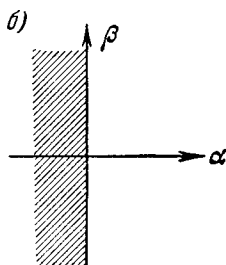
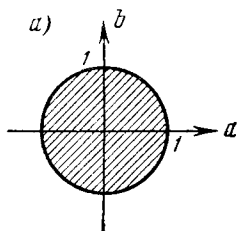


Рис. 68.

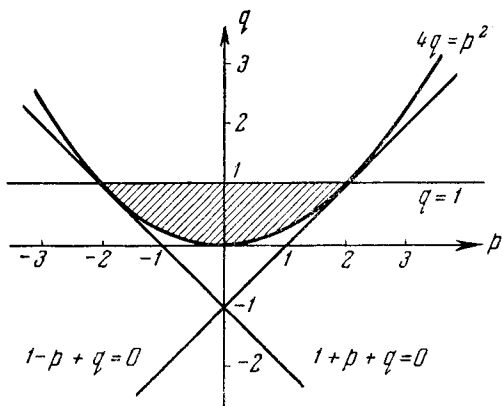


Рис. 69.

где $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ — периодические функции с периодом τ . Если $s_1 \neq s_2$, то общее решение уравнения (4) будет

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} \Phi_1(t) + C_2 e^{\lambda_2 t} \Phi_2(t). \quad (16)$$

Можно показать, что в случае кратного корня ($s_1 = s_2$) уравнение (4) имеет частное решение вида

$$t e^{\lambda t} \Phi(t),$$

и, следовательно, общее решение в этом случае имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda t} \Phi(t) + C_2 t e^{\lambda t} \Phi(t). \quad (17)$$

ДЕВЯТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(8/I 1931 г.)

Примеры систем с периодически меняющимся параметром. Параметрический резонанс; его отличие от „обычного“ резонанса. Физическое объяснение простейшего случая параметрического резонанса. Частотная модуляция. Ошибочное мнение о возможности сузить интервал частот, нужный для радиопередачи, посредством перехода к частотной модуляции. Асимптотическое решение для медленного изменения частоты и его разложение на синусоидальные составляющие. Как правильно записать „синусоидальное колебание с переменной частотой“. Когда имеет смысл говорить о „синусоидальном колебании с переменной частотой“.

Мы будем говорить о вещах, которые приобретают все большее значение. Можно сказать, пожалуй, что их „просмотрели“. Отчасти на них навела практика.

Что будет с колеблющейся системой, если ее параметры изменяются со временем и притом периодически? Представим себе, например, маятник с периодически меняющейся длиной или колебательный контур с периодически меняющейся емкостью. Другие параметры (индуктивность, коэффициент трения) также могут меняться периодически. В случае одной степени свободы уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + p_1(t) \dot{x} + p_2(t) x = 0, \quad (1)$$

где $p_1(t)$ и $p_2(t)$ — периодические функции. Вопрос о том, как ведет себя интересующая нас система, сводится к исследованию, к интегрированию уравнения (1). Математическую теорию такого уравнения изложил в прошлой лекции А. А. Андронов. Теперь мы будем говорить главным образом о физике и лишь бегло повторим математику.

Пусть у нас имеется конденсатор, емкость которого периодически меняется. Для простоты мы предположим, что периодическое изменение происходит по закону синуса или косинуса. Уравнение

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0 \quad (2)$$

справедливо и при переменной емкости $C(t)$.

Будем менять периодически расстояние между пластинами плоского конденсатора. Тогда

$$\frac{1}{C(t)} = \frac{4\pi d(t)}{S\epsilon}. \quad (3)$$

Пусть расстояние d меняется синусоидально:

$$d = d_0 + \delta \cos pt, \quad (4)$$

где p — частота изменения. Если подставить (3) и (4) в (2), то получится уравнение

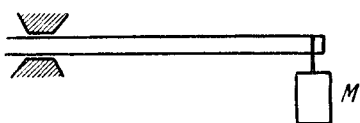
$$\ddot{q} + \left(\frac{1}{LC_0} + \frac{4\pi}{LS\epsilon} \delta \cos pt \right) q = 0, \quad (5)$$

где

$$C_0 = \frac{S\epsilon}{4\pi d_0}.$$

Возьмем простой механический случай — прототип более сложных вещей. Масса M подвешена к упругому стержню (рис. 70).

Она может колебаться в вертикальном направлении. Здесь уравнение движения будет



$$M\ddot{x} + kx = 0, \quad (6)$$

Рис. 70.

где k зависит от длины и материала стержня и от его сечения.

Если стержень (пусть это будет вал какой-нибудь машины) имеет эллиптическое сечение, то

$$k = k_0(1 + \delta \cos 2\theta), \quad (7)$$

где θ — угол поворота вала; δ — постоянная. При подстановке (7) уравнение (6) принимает вид

$$\ddot{x} + \frac{k_0}{M}(1 + \delta \cos 2\theta)x = 0. \quad (8)$$

Пусть вал вращается с постоянной угловой скоростью $p/2$. Тогда

$$\theta = \frac{pt}{2},$$

и (8) принимает вид

$$\ddot{x} + \frac{k_0}{M}(1 + \delta \cos pt)x = 0. \quad (9)$$

Получается такое же уравнение, что и для только что рассмотренного контура с конденсатором переменной емкости.

В уравнениях (5) и (9) величины

$$\omega_0^2 = 1/LC_0, \quad \omega_0^2 = \frac{k_0}{M}$$

играют роль квадрата частоты.

Обозначив

$$\alpha_0^2 = \frac{4\pi\delta}{LS\varepsilon} \quad \text{и} \quad \alpha_0^2 = \frac{k_0\delta}{M},$$

мы можем привести уравнения (5) и (9) к виду

$$\ddot{x} + (\omega_0^2 + \alpha_0^2 \cos pt) x = 0. \quad (10)$$

Это — частный случай уравнения (1); здесь, во-первых, $p_1(t) = 0$ и, во-вторых, функция $p_2(t)$ синусоидальна.

Уравнение

$$\ddot{x} + p(t) x = 0,$$

где $p(t)$ — периодическая функция, называется уравнением Хилла. Наше уравнение (10) есть частный случай уравнения Хилла. Оно называется уравнением Матёе.

Мы знаем, что общее решение уравнения (1) имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} \Phi_1(t) + C_2 e^{\lambda_2 t} \Phi_2(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные; λ_1 и λ_2 — постоянные, определяемые самим уравнением; $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ — периодические функции периода $\tau = 2\pi/p$.

Особенно важно знать, каковы λ_1 и λ_2 . Вообще говоря, они комплексны:

$$\lambda_1 = a_1 + ib_1, \quad \lambda_2 = a_2 + ib_2.$$

В зависимости от того, каковы значения параметров, входящих в уравнение, действительные части a_1 и a_2 могут быть отрицательными, равными нулю или положительными. Вообще говоря, λ_1 и λ_2 различны. В том специальном случае, когда они равны, имеется частное решение вида

$$te^{\lambda} \Phi(t),$$

где $\Phi(t)$ — периодическая функция периода $\tau = 2\pi/p$.

То, что C_1 и C_2 входят в решение линейно, типично для линейных уравнений. Если $x = 0$ и $\dot{x} = 0$ при $t = 0$, то $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$. В этом случае x остается равным нулю при любом t . Таким обра-

зом, здесь совершенно другое положение, чем при обычном резонансе: если система в начале была в равновесии, то она остается в равновесии и в дальнейшем.

Но что будет с системой, если в начальный момент она не находится в равновесии? Все зависит от того, каковы a_1 и a_2 .

Если обе эти величины отрицательны, то со временем амплитуда величины x убывает. При таком подборе значений параметров система совершает затухающее колебание.

Если $\lambda_{1,2}$ — чисто мнимые, то решения периодические или почти периодические.

Если величина a_1 положительна, то (за исключением случая, когда $C_1 = 0$ и $a_2 < 0$) амплитуда величины x все больше и больше возрастает.

Итак, положение равновесия всегда имеется, но равновесие может быть как устойчивым, так и неустойчивым. В последнем случае система, будучи выведена из состояния равновесия, автоматически себя раскачивает. Это свойство — рост колебаний — придает всему явлению характер резонанса. Мы говорим при этом о *параметрическом* возбуждении или о *параметрическом резонансе*.

При каких условиях наступает раскачивание, не так просто поддается вычислению. Физически дело сводится, грубо говоря, к следующему: возрастание колебаний происходит тогда, когда подобран правильный темп изменения параметра.

Возьмите конденсаторную цепь. Будем менять емкость скачками. Пусть в *некоторый начальный* момент имеется маленький заряд $q = q_0$, а тока нет ($\dot{q} = 0$). Раздвинем в этот момент пластины конденсатора. Мы затрачиваем на это некоторую работу. Через $1/4$ периода заряд обращается в нуль, и в этот момент мы сведем пластины до прежнего расстояния. При этом никакой работы не совершается. Через $1/2$ периода после начала опять имеется заряд, и мы снова разводим пластины, совершая работу; через $3/4$ периода мы опять их сводим, и т. д. Затрачиваемая нами работа должна увеличить запас электромагнитной энергии в контуре. Отсюда видно, что если раздвигать и сдвигать пластины с периодом, вдвое меньшим, чем средний собственный период контура, то непременно наступает раскачивание. Это — частный случай, его трудно вполне точно осуществить на практике. Но здесь ясно, как и почему происходит раскачивание. Что будет в остальных случаях, „на пальцах“ показать довольно трудно.

На этот вопрос дает ответ график (рис. 71), построенный для уравнения (10). В заштрихованной части плоскости есть нарастающие колебания, в незаштрихованной части нарастания нет.

Пусть относительная амплитуда изменения параметров постоянна:

$$\frac{\alpha_0}{\omega_0} = \text{const.}$$

Будем менять только частоту изменения параметра p . Первая область нарастания колебаний соответствует частоте изменения

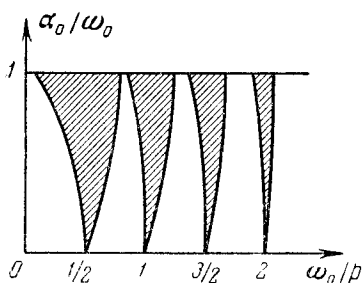


Рис. 71.

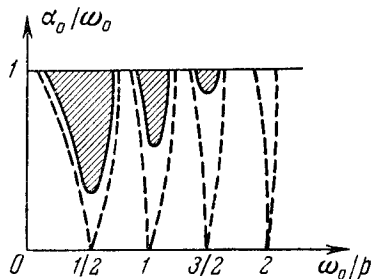


Рис. 72.

параметров, приблизительно вдвое большей, чем частота собственных колебаний. Во второй области частота собственных колебаний и частота изменения параметров приблизительно равны. В третьей области частота p приблизительно в полтора раза меньше собственной и т. п. Таких областей неустойчивости оказывается бесконечно много.

С увеличением относительной амплитуды изменения параметра ширина каждой области частот p , в которой происходит нарастание, увеличивается.

Итак, мы видим, что явление параметрического резонанса существенно отличается от обычного резонанса. Отличие состоит в том, что:

1. Если система находится строго в положении равновесия, то при периодическом изменении параметра она не раскачивается.

2. Несмотря на то, что воздействие косинусообразно, существует бесконечно много областей параметрического резонанса, и притом именно областей, а не точек.

Наличие затухания смазывает явление. Оно вызывает появление порога возбуждения (рис. 72). Области неустойчивости,

соответствующие все меньшим отношениям p/ω_0 , начинаются все выше и выше. Поэтому очень трудно получить на практике далекие области возбуждения.

Из линейности уравнения следует, что и при наличии трения (если оно линейно) в областях неустойчивости имеет место бесконечное нарастание.

Как и всегда, при наличии неустойчивости линейное уравнение недостаточно для описания всего хода явления. Оно не дает установления колебания. Установление стационарной амплитуды возможно только вследствие нелинейности.

Иллюстрацией явления параметрического резонанса является известный опыт Мельде (рис. 73). Когда камертон колеблется, натяжение струны — параметра, от которого зависит частота ее поперечных колебаний, — периодически меняется. Когда собственная частота поперечных колебаний струны приблизительно вдвое меньше ча-

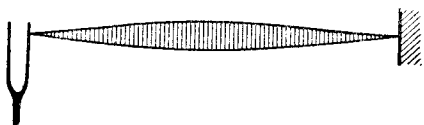


Рис. 73.

стоты камертона, происходит возбуждение этих колебаний.

В технике на возможность возбуждения колебаний путем изменения параметров обратили внимание, повидимому, при постройке электровозов. В электровозе упругость передающей системы, соединяющей вал мотора с ведущей осью, периодически меняется. Получаются собственные колебания системы с переменной упругостью. Многие неудачи произошли от того, что этого раньше не замечали.

В последнее время явлениями в системах с периодически меняющимися параметрами стали заниматься в связи с тем, что они позволяют трансформировать частоты „вниз“ (трансформировать частоты „вверх“ сравнительно легко; трансформировать вниз гораздо труднее). С помощью явлений, о которых мы сейчас говорим, эта задача может быть решена.

В электрических контурах имеется значительное затухание, но теперь мы имеем средство уменьшать затухание. Это достигается с помощью обратной связи. Уменьшая затухание, можно сделать явления параметрического возбуждения гораздо более ярко выраженными.

Посылая ток в катушку с железным сердечником, мы изменяем коэффициент самоиндукции. Пользуясь этим, можно сравнительно

просто осуществить контур с периодически меняющейся индуктивностью.

Как происходит раскачивание качелей? На них раскачиваются, периодически поднимая и опуская свое тело. Это — параметрический резонанс. Раскачивание возможно только, если есть хотя бы маленький начальный толчок. Здесь происходит то же явление, как в контуре с конденсатором переменной емкости, но в более сложном виде.

Есть другой круг вопросов, где мы также приходим к уравнениям с периодическими коэффициентами, но где нас интересуют не области неустойчивости. Это — вопросы модуляции. Модуляция в радиотелефонии обычно состоит в том, что амплитуда колебания меняется в темпе звукового колебания в передаваемом разговоре.

Модулированное колебание, воспринимаемое приемником, имеет в простейшем случае вид

$$E = A_0(1 + k \cos pt) \cos \omega t,$$

или, что то же самое,

$$E = A_0 \cos \omega t + \frac{kA_0}{2} \cos(\omega - p)t + \frac{kA_0}{2} \cos(\omega + p)t.$$

Представление модулированного колебания в виде суммы трех синусоидальных колебаний целесообразно тогда, когда мы имеем три резонатора, которые отзываются на частоты ω , $\omega - p$ и $\omega + p$.

В колебании модулированного передатчика, наряду с линией частоты ω , имеются, таким образом, боковые полосы или боковые спектры. Если мы хотим сохранить особенности передачи, то мы должны принять не только частоту ω , но и боковые полосы. Они занимают довольно большое место в спектре.

Явилось желание передавать речь, не занимая такую широкую полосу частот. Рассуждали приблизительно следующим образом: если приемник, обладающий острым резонансом, слегка расстроить и если с помощью голоса менять частоту передатчика в темпе звукового колебания, то придется лишь немного менять частоту передатчика, чтобы ток в приемнике, изменяясь на склоне резонансной кривой, пульсировал очень сильно. Именно на таких соображениях основывалось упомянутое ранее „изобретение“ Робинсона¹.

¹ [См. 1-ую лекцию.]

Но дело в том, что чем меньше затухание контура, тем медленнее устанавливается в нем колебание. Крутизна резонансной кривой имеет смысл только для *установившегося* режима. Таким образом, приведенное рассуждение в корне неправильно.

Для того, чтобы узнать, что происходит в действительности, нужно разложить колебание, создаваемое передатчиком, в ряд по синусам и косинусам. В общем случае систем с периодически меняющимся параметром это довольно сложно, но в данном случае есть одно облегчающее обстоятельство. Нас интересует случай, когда частота модуляции p гораздо меньше, чем ω . А. А. Андронов и М. А. Леонтович нашли для этого случая асимптотическое решение¹. При $p \rightarrow 0$ общее решение уравнения (10) стремится к такому:

$$x = C (\omega_0^2 + \alpha_0^2 \cos pt)^{-1/4} \cos \left(\int_0^t \sqrt{\omega_0^2 + \alpha_0^2 \cos pt} dt + b \right), \quad (11)$$

где C и b — произвольные постоянные.

То, что при периодическом изменении емкости меняется и амплитуда, имеет принципиальное значение². Однако практически малые изменения амплитуды не играют роли, и мы можем написать с известным приближением, при достаточно малом α_0 :

$$x = C' \cos \left(\int_0^t \sqrt{\omega_0^2 + \alpha_0^2 \cos pt} dt + b \right). \quad (12)$$

Можно ли сказать, что (10) представляет собой косинусообразное колебание с переменными амплитудой и частотой? Не вводя нового представления, говорить о косинусообразном колебании с переменной амплитудой и переменной частотой бессмысленно. Косинусообразное колебание определено, как колебание вида

$$A \cos(\omega t + \varphi), \quad (13)$$

с *постоянными* A , ω и φ . Но при достаточно медленном изменении величины A со временем может случиться, что если мы найдем решение какой-нибудь задачи для постоянного A и подставим в это готовое решение, вместо постоянного A , *переменное* A ,

¹ [Журнал Русского физико-химического общества, 1927, 59, 429.]

² [См. 11-ую и 12-ую лекции.]

то мы получим с достаточным приближением решение той же задачи для переменного A . В этом случае можно говорить об $A(t) \cos(\omega t + \varphi)$, как о косинусообразном колебании с переменной амплитудой. Аналогично можно определить колебание с переменной частотой.

Но как записать косинусообразное колебание с переменной частотой? Вернемся к нашей формуле (11). Мы склонны сказать, что медленно меняющейся частотой является величина

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + x_0^2 \cos pt}. \quad (14)$$

Это требует разъяснения. Если мы подставим (14) в формулу (13), подобно тому, как вместо постоянного A в нее можно подставить $A(t)$, мы получим:

$$x = A \cos(\sqrt{\omega_0^2 + x_0^2 \cos pt} \cdot t + \varphi).$$

Получится совсем не то, что мы хотели сказать, говоря об ω , как о переменной частоте. Записывать таким способом колебание с переменной частотой неверно.

Что такое период? Если функция имеет период τ , это значит, что она имеет одно и то же значение при $t = t_1$ и при $t = t_1 + \tau$.

Если „период τ медленно меняется“ и частота

$$\frac{2\pi}{\tau} = \omega = \omega_0 + \varphi(t) = f(t), \quad (15)$$

то косинус с периодом τ следует записать так:

$$\cos F(t), \quad (16)$$

где

$$F'(t) = f(t), \quad F(t) = \int_0^t f(t) dt.$$

Это можно пояснить такой аналогией. При равномерном движении

$$x = vt. \quad (17)$$

Переходя к медленно меняющейся скорости

$$v = v_0 + \alpha t, \quad (18)$$

нужно написать

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \alpha t,$$

и интегрировать, а не подставлять (18) в готовую формулу (17).

Покажем, что при записи (16) мы получаем именно то, что хотели. При t , близком к t_1 , мы имеем приближенно:

$$\cos F(t) = \cos [F(t_1) + F'(t_1)(t - t_1)],$$

или

$$\cos F(t) = \cos [F'(t_1)t + \text{const}] = \cos [f(t_1)t + \text{const}],$$

т. е. при t , близком к t_1 , значение функции действительно повторяется через промежутки времени τ , определяемые формулой (15). Значит, если мы хотим, чтобы период равнялся $2\pi/f(t)$, то мы должны записать колебание в виде

$$A \cos \left(\int_0^t f(t) dt + \text{const} \right).$$

Нахождение асимптотического выражения дало для частоты значение (14).

Для того, чтобы ответить на вопрос о том, дает ли частотная модуляция выигрыш в ширине полосы, нужно разложить (12) в ряд Фурье. При этом оказывается, что никакого выигрыша нет.

Пусть

$$\alpha_0^2 \ll \omega_0^2.$$

Тогда приближенно

$$\sqrt{\omega_0^2 + \alpha_0^2 \cos pt} = \omega_0 \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{2\omega_0^2} \cos pt \right),$$

и формула (12) принимает вид

$$x = C' \cos \left(\omega_0 t + \frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p} \sin pt \right) \quad (19)$$

(если выбрать начало отсчета времени так, что $b = 0$).

Мы можем представить (19) в таком виде:

$$x = C' \cos \omega_0 t \cos \left(\frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p} \sin pt \right) - C' \sin \omega_0 t \sin \left(\frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p} \sin pt \right).$$

Если

$$\frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p} \ll 1,$$

то приближенно имеем:

$$\cos\left(\frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p} \sin pt\right) = 1, \quad \sin\left(\frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p} \sin pt\right) = \frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p} \sin pt,$$

$$x = C' \left(\cos \omega_0 t + \frac{\alpha_0^2}{4\omega_0 p} \cos(\omega_0 + p)t - \frac{\alpha_0^2}{4\omega_0 p} \cos(\omega_0 - p)t \right). \quad (20)$$

Мы получаем и здесь несущую частоту ω_0 и боковые полосы $\omega_0 \pm p$. Никакого сужения полосы при частотной модуляции не получается, но здесь есть много интересных особенностей по сравнению с амплитудной модуляцией¹.

Вернемся к вопросу о „синусоидальном колебании с переменной амплитудой и частотой“.

Сложение двух синусоидальных колебаний дает:

$$\cos \omega t + \cos \omega_1 t = 2 \cos \frac{\omega + \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega - \omega_1}{2} t. \quad (21)$$

Если разность частот ω и ω_1 достаточно мала, то можно сказать: здесь получается одно колебание с периодически меняющейся амплитудой. Аналогичным образом, согласно формуле (20), можно сказать: сложение трех колебаний различной частоты может дать одно колебание с периодически изменяющейся частотой. Это тригонометрия, это математически правильно. Но при каких условиях имеет смысл говорить об одном колебании с переменной амплитудой или частотой? Часто говорят: это имеет смысл тогда, когда $\omega - \omega_1$ или p мало по отношению к ω . Но это неверно, не в этом соль. Нужно знать, для чего требуется говорить об одном колебании с переменной амплитудой или частотой, что вы хотите делать с этим колебанием.

Предположим, что нам нужно решить задачу о приеме колебания с помощью резонатора. Для того, чтобы можно было при этом обращаться с (12) или (21), как с обычным синусоидальным колебанием, а потом подставить в результат переменную амплитуду или частоту, нужно, чтобы данный приемник примерно одинаково воспроизводил все синусоидальные слагаемые. Так ли обстоит дело или нет, — это зависит от логарифмического декремента приемника. Как бы ни было мало $|\omega - \omega_1|$ или p по отношению к ω_0 , если логарифмический декремент приемника доста-

¹ [Ср. том III, стр. 410.]

точно мал, то он пропустит отдельные синусоидальные слагаемые по-разному. Он их пропустит приблизительно одинаково — и тогда целесообразно говорить о косинусе с переменной амплитудой или частотой, — когда

$$\frac{|\omega - \omega_1|}{\omega} \ll \frac{d}{2\pi} \quad \text{или} \quad \frac{p}{\omega} \ll \frac{d}{2\pi}.$$

Критерием того, когда имеет смысл говорить о функции, как о косинусе с переменной амплитудой, а когда нет, лежит *вне* самой функции, из самой функции это вычитать нельзя.

При переменной частоте картина боковых полос несколько сложнее, чем при переменной амплитуде, кроме того простого частного случая, для которого можно пользоваться приближенной формулой (20).

ДВАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(15/1 1931 г.)

Интеграл Фурье. Разложение в интеграл Фурье отрезка синусоиды. Несовместимость монохроматичности и концентрированности сигнала. Аналогия с соотношением неопределенностей в волновой механике. Рассмотрение действия произвольной внешней силы на гармонический осциллятор без разложения в спектр.

Мы рассматривали действие периодической силы на линейную колебательную систему с одной степенью свободы¹. Повторяющиеся импульсы (рис. 62) физически полностью подходят под случай периодической силы. Нового математического аппарата здесь не нужно. Но *сигналом* может быть только не повторяющееся периодически воздействие. Периодическое воздействие — это не сигнал.

В конечном интервале можно разложить в ряд Фурье функцию, изображающую любое воздействие. Но вне этого интервала функция, представленная рядом, периодически повторяется. Если мы возьмем на оси t очень большой интервал и разложим функцию, изображающую воздействие в ряд Фурье в этом интервале, то

¹ [См. 16-ую лекцию.]

точно мал, то он пропустит отдельные синусоидальные слагаемые по-разному. Он их пропустит приблизительно одинаково — и тогда целесообразно говорить о косинусе с переменной амплитудой или частотой, — когда

$$\frac{|\omega - \omega_1|}{\omega} \ll \frac{d}{2\pi} \quad \text{или} \quad \frac{p}{\omega} \ll \frac{d}{2\pi}.$$

Критерием того, когда имеет смысл говорить о функции, как о косинусе с переменной амплитудой, а когда нет, лежит *вне* самой функции, из самой функции это вычитать нельзя.

При переменной частоте картина боковых полос несколько сложнее, чем при переменной амплитуде, кроме того простого частного случая, для которого можно пользоваться приближенной формулой (20).

ДВАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(15/1 1931 г.)

Интеграл Фурье. Разложение в интеграл Фурье отрезка синусоиды. Несовместимость монохроматичности и концентрированности сигнала. Аналогия с соотношением неопределенностей в волновой механике. Рассмотрение действия произвольной внешней силы на гармонический осциллятор без разложения в спектр.

Мы рассматривали действие периодической силы на линейную колебательную систему с одной степенью свободы¹. Повторяющиеся импульсы (рис. 62) физически полностью подходят под случай периодической силы. Нового математического аппарата здесь не нужно. Но *сигналом* может быть только не повторяющееся периодически воздействие. Периодическое воздействие — это не сигнал.

В конечном интервале можно разложить в ряд Фурье функцию, изображающую любое воздействие. Но вне этого интервала функция, представленная рядом, периодически повторяется. Если мы возьмем на оси t очень большой интервал и разложим функцию, изображающую воздействие в ряд Фурье в этом интервале, то

¹ [См. 16-ую лекцию.]

функция, представляемая рядом, будет повторяться бесконечное число раз, но через очень большие интервалы. Если интервал разложения достаточно велик, то физически совершенно безразлично, что было раньше начала этого интервала и что будет после его конца. Поэтому мы можем искусственно заменить интересующий нас сигнал периодически повторяющейся силой, представленной рядом Фурье.

Что значит здесь „достаточно большой интервал времени“? Нужно, чтобы к началу реального сигнала успело давно затухнуть то, что дал бы предыдущий искусственный сигнал. Поэтому, чем меньше затухание воспринимающего устройства, тем больше должен быть интервал.

Уравнение движения осциллятора под действием произвольной внешней силы имеет вид

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t). \quad (1)$$

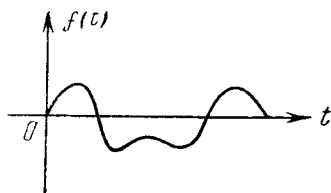


Рис. 74.

Пусть сила $f(t)$ отлична от нуля лишь на протяжении конечного промежутка времени, начиная с $t=0$ (рис. 74). Здесь начальные условия: $x=0$, $\dot{x}=0$ при $t=0$. Разложим силу в ряд Фурье за достаточно большой (по сравнению с $1/\delta$) промежуток времени и возьмем периодическое решение уравнения (1), являющееся суммой периодических вынужденных колебаний, соответствующих всем членам разложения Фурье. Решение удовлетворяет вполне определенным начальным условиям, так как не содержит произвольных постоянных. Можно показать, что это как раз начальные условия $t=0$, $x=0$, $\dot{x}=0$. Таким путем мы получаем то, что нам нужно. Физически ясно, почему это так. В течение всего бесконечного времени никакие силы, кроме $f(t)$, на осциллятор не действуют. Разложение в ряд Фурье приводит к замене $f(t)$ периодической функцией. Так как промежутки, на протяжении которых эта периодическая функция равна нулю, велики по сравнению со временем затухания осциллятора, периодическое решение спадает до нуля к концу этих промежутков, в частности к моменту $t=0$.

Итак, решение в виде ряда Фурье является решением задачи с определенными начальными условиями. К нему можно прибавить собственные колебания и удовлетворить таким образом любым начальным условиям.

Можно решить задачу иначе: не представляя силы в виде ряда Фурье и учитывая явно начальные условия¹. Часто это целесообразнее. Оба способа дают принципиально одно и то же.

Остановлюсь на вопросе, имеющем принципиальное значение, хотя практически он может быть обойден. Можно ли для любой непериодической функции найти разложение, аналогичное ряду Фурье для периодической функции (т. е. разложение на синусы и косинусы), представляющее функцию на всем бесконечном интервале?

Мы рассмотрим вопрос эвристически. Математическое доказательство мы оставим в стороне.

Мы писали ряд Фурье в таком виде:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \quad (2)$$

$$a_k = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} f(\xi) \cos k\omega \xi d\xi, \quad b_k = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} f(\xi) \sin k\omega \xi d\xi, \quad (3)$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T — период функции $f(t)$. Можно переписать ряд Фурье немного иначе, обозначив

$$a'_k = \frac{a_k}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad b'_k = \frac{b_k}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (4)$$

Мы получаем тогда:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (\omega a'_k \cos k\omega t + \omega b'_k \sin k\omega t).$$

Посмотрим теперь, что получится, если переходить к пределу

$$\omega \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

Напишем:

$$k\omega = u_k, \quad \omega = \Delta u \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

(Δu есть разность двух последовательных значений u_k). Тогда

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta u (a'_k \cos u_k t + b'_k \sin u_k t). \quad (6)$$

¹ [См. ниже формулу (15).]

При $\omega \rightarrow 0$ интервалы Δu сужаются. Если $\omega \rightarrow 0$, то мы можем ожидать, что сумма в (6) превратится в интеграл.

Для разложимости в ряд Фурье функция $f(t)$ должна быть всюду ограничена и изображающая ее кривая должна разбиваться на конечное число непрерывных кусков. Теперь, при $\omega \rightarrow 0$, мы должны еще сказать, как ведет себя функция $f(t)$ в бесконечности. Потребуем, чтобы

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(\xi)| d\xi$$

был конечной величиной, т. е. чтобы функция $f(t)$ была абсолютно интегрируемой. В этом случае при $\omega \rightarrow 0$ имеем:

$$a_0 \rightarrow 0.$$

Коэффициенты a'_k и b'_k ($k \neq 0$) мы можем представить, подставляя (3) и (5) в (4), в виде функции от u :

$$a'(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{+T/2} f(\xi) \cos u\xi d\xi, \quad b'(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{+T/2} f(\xi) \sin u\xi d\xi.$$

Переходя к пределу, получаем:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} a'(u) = g_1(u), \quad \lim_{T \rightarrow \infty} b'(u) = g_2(u),$$

причем

$$g_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos u\xi d\xi, \quad g_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin u\xi d\xi. \quad (7)$$

Таким образом, у нас есть основания ожидать, что функция $f(t)$ может быть записана в виде интеграла

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \{g_1(u) \cos ut + g_2(u) \sin ut\} du. \quad (8)$$

Это — интеграл Фурье. Мы не доказали, что всякая функция, удовлетворяющая определенным условиям, может быть разложена в интеграл Фурье, но можно доказать, что всякая функция $f(t)$, определенная в бесконечном промежутке, удовлетворяющая в каждом конечном участке условиям Дирихле и такая, что интеграл

от ее абсолютного значения существует, может быть разложена в интеграл Фурье.

Обычно выполняют подстановку (7) в (8). При этом получается формула

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos u(t - \xi) d\xi \quad (9)$$

— другое написание знаменитой теоремы Фурье или, как ее часто называют, формулы Фурье.

Если функция $f(t)$ разрывна, то интеграл Фурье имеет в точках разрыва значение

$$\frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)].$$

Как уже было сказано, в обычных колебательных вопросах можно обойтись без интеграла Фурье, так как в них продолжение интервала разложения в бесконечность не играет фундаментальной роли. Но в волновой механике продолжение интервала разложения в бесконечность и применение интеграла Фурье играет весьма существенную роль. Для ряда принципиальных вопросов интеграл Фурье представляет фундаментальный интерес.

Укажем теперь некоторые свойства функций, которые можно вычитать из их представления с помощью интеграла Фурье. Некоторые представления, играющие чрезвычайно важную роль в современной физике, основываются на одном, редко формулируемом, свойстве интеграла Фурье. Для того, чтобы показать, о чем идет речь, возьмем простейший пример. Заметим, что для двух классов функций — для функций четных и для функций нечетных — общая формула (8) значительно упрощается.

Пусть

$$f(t) = f(-t)$$

четная функция). Тогда

$$g_1(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos u\xi d\xi, \quad g_2(u) = 0.$$

Пусть

$$f(t) = -f(-t)$$

(нечетная функция). Здесь

$$g_1(u)=0, \quad g_2(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin u\xi d\xi.$$

Представим теперь в виде интеграла Фурье функцию, заданную уравнениями (рис. 75):

$$f(t)=\begin{cases} 0 & \text{при } t < -T/2, \\ \sin \omega t & \text{при } -T/2 \leq t \leq T/2, \\ 0 & \text{при } t > T/2, \end{cases} \quad (10)$$

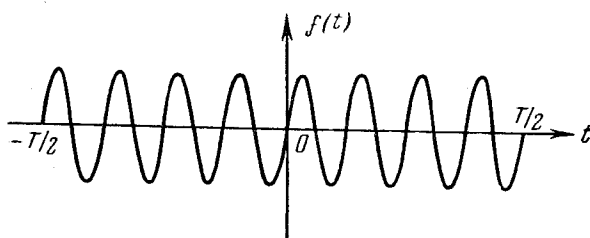


Рис. 75.

причем промежуток T содержит целое число $2N$ полных колебаний:

$$T=2N\tau=2N\frac{2\pi}{\omega} \quad (N - \text{целое}).$$

Функция $f(t)$ — нечетная. Поэтому

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(u) \sin ut \, du, \quad (11)$$

где

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin u\xi d\xi. \quad (12)$$

Отсюда, между прочим, видно, для чего мы ввели множители $\sqrt{\pi/2}$ в выражения (4). При таком выборе коэффициентов в (11) и (12) получается полная взаимность функций f и g .

Подставим (10) в (12):

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{T/2} \sin \omega\xi \sin u\xi d\xi,$$

или

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(uT/2)}{u^2 - \omega^2}. \quad (13)$$

Каков физический смысл величины $g(u)$? Функция (10) есть конгломерат синусоидальных колебаний с непрерывно меняющейся от колебания к колебанию

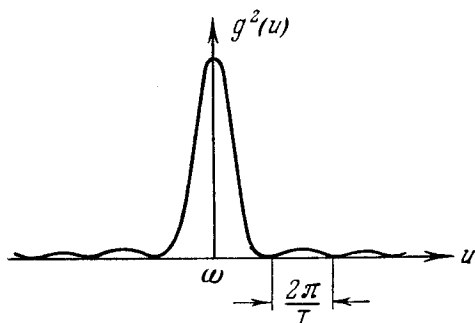


Рис. 76.

амплитудой $\sqrt{\frac{2}{\pi}} g(u) du$. Величина $\sqrt{\frac{2}{\pi}} g(u)$ есть плотность амплитуд в спектральной области $(u, u + du)$.

Займемся исследованием функции $g(u)$. Легко видеть, что самый большой ее максимум находится там, где $u = \omega$. Несмотря на равенство нулю знаменателя, этот

максимум конечен, так как при $u = \omega$ имеем $\sin(uT/2) = 0$. Раскрывая в (13) неопределенность при $u = \omega$, получаем для максимальной плотности амплитуд значение

$$g(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{N\tau}{2\omega}. \quad (14)$$

Будем откладывать по оси абсцисс u , а по оси ординат — квадрат плотности амплитуд (рис. 76). Найдем плотность амплитуд $g(u_1)$ в том максимуме, который соответствует расстройке:

$$\frac{u_1 - \omega}{\omega} = \alpha.$$

Считая (приблизленно), что в максимуме $\sin(uT/2) = 1$, получаем

$$g(u_1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(u_1 - \omega)(u_1 + \omega)},$$

или приближенно

$$g(u_1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2\omega} \cdot \frac{\tau}{2\pi\alpha}.$$

Следовательно,

$$\frac{g(\omega)}{g(u_1)} = 2\pi\alpha N.$$

Чем больше N , тем больше при заданном α это отношение.

Итак, мы задались конечным отрезком синусоиды. Мы разложили его в интеграл Фурье, и мы толкуем этот результат как разложение на всевозможные монохроматические колебания. Коль скоро отрезок синусоиды конечен, он не монохроматичен. Он состоит из бесконечного числа — континуума — монохроматических колебаний. В этом конгломерате особенно сильно представлены определенные монохроматические колебания, — те, период которых очень близок к периоду того монохроматического колебания, частью которого является наш отрезок синусоиды. Они играют тем более доминирующую роль, чем он длиннее. Иначе говоря, чем длиннее отрезок синусоиды, тем он более монохроматичен. При малом N монохроматичность пропадает: колебания, сильно различающиеся по частоте, представлены примерно одинаково сильно.

Назовем величину, характеризующую протяженность отрезка синусоиды во времени, его расплывчатостью. Тогда можно сказать, что если отрезок расплывчат, то он может быть очень монохроматичен, но концентрированность сигнала во времени (малая расплывчатость) и его монохроматичность — противоречивые свойства. Всегда монохроматичность достигается в ущерб концентрации сигнала.

Мы рассмотрели частный пример отрезка синусоиды. Возьмем теперь другой частный пример:

$$f(t) = e^{-k^2 t^2} \cos \omega t.$$

Если k очень мало, то амплитуда изменяется очень медленно — сигнал весьма расплывчат. И здесь можно показать, что если k мало, то колебания очень монохроматичны, а если k велико, то происходит потеря монохроматичности.

Можно и нужно ввести меру (критерий) монохроматичности и меру (критерий) расплывчатости (или, что то же самое, меру немонохроматичности и меру концентрированности), и нужно показать, как мера расплывчатости связана с мерой монохроматичности. Для общего случая это не сделано¹.

Мы знаем, мы на этом останавливались², почему вопросы спектрального разложения играют в физике существенную роль.

¹ [См. А. Г. Майер и М. А. Леонтович. Об одном неравенстве, связанном с интегралом Фурье. ДАН, 4, 353, 1934.]

² [См. 16, 20-ую и 21-ую лекции.]

Так, например, монохроматический свет дает при падении на дифракционную решетку острые максимумы, резкие линии. Монохроматический свет другой длины волны дает резкие линии в другом месте. Для того, чтобы узнать, что будет после падения на дифракционную решетку данного импульса, данного светового сигнала, мы должны разложить его в ряд или в интеграл Фурье. Дифракционная решетка, так же как резонатор, выделяет монохроматические волны. Решетка — это тоже реактив на монохроматичность. Поэтому и здесь важно знать, что концентрированный сигнал не может быть монохроматическим.

В волновой механике ставятся аналогичные вопросы. Идеи, связанные с появлением волновой механики, мы здесь оставим

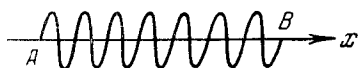


Рис. 77.

в стороне. Однако я не могу не упомянуть о том, какую роль играет в волновой механике теорема о несовместимости монохроматичности и концентрированности.

В волновой механике утверждается, что с электроном сопряжена волна, квадрат амплитуды которой дает вероятность того, что электрон находится в данном месте. Пусть волна имеет форму рассмотренного нами отрезка синусоиды (рис. 77). Волновая механика истолкует это так: левее A вероятность нахождения электрона равна нулю, между A и B она имеет некоторое постоянное значение, правее B она снова равна нулю.

Бесконечная монохроматическая волна соответствует электрону с определенной, фиксированной скоростью. Но пусть волна немонохроматическая. Тогда можно говорить о вероятности того, что скорость находится в данных границах. Волновая механика утверждает следующее. Нужно разложить заданную волну на сумму монохроматических волн (бесконечных синусоид). Тогда вероятности того, что электрон имеет ту или другую скорость, относятся друг к другу, как квадраты амплитуд соответствующих этим скоростям монохроматических волн (для точности здесь нужно говорить об интеграле Фурье и об отношении квадратов амплитудных плотностей).

Если волна, указывающая вероятность положения электрона, сконцентрирована, т. е. если с значительной точностью задано положение электрона, то на основании предыдущего мы можем утверждать, что имеется размытое распределение для вероятности

скоростей. Мы получаем большую неопределенность в скорости электронов.

Если согласиться с тем, что связь между волной, с одной стороны, координатой и скоростью электрона — с другой, такая, как указывает волновая механика, то отсюда с необходимостью следует вывод: точное значение положения и точное значение скорости исключают друг друга.

Классическая механика исходила из мысли, что можно одновременно установить с любой (принципиально) точностью и *положение* и *скорость* частицы. Она учит, как движется тело, если даны x_0 и $\dot{x}_0$, в один и тот же момент времени. Волновая механика приводит к тому принципиальному результату, что электрон не может иметь одновременно точное положение и точную скорость.

Если мы приняли то определение вероятности для скорости и координаты, которое дает волновая механика, то вопрос о том, верен ли только что сформулированный результат, — вопрос чисто математический, связанный с теорией интеграла Фурье. Этого нельзя понять с двух слов. Для того, чтобы здесь все понять, нужно математическое исследование.

Позвольте на этом кончить с интегралом Фурье.

Мы узнали, что действие произвольной силы можно свести на знакомые вещи, на монохроматические колебания. Часто поступают иначе. Часто бывает гораздо правильнее задать начальные условия и решать задачу в лоб, беря силу такой, как она дана.

Не трудно убедиться подстановкой (доказательство подстановкой является совершенно строгим), что

$$x = e^{-\delta t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) + \frac{e^{-\delta t}}{\omega} \int_{t_0}^t e^{\delta \xi} f(\xi) \sin \omega(t - \xi) d\xi, \quad (15)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, является решением уравнения (1) при какой угодно $f(t)$. Оно применимо, например, и в том случае, если на маятник подействовал кратковременный толчок — заведомо несинусоидальная сила. Как найдено решение (15) — это другое дело (его находят методом вариации постоянных). Но это *решение*, и оно содержит две произвольные постоянные, т. е. является *общим* решением. Начальные условия удовлетворяются подбором C_1 и C_2 . Последний член вместе с его производной пропадает при $t = t_0$. Как сказано, решение (15) годно „на все случаи

жизни", но в случае синусоидальной силы пользоваться им нецелесообразно.

Мы не будем дискутировать решение (15) в общем виде, а рассмотрим только тот частный случай, когда вначале ($t=t_0=0$) осциллятор не смещен и находится в покое. При этом $C_1=C_2=0$ и

$$x = \frac{e^{-\delta t}}{\omega} \int_0^t e^{\delta \xi} f(\xi) \sin \omega(t - \xi) d\xi. \quad (16)$$

Пусть $f(t)$ представляет собой импульс, действующий в течение промежутка времени $(0, T)$. Пусть на протяжении всего импульса сила $f(t)$ положительна. Обработаем решение (16) так, чтобы легко было дать ответ на интересующий нас вопрос: как ведет себя осциллятор после того, как подействовал очень кратковременный импульс. Так как при $\xi > T$ имеем $f(\xi)=0$, то можно написать, вместо (16), для $t > T$:

$$x = \frac{e^{-\delta t}}{\omega} \int_0^T e^{\delta \xi} f(\xi) \sin \omega(t - \xi) d\xi. \quad (17)$$

По теореме о среднем, поскольку $f(\xi) > 0$, имеем:

$$x = \frac{e^{-\delta t}}{\omega} e^{\delta \theta T} \sin \omega(t - \theta T) \int_0^T f(\xi) d\xi \quad (0 < \theta < 1). \quad (18)$$

Нас интересует случай, когда длительность импульса мала по сравнению с периодом τ : $T/\tau \ll 1$, т. е. $\omega T \ll 2\pi$, и, следовательно,

$$\omega \theta T \ll 2\pi. \quad (19)$$

Обозначив

$$I = \int_0^T f(\xi) d\xi, \quad (20)$$

мы получаем приближенно для этого случая на основании (18)—(20):

$$x = I \frac{e^{-\delta t}}{\omega} \sin \omega t. \quad (21)$$

Посмотрим теперь, что это значит физически. I есть импульс силы. Если система такова, что продолжительность действия силы $f(t)$ мала по сравнению с периодом τ , то вид функции $f(t)$

не имеет значения; важен только импульс силы. Этот результат очень важен для построения измерительных устройств. Пусть система, обладающая определенным периодом (например, маятник), получает удар. Каково максимальное отклонение?

Из (21) получаем (если $\delta \ll \omega_0$):

$$x_{\max} = \frac{I}{\omega}. \quad (22)$$

Наблюдая максимальное отклонение, можно сразу определить импульс силы. Возьмем для примера баллистический маятник (рис. 78). Пусть m — масса снаряда, M — масса маятника, причем $m \ll M$.

Снаряд застревает в маятнике. Тогда

$$I = mv,$$

где v — скорость снаряда.

На основании (20) и (22), вспомнив, что „сила“ $f(t)$ в уравнении (1) была в действительности сила, деленная на массу, мы получаем для максимального отклонения маятника значение

$$x_{\max} = \frac{mv}{M\omega}.$$

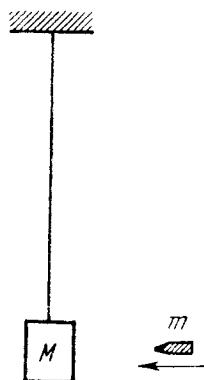


Рис. 78.

Зная m , ω , M и измерив $x_{\max}$, можно узнать v .

Аналогично обстоит дело в баллистическом гальванометре. Здесь вращающий момент пропорционален силе тока:

$$\ddot{\phi} + 2\delta\dot{\phi} + \omega_0^2\phi = \alpha i$$

(ϕ — угол отклонения; i — сила тока). При токах малой продолжительности (продолжительность тока мала по сравнению с периодом собственных колебаний) максимальное отклонение пропорционально

$$Q = \int_0^T i dt,$$

т. е. количеству электричества, прошедшему через прибор.

При выводе соотношения (18) мы сделали предположение, что $f(t)$ не меняет знака. Но от этого предположения можно

освободиться. Формула (18) справедлива и при знакопеременной кратковременной силе. Для того, чтобы это доказать, нужно представить знакопеременную $f(t)$ как чередование знакопостоянных сил (рис. 79).

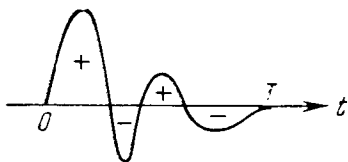


Рис. 79.

Мы рассмотрели случай кратковременной силы. Другой важный случай — тот, когда сила меняется *очень медленно*.

Что значит „очень медленное“ нарастание силы? Дать точную формулировку здесь труднее, чем для кратковременной силы. Ясно одно: если бы было

$$f(t) = f_0 = \text{const},$$

то мы имели бы статическое отклонение

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2}.$$

Если $f(t)$ изменяется достаточно медленно, то с достаточным приближением решение будет квазистатическим, т. е. таким

$$x = \frac{f(t)}{\omega_0^2}. \quad (23)$$

Для того, чтобы это показать, преобразуем формулу (16) посредством интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} x &= \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\omega} \int_0^t e^{i\omega_0 \xi} f(\xi) \frac{d \cos \omega(t - \xi)}{\omega} = \\ &= \frac{f(t)}{\omega^2} - \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\omega^2} \int_0^t [f'(\xi) + i\omega_0 f(\xi)] e^{i\omega_0 \xi} \cos \omega(t - \xi) d\xi \end{aligned}$$

(здесь принято во внимание, что $f(0) = 0$). Пренебрегая затуханием, получаем:

$$x = \frac{f(t)}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \int_0^t f'(\xi) \cos \omega_0(t - \xi) d\xi.$$

Получилось статическое отклонение (23) + поправка, которая тем меньше, чем меньше $f'(t)$, т. е. чем медленнее меняется сила. Этой

поправкой можно пренебречь, если сила меняется достаточно медленно по отношению к периоду собственных колебаний.

ДВАДЦАТЬ ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ

(18/I 1931 г.)

Реальность синусообразных слагаемых в интеграле Фурье. Применения гармонических резонаторов в регистрирующих приборах. „Молоточек“ Н. Н. Андреева. Ток в ускоренно движущемся электрическом контуре; инерция электронов. Аналогия в вопросах колебаний.

Я хочу ответить сначала на записку. В ней поставлен разумный и интересный вопрос. Он касается физического смысла разложения в интеграл Фурье.

Когда мы разлагали

$$(1 + k \cos pt) \cos \omega t \quad (1)$$

на три синусоидальные составляющие, то на вопрос об их реальности мы отвечали следующим образом. Представление (1) и представление

$$\cos \omega t + \frac{k}{2} \cos (\omega - p) t + \frac{k}{2} \cos (\omega + p) t \quad (2)$$

это (на основании тригонометрии) — одно и то же. Каждое из трех колебаний (2) можно выделить резонатором.

Когда же мы имели дело с непериодической функцией такого типа, как на рис. 74, и разлагали ее в интеграл Фурье

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \{g_1(u) \cos ut + g_2(u) \sin ut\} du, \quad (3)$$

то мы тоже представляли ее в виде суммы синусоидальных колебаний, каждое из которых длится от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. В первом случае был дискретный спектр, здесь — сплошной. Реальны ли здесь эти синусоидальные составляющие?

Возьмем наш интеграл Фурье при $t < 0$, когда заведомо $f(t) = 0$. Разумеется, там не имеет смысла говорить о существовании синусоидальных составляющих, но никакого противоречия с (3) нет.

поправкой можно пренебречь, если сила меняется достаточно медленно по отношению к периоду собственных колебаний.

ДВАДЦАТЬ ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ

(18/I 1931 г.)

Реальность синусообразных слагаемых в интеграле Фурье. Применения гармонических резонаторов в регистрирующих приборах. „Молоточек“ Н. Н. Андреева. Ток в ускоренно движущемся электрическом контуре; инерция электронов. Аналогия в вопросах колебаний.

Я хочу ответить сначала на записку. В ней поставлен разумный и интересный вопрос. Он касается физического смысла разложения в интеграл Фурье.

Когда мы разлагали

$$(1 + k \cos pt) \cos \omega t \quad (1)$$

на три синусоидальные составляющие, то на вопрос об их реальности мы отвечали следующим образом. Представление (1) и представление

$$\cos \omega t + \frac{k}{2} \cos (\omega - p) t + \frac{k}{2} \cos (\omega + p) t \quad (2)$$

это (на основании тригонометрии) — одно и то же. Каждое из трех колебаний (2) можно выделить резонатором.

Когда же мы имели дело с непериодической функцией такого типа, как на рис. 74, и разлагали ее в интеграл Фурье

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \{g_1(u) \cos ut + g_2(u) \sin ut\} du, \quad (3)$$

то мы тоже представляли ее в виде суммы синусоидальных колебаний, каждое из которых длится от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. В первом случае был дискретный спектр, здесь — сплошной. Реальны ли здесь эти синусоидальные составляющие?

Возьмем наш интеграл Фурье при $t < 0$, когда заведомо $f(t) = 0$. Разумеется, там не имеет смысла говорить о существовании синусоидальных составляющих, но никакого противоречия с (3) нет.

Когда спектр дискретный, можно выделить каждую синусоидальную составляющую в отдельности. Но в случае непрерывного спектра физически можно выделить только *интервал* частот, а не отдельную частоту. Все физические средства таковы, что могут выделять из (3) только некоторые континуумы частот. А для $t < 0$ *любой* такой континуум частот дает в сумме нуль.

Можно доказать, что какой бы мы ни взяли резонатор и как бы мы его ни настроили, колебание, возникающее в резонаторе, представляется таким интегралом Фурье, который равняется нулю при $t < 0$, если там $f(t) = 0$ ¹.

Резонаторы встречаются чрезвычайно часто в качестве инструментов для исследования процессов. Сюда относятся гальванометр, осциллограф, сейсмограф. Свойства этих регистрирующих аппаратов хорошо известны. Их следует строить по-разному, в зависимости от требований, которые к ним предъявляются. Какими точками зрения нужно руководствоваться при постройке таких приборов?

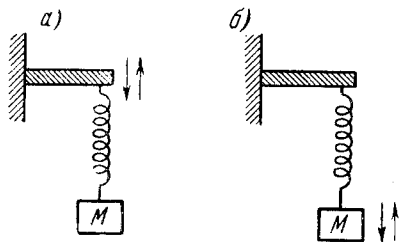


Рис. 80.

Возьмем, например, сейсмограф. При сотрясении почвы верхний конец пружины (рис. 80, а) качается. Можно написать уравнение движения груза в неинерциальной системе отсчета, связанной с подставкой. Здесь требуется, чтобы груз по возможности оставался в покое в инерциальной системе. Тогда изменения длины пружины будут измерять смещения почвы. Это требование приводит к тому, что собственный период системы должен быть гораздо больше периода колебаний почвы, т. е. должно быть

$$\frac{p}{\omega_0} \gg 1$$

(p — вынуждающая, ω_0 — собственная частота). Чем больше отношение p/ω_0 , тем правильнее изменения длины пружины воспроизводят колебания почвы.

Совсем иначе обстоит дело в осциллографе. Здесь „подставка“ (рис. 80, б) находится в покое, а смещение „груза“ должно быть

¹ [См. том V, стр. 69 и след.]

подобно действующей на него силе и возможно больше по величине. Таким образом, здесь предъявляются два требования:

- 1) чувствительность;
- 2) отсутствие искажений формы силы.

Эти два требования противоречивы: если чувствительность велика, то происходят и большие искажения. Это следует прямо из тех свойств резонаторов, которые мы уже знаем. Большая чувствительность (большое отклонение под действием заданной силы) достигается при резонансе. Но если сила не чисто синусоидальная, то — вблизи резонанса на одну из ее синусоидальных составляющих — различным синусоидальным составляющим соответствует совершенно различное соотношение отклонения и силы. Смещение имеет совсем другую форму, чем сила.

Нужно искать компромисс между обоими требованиями.

Пусть мембрана (например, мембрана телефона) колеблется синусообразно с очень малой амплитудой. Как измерить эту амплитуду? Представим себе, что на мембране лежит тело массы M . Мы можем написать для него уравнение движения

$$M\ddot{x} = F + P, \quad (4)$$

где P — сила, действующая на M со стороны мембраны, F — сумма всех остальных сил (сюда входит и сила тяжести).

Зная движение мембраны, т. е. функцию $x = x(t)$ и силу F , можно из уравнения (4) вычислить величину P . Предположим сначала, что масса M припаяна к мембране. Если из уравнения (4) получится $P < 0$, это будет означать, что спай тянет массу M . Пусть теперь M не припаяна, а просто лежит на мембране. Теперь, если уравнение (4) дает $P < 0$, это будет означать, что масса отрывается от мембраны.

Найдем, при каких условиях это произойдет.

Пусть F — только сила тяжести. Тогда

$$M\ddot{x} = -Mg + P.$$

Мембрана движется по закону

$$x = a \sin \omega t, \quad (5)$$

и, следовательно,

$$P = -Ma\omega^2 \sin \omega t + Mg.$$

Грузик оторвется от мембраны (P будет принимать отрицательные значения), если

$$Ma\omega^2 \geq Mg,$$

т. е. ускорение мембраны начнет превышать ускорение тяжести. При этом амплитуда смещения

$$a \geq \frac{g}{\omega^2}. \quad (6)$$

Будем постепенно увеличивать амплитуду колебаний мембраны. Пока она мала, грузик будет двигаться вместе с мембраной. Когда амплитуда возрастет настолько, что будет выполнено условие (6),

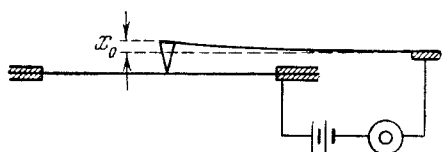


Рис. 81.

масса начнет подпрыгивать. Если на телефонной мембране лежит шарик, то при малых токах все будет спокойно, но при увеличении тока в определенный момент начинается дребезжание. Определив момент

начала дребезжания, можно, зная ω , вычислить a . Например, при $\omega = 2\pi \cdot 200 \text{ сек}^{-1}$ дребезжание начнется при

$$a = \frac{981}{4\pi^2 \cdot 4 \cdot 10^4} \approx 0,006 \text{ мм.}$$

Получается очень чувствительный метод измерения амплитуды. На это обратил внимание Брэгг¹. Н. Н. Андреев² использовал только что разобранный случай для построения измерительного прибора — „молоточка“.

Пусть, когда мембрана покоится (рис. 81), молоточек отклонен ею на расстояние x_0 от своего положения равновесия, которое он занимал бы в отсутствие мембраны. При колебаниях мембраны имеем

$$M\ddot{x} = -k(x_0 + x) + P,$$

где k — упругость пружины молоточка, x — смещение мембраны. Подставляя сюда (5), получаем следующее значение амплитуды, при которой начинается дребезжание (т. е. P начинает принимать отрицательные значения):

$$a = \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} x_0, \quad (7)$$

¹ [Engineering, 1918.]

² [Н. Н. Андреев. Журн. прикл. физ., 2, 205, 1925.]

где

$$\omega_0^2 = \frac{k}{M}$$

— собственная частота молоточка. Если

$$\omega_0^2 \ll \omega^2$$

(язычок с большим собственным периодом), то вместо (7) можно написать приближенно

$$a = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} x_0.$$

Изменяя x_0 с помощью микрометрического винта и замечая начало дребезжания, можно отсюда найти a . Таким образом можно измерять амплитуды механических колебаний. Для того, чтобы прибор был возможно более чувствительным, нужно, чтобы отношение ω_0/ω было возможно меньше. Начало дребезжания (отрыва молоточка от мембраны) можно услышать в телефон (рис. 81). В этот момент начинается прерывание контакта.

Сделав $\omega_0/\omega = 0,01$, получаем в момент отрыва $a = 10^{-4} x_0$. Если отрыв наступает при $x_0 = 1$ мм, то $a = 10^{-4}$ мм. Получается чрезвычайно чувствительный прибор. Для амплитуд порядка 10^{-4} мм теория еще хороша, но дальше начинаются неприятности. Теория предполагает, что молоточек просто лежит на мембране, не при-ставая к ней. В действительности он к ней как бы „чуть-чуть припаян“.

Что здесь поучительно? Большая чувствительность достигается благодаря тому, что при колебательных процессах ускорение чрезвычайно быстро растет с частотой (если амплитуда смещения задана). Из (5) имеем:

$$\ddot{x}_{\max} = \omega^2 a.$$

При больших частотах это ведет к колоссальным ускорениям, даже при ничтожных смещениях.

Например, пьезокварцевая пластинка колеблется с амплитудой смещения всего лишь 10^{-6} см, но с частотой 10^6 сек $^{-1}$. Получается максимальное ускорение

$$\ddot{x}_{\max} = 4\pi^2 10^{12} \cdot 10^{-6} \approx 4 \cdot 10^4 g.$$

Положим массу M на поперечно колеблющийся пьезокварцевый стержень (рис. 82). Что будет с собственным периодом?

Казалось бы, колебания должны замедляться и собственный период должен увеличиваться. В действительности может оказаться, что M совершенно не повлияет на период, потому что при том ускорении, которое имеет пьезокварц, она остается на месте. Пусть $M=0,1$ г. При $a=10^{-6}$ см, $\nu=10^6$ сек $^{-1}$ для того, чтобы ее увлечь, нужна сила

$$M\ddot{x}_{\max}=M \cdot 4 \cdot 10^4 g=0,1 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \approx 4 \text{ кг.}$$

При $M=1$ г нужна была бы сила в 400 кг. Это — колоссальные силы, и для того, чтобы их создать, силы трения не хватает. Практически масса остается в покое, и ее присутствие не влияет на собственную частоту; оно только увеличивает затухание.

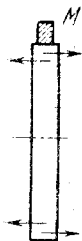


Рис. 82.

Благодаря огромным ускорениям, можно получать при механических колебаниях высокой частоты „феноменальные“ явления. Этот вопрос еще мало разработан.

Часто возникает такой вопрос: как движется маятник, если движется его точка подвеса (например, вместе с Землей)? Механика учит, как решать такие вопросы. Здесь нет никаких принципиальных трудностей.

Можно поставить аналогичный вопрос для электрических систем. Как ведут себя электрические системы, если они находятся в движении? На этот вопрос ответить не так просто. Механика не переносится сюда непосредственно.

Рассмотрим, например, электрическую цепь, движущуюся ускоренно (рис. 83). Как написать для этого случая уравнение для тока?

Начнем с обычного уравнения для тока

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad (8)$$

и постараемся обосновать это уравнение. Ток в проводнике есть движение заряженных частиц — электронов. Пусть N — число электронов на единицу длины провода, $\dot{x}$ — средняя скорость их упорядоченного движения. Тогда

$$Ne\dot{x} = i, \quad (9)$$

где e — абсолютное значение заряда электрона. Что представляет собой с этой точки зрения индуктивность L ? Казалось бы, это не что иное, как масса электронов, т. е. L получается вследствие

инерции электронов. Но это не так. Если бы это было так, то задача о токе была бы механической задачей о движении электронов. Дело в том, что L не определяется суммой масс электронов и в этом заключается глубокое отличие от механики, где общая масса системы есть сумма масс составляющих ее частиц:

$$M = \sum_i m_i.$$

В электродинамике кинетическая энергия — это магнитная энергия движущихся электронов. Магнитная энергия есть квадратичная функция от напряженности поля. Поля отдельных электронов суммируются, но отнюдь не энергии: помимо членов, определяемых отдельными электронами, в выражении для энергии имеются еще члены взаимодействия. Индуктивность контура обусловлена именно этой *взаимной* магнитной энергией, намного превышающей сумму масс всех электронов. Но вернемся к вопросу об уравнении для тока в ускоренно движущейся цепи.

Электроны имеют собственные массы. Будем считать, что скорости электронов малы, так что можно пренебречь релятивистским эффектом изменения массы со скоростью. В таком случае можно написать для электрона уравнение движения

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} + eE, \quad (10)$$

где E — напряженность электрического поля, а $-\alpha\dot{x}$ — некоторая сила, аналогичная трению. Разные теории объясняют эту силу по-разному, но мы не будем входить в объяснение этой силы, а заметим лишь, как связано α с макроскопическими величинами. Макроскопический ток связан с полем законом Ома

$$i = \frac{E}{\rho},$$

где ρ — сопротивление линейного проводника. Пользуясь (9), получаем:

$$\dot{x} = \frac{E}{Ne\rho}. \quad (11)$$

Пусть течет постоянный ток. Тогда из (10) имеем:

$$\alpha\dot{x} = eE. \quad (12)$$

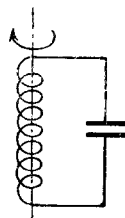


Рис. 83.

На основании (11) и (12) получаем:

$$\alpha = Ne^2 \rho. \quad (13)$$

Для вычисления среднего поля E поступают следующим образом. Применим к контуру (рис. 84) уравнения Максвелла. Мы исходим из уравнения Максвелла

$$\oint E_s ds = - \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}. \quad (14)$$

Интеграл в левой части мы разбиваем на два:

$$\oint E_s ds = \int_{bda} E_s ds + \int_{acb} E_s ds.$$

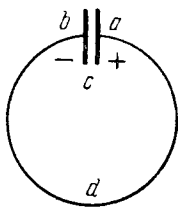


Рис. 84.

Если ток квазистационарный, то первый интеграл справа равен sE , где s — длина провода. По определению второй интеграл справа есть разность потенциалов Q/C между обкладками конденсатора. Итак,

$$\oint E_s ds = sE + \frac{Q}{C}. \quad (15)$$

Комбинируя соотношения (14) и (15), получаем:

$$E = - \frac{1}{s} \left(L \frac{di}{dt} + \frac{Q}{C} \right). \quad (16)$$

Однако в этом выводе допущена грубейшая принципиальная ошибка. Что такое разность потенциалов в электростатике? Это

$$P = \int_A^B E_s ds.$$

Определение имеет смысл только тогда, когда интеграл не зависит от пути между точками A и B , т. е., что равносильно, когда

$$\oint E_s ds = 0. \quad (17)$$

В нашем случае условие (17) заведомо не выполняется, так как имеет место соотношение (14), причем

$$L \frac{di}{dt} \neq 0.$$

Таким образом, в нашем случае понятие разности потенциалов не имеет смысла.

Какой же смысл имеет наш вывод уравнения (16)? Хотя интеграл $\int E_s ds$ зависит от пути, мы можем принять, что *внутри* конденсатора (мы говорим *специально* о таком пути, который проходит внутри конденсатора) поле примерно такое же, какое было бы в электростатическом случае, если конденсатор имеет заряд Q . Только с этой оговоркой можно здесь говорить с достаточным приближением о разности потенциалов, несмотря на то, что в подобного рода явлениях понятие разности потенциалов в принципе неправильно.

Из уравнений (10), (13) и (16) следует:

$$\frac{sm}{e} \ddot{x} + sNe\dot{x} + \left(L \frac{di}{dt} + \frac{Q}{C} \right) = 0. \quad (18)$$

Если можно считать m бесконечно малым, то отсюда сразу получается обычное уравнение (8). Однако, как мы видим, уравнение (8) не вполне отвечает тому, что происходит в цепи. В полном уравнении (18) есть еще один член с $\frac{di}{dt}$, которым обычно пренебрегают. Это возможно именно потому, что взаимная масса электронов намного превышает сумму масс отдельно взятых электронов.

Мы хотим теперь написать уравнение в неинерциальной системе отсчета. Нас интересует только тангенциальная составляющая движения электронов. Нужно добавить в уравнение движения (18) тангенциальную силу инерции ($-m\ddot{\xi}$), где ξ — путь, пройденный точками колебательного контура, а x — путь, пройденный электронами в системе координат, жестко связанной с контуром. Сила трения зависит от относительной скорости $\dot{x}$. Выражая $\dot{x}$ через i с помощью соотношения (9) и учитывая, что $\rho s = R$ есть полное сопротивление, получаем вместо (18) уравнение

$$\left(\frac{sm}{Ne^2} + L \right) \frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = - \frac{sm}{e} \ddot{\xi}.$$

Как сказано, поправка sm/Ne^2 очень мала по сравнению с L , и мы можем написать приближенно:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = - \frac{sm}{e} \ddot{\xi}. \quad (19)$$

Таким образом, в ускоренно движущемся контуре явления происходят так, как будто контур остается в покое, но зато действует электровозбудительная сила

$$-\frac{sm}{e}\ddot{\xi}. \quad (20)$$

Величина m/e очень мала:

$$\frac{m}{e} = \frac{1}{1,8 \cdot 10^7} \text{ CGSm.}$$

Какова может быть амплитуда электровозбудительной силы (20) при колебательном движении катушки? Здесь главное — частота. Пусть частота равна 200 колебаний в секунду, амплитуда — 0,5 см и пусть $s = 100 \text{ м} = 10^4 \text{ см}$ (большая катушка). Тогда амплитуда электровозбудительной силы будет

$$\mathcal{E} = \frac{10^4 \cdot 0,5 \cdot 4\pi^2 \cdot 4 \cdot 10^4}{1,8 \cdot 10^7} \text{ CGSm} \approx 10^{-4} \text{ вольта.}$$

Это вполне измеримая величина.

Опыт такого рода был сделан Толмэном и Стюартом¹. Он был сделан не совсем так, как здесь говорилось. У них не было конденсатора ($C = \infty$) и $L \frac{di}{dt}$ было мало по сравнению с Ri . Таким образом, к этому опыту было приближенно применимо уравнение

$$Ri = -\frac{sm}{e}\ddot{\xi}.$$

Толмэн и Стюарт раскручивали катушку и внезапно ее останавливали. При этом наблюдалось появление кратковременного тока. Из опыта можно было найти отношение e/m .

Можно было бы, заморозив контур, уменьшить R и благодаря этому увеличить эффект. При очень низких температурах главную роль будет играть член $L \frac{di}{dt}$, но с помощью емкости можно для определенной частоты скомпенсировать индуктивный член и таким путем, пользуясь резонансом, получить довольно большие токи.

Я не вдаюсь в подробности, связанные с такими опытами. Для меня важно было изложить лишь относящиеся к этому кругу вопросов принципиальные соображения.

Быть может, есть случаи (при разрядах в вакууме), когда добавочная индуктивность sm/Ne^2 играет заметную роль. Это интересно было бы выяснить.

¹ [Опубликован в 1915 г. В 1911 г. аналогичный опыт был осуществлен Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси. См. Н. Д. Папалекси. Собрание трудов, стр. 379 и след.]

Перейду к другому вопросу.

Мы видели, что существует глубокая аналогия между электрическими и механическими колебаниями. Можно провести много других аналогий. Вот одна аналогия, на которую обратил внимание Кирхгоф.

Изогнем упругий тонкий стержень (рис. 85). Его форму можно задать уравнением вида

$$\theta = f(s) \quad (21)$$

(θ — угол с осью абсцисс; s — длина дуги). Вид функции f характеризует кривую.

В теории упругости доказывается, что функция (21) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + n^2 \sin \theta = 0, \quad (22)$$

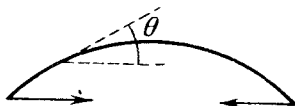


Рис. 85.

где n^2 — определенная комбинация из величин, характеризующих стержень.

Уравнение (22) аналогично уравнению колебаний маятника с большой амплитудой. Зависимость угла θ от длины дуги s такая же, как зависимость угла отклонения маятника от времени. Это — изящная и любопытная аналогия. Движение маятника в двух измерениях можно изобразить такой деформацией стержня, когда он образует кривую двойной кривизны. Самое интересное здесь то, что аналогия применима к колебаниям *большой* амплитуды.

ДВАДЦАТЬ ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ

(25/I 1931 г.)

Понятие о связях в механике. Связи голономные, неголономные и полуголономные. Полуголономные связи в электрических системах. Уравнения Лагранжа-Максвелла. Условие устойчивости Дирихле. Кинетическая и потенциальная энергии как квадратичные формы. Относительность рода связи.

Мы рассмотрим теперь колебания таких систем, для однозначного описания конфигурации которых недостаточно задать *одну* координату. (В случае маятника конфигурация определяется заданием *одной* координаты: угла отклонения; в случае контура с индуктивностью и емкостью — также *одной* координатой: зарядом конденсатора).

Перейду к другому вопросу.

Мы видели, что существует глубокая аналогия между электрическими и механическими колебаниями. Можно провести много других аналогий. Вот одна аналогия, на которую обратил внимание Кирхгоф.

Изогнем упругий тонкий стержень (рис. 85). Его форму можно задать уравнением вида

$$\theta = f(s) \quad (21)$$

(θ — угол с осью абсцисс; s — длина дуги). Вид функции f характеризует кривую.

В теории упругости доказывается, что функция (21) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + n^2 \sin \theta = 0, \quad (22)$$

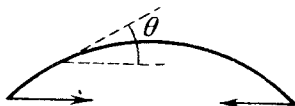


Рис. 85.

где n^2 — определенная комбинация из величин, характеризующих стержень.

Уравнение (22) аналогично уравнению колебаний маятника с большой амплитудой. Зависимость угла θ от длины дуги s такая же, как зависимость угла отклонения маятника от времени. Это — изящная и любопытная аналогия. Движение маятника в двух измерениях можно изобразить такой деформацией стержня, когда он образует кривую двойной кривизны. Самое интересное здесь то, что аналогия применима к колебаниям *большой* амплитуды.

ДВАДЦАТЬ ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ

(25/I 1931 г.)

Понятие о связях в механике. Связи голономные, неголономные и полуголономные. Полуголономные связи в электрических системах. Уравнения Лагранжа-Максвелла. Условие устойчивости Дирихле. Кинетическая и потенциальная энергии как квадратичные формы. Относительность рода связи.

Мы рассмотрим теперь колебания таких систем, для однозначного описания конфигурации которых недостаточно задать *одну* координату. (В случае маятника конфигурация определяется заданием *одной* координаты: угла отклонения; в случае контура с индуктивностью и емкостью — также *одной* координатой: зарядом конденсатора).

Оставив пока в стороне такие системы, как струна или антенна, имеющие бесконечное число степеней свободы¹, мы рассмотрим механические системы с конечным числом степеней свободы и их электрические аналоги — системы, состоящие из конечного числа индуктивностей и емкостей, причем сначала отвлечемся от сил трения. Мы не будем стремиться к большой общности. Все самое существенное мы выявим на системах с *двумя* степенями свободы. Мы подробно разовьем теорию для двух степеней свободы и укажем, как результаты обобщаются на любое число степеней свободы.

Пусть имеется k свободных точек. Если мы знаем силы, действующие между ними, то мы знаем и уравнения движения

$$m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

(m_i — масса; $\mathbf{w}_i$ — ускорение; $\mathbf{F}_i$ — результирующая сила).

Часто задача ставится иначе. Имеется k точек, но со связями. Представим себе, например, маятник на жестком стержне. Он может двигаться в трех измерениях x, y, z . Маятник испытывает действие силы тяжести, а также сил со стороны стержня. Если бы мы знали все силы, то могли бы вычислить движение. Силы, действующей со стороны стержня, мы не знаем, но нам заранее известно, что при малейшем изменении длины стержня эта сила чрезвычайно возрастает. Поэтому можно считать, что длина стержня неизменна, т. е. что движение маятника происходит по кругу с центром в точке O .

Таким образом, тело движется в плоскости x, y , на него действует сила тяжести, и, кроме того, известно, что

$$x^2 + y^2 = l^2.$$

Требуется найти движение. Это — несколько другая постановка задачи, чем для системы свободных точек. Мы знаем только часть сил. Остальные силы неизвестны, но известно, что они налагают некоторые ограничения на координаты. Достаточно знать изменение одной из координат x или y , чтобы знать все движение.

Возьмем более общий случай. Имеется k точек и m функциональных соотношений между их координатами. Тогда имеются $n = 3k - m$ неизвестных величин, которые вполне определяют

¹ [См. часть II.]

движение. Число *независимых* координат, необходимое и достаточное для однозначного определения положения системы, называется числом степеней свободы системы.

Рассмотрим два маятника в плоскости, соединенных так, как показано на рис. 86. Между координатами x_1, y_1, x_2, y_2 обоих маятников имеется два соотношения:

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2;$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2.$$

Это — система с двумя степенями свободы.

Пусть система имеет n степеней свободы. Если мы знаем, как n ее *независимых* координат меняются в зависимости от времени, то мы полностью знаем движение системы.

Для этих n координат можно составить уравнения, которые „ничего не знают“ об остальных координатах. Это — уравнения Лагранжа (иногда говорят — уравнения Лагранжа второго рода; иногда, имея в виду не только механические, но и электрические и электромеханические системы, — уравнения Лагранжа-Максвелла).

Такие системы, для которых при наличии связей могут быть определены n независимых величин (связи выражаются при этом соотношениями между координатами), называются *голономными* системами. Сами эти величины называются обобщенными координатами.

Обобщенные координаты, полностью характеризующие конфигурацию системы, можно выбрать различным образом. При этом одни обобщенные координаты являются функциями от других обобщенных координат. Для того, чтобы написать уравнение движения, нужно выбрать какие-нибудь n независимых обобщенных координат.

Голономные системы характеризуются тем, что связи выражаются уравнениями между самими координатами. Так обстоит дело, например, если точка находится на поверхности:

$$f(x, y, z) = 0. \quad (1)$$

Могут быть другого рода связи — связи неголономные, которые выражаются уравнениями вида

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0. \quad (2)$$

Этот случай существенно отличен от предыдущего. Здесь, вообще говоря, нельзя исключить одну из координат. Особенно важен случай, когда уравнения вида (2) линейны по отношению к скоростям.

Самый простой пример связи вида (2) — повозка с двумя колесами (скат). Положение системы определяют азимут θ и координаты середины x и y . Не существует определенного соотношения между x , y и θ . Пусть скат движется по абсолютно шероховатой поверхности. Тогда движение в каждый данный момент перпен-

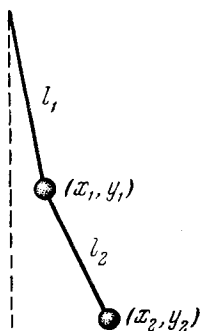


Рис. 86.

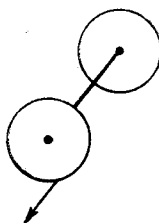


Рис. 87.

дикулярно к оси. В направлении стрелки (рис. 87) скат двигаться не может; он может только катиться. Это условие отсутствия скольжения выражается уравнением

$$dy - \operatorname{tg} \theta dx = 0.$$

Здесь исключение одной из координат x , y , θ невозможно. Уравнения движения систем с неголономными связями совершенно другие, чем для голономных систем.

В теории колебаний задачи только что рассмотренного типа нас не интересуют. Но есть промежуточный случай, который представляет большой интерес для теории колебаний. Пусть связь выражается уравнением вида

$$A dx + B dy + C dz = 0 \quad (3)$$

(A , B , C — функции x , y , z . Для простоты записи мы ограничимся тремя координатами). Это так называемое уравнение Пфаффа. Левая часть может иметь, но может и не иметь (если число переменных больше двух) интегрирующий множитель. Для ската левая

часть заведомо не имеет интегрирующего множителя. Условие существования интегрирующего множителя может быть записано так:

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0,$$

где $\mathbf{E}$ — вектор с компонентами A, B, C .

Пусть левая часть уравнения (3) имеет интегрирующий множитель, т. е. превращается по умножении на некоторую функцию в полный дифференциал некоторой функции F . Тогда уравнение связи интегрируемо и дает

$$F(x, y, z) = \text{const.} \quad (4)$$

Мы получаем зависимость между координатами. В случае голономной связи уравнение между координатами задано, оно не содержит произвольных постоянных. Если связь выражается соотношением вида (4), где правая часть — произвольная постоянная, то мы будем называть систему *полуголономной* (или *семиголономной*).

Неголономные системы — такие, где связи выражаются неинтегрируемыми уравнениями между дифференциалами координат. Полуголономные системы — такие, где связи выражаются интегрируемыми уравнениями между дифференциалами. Такие системы сходны с голономными, но в них имеется по одной лишней произвольной постоянной на каждое уравнение связи вида (4).

Поясим на самом простом примере, что такое полуголономная система.

Начнем с простого контура с самоиндукцией и конденсатором (рис. 88, а). Это система с одной степенью свободы. Здесь две произвольные постоянные: начальный заряд и начальный ток. Рассмотрим теперь контур с двумя последовательно соединенными конденсаторами (рис. 88, б). Всякий скажет: здесь тоже одна степень свободы, причем контур содержит емкость C , такую, что

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Казалось бы, этот случай не отличается от первого.

Однако он отличается от первого случая: можно один конденсатор зарядить, а другой нет. Заряды конденсаторов не вполне зависимы, но *ток* через оба конденсатора — один и тот же, так как нет накопления электричества на соединительном проводнике:

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2.$$

Вот какова здесь связь. Она накладывается на производные от координат Q_1 и Q_2 или на их дифференциалы:

$$dQ_1 = dQ_2.$$

Эту связь можно сразу проинтегрировать:

$$Q_1 - Q_2 = \text{const.}$$

Здесь можно выразить Q_1 через Q_2 , и тогда получится одна степень свободы, но зато появляется произвольная постоянная.

Любое ее значение не противоречит связи.

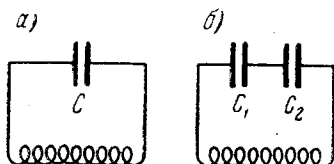


Рис. 88.



Рис. 89.

Можно подойти к полуголономным системам и с другой стороны. Рассмотрим чисто голономную систему

$$f(x, y, z) = \text{const}$$

и будем давать константе различные значения $A_1, A_2, \dots$, т. е. будем рассматривать различные чисто голономные системы. Можно считать, что у нас одна система, но с лишней произвольной постоянной, т. е. полуголономная система.

В системе, показанной на рис. 89, если точки закрепления пружин передвижные, получается лишняя произвольная постоянная.

Остановимся на голономных системах. Самыми удобными уравнениями движения для них являются уравнения Лагранжа. Они дают то и только то, что нужно. Они справедливы для любых координат. Они одинаковы как для механических, так и для электрических систем. Выводить их здесь я не могу, а скажу только, как они пишутся и что они утверждают.

Пусть имеется n обобщенных координат:

$$q_1, q_2, \dots, q_n.$$

Можно выразить через них декартовы координаты. Через обобщенные координаты и n обобщенных скоростей:

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$$

можно выразить декартовы компоненты обычных скоростей.

Так как радиусы-векторы $\mathbf{r}_\mu$ отдельных точек — функции обобщенных координат:

$$\mathbf{r}_\mu = \mathbf{f}_\mu(q_1, q_2, \dots, q_n),$$

то скорости

$$\dot{\mathbf{r}}_\mu = \sum_\lambda \frac{\partial \mathbf{f}_\mu}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda,$$

и, следовательно, выражение кинетической энергии через обобщенные координаты и скорости имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_\mu m_\mu \dot{\mathbf{r}}_\mu^2 = \sum_{i,k} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k. \quad (5)$$

Таким образом, кинетическая энергия — квадратичная функция обобщенных скоростей, в которой коэффициенты — функции обобщенных координат.

Элементарная работа сил выражается суммой членов вида

$$Q_\lambda \delta q_\lambda,$$

где Q_λ — обобщенная сила. Выражение Q_λ называется обобщенной силой по аналогии с тем, что имеет место в декартовых координатах, где работа определяется как произведение $X \delta x$ (X — сила, δx — перемещение).

Рассмотрим, например, тело, вращающееся вокруг оси. Здесь работа при повороте на угол $\delta \theta$ есть $M \delta \theta$, где M — момент „обычной“ силы. В данном случае обобщенной силой является момент „обычной“ силы. (Обобщенная сила может иметь другую размерность, чем обычная сила.)

Для того, чтобы найти, как изменяются со временем обобщенные координаты, нужно составить и решить уравнения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} = Q_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Это и есть уравнения движения в форме Лагранжа.

Может случиться, что обобщенные силы Q_λ — такие функции только от q_λ , что

$$Q_\lambda = - \frac{\partial U(q_1, q_2, \dots, q_n)}{\partial q_\lambda}.$$

Функция $U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ есть не что иное, как потенциальная энергия, выраженная через обобщенные координаты $q_1, q_2, \dots, q_n$. В этом случае, т. е. при потенциальных силах Q_λ , уравнения движения принимают вид

$$\frac{1}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial U}{\partial q_\lambda} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

Эти уравнения справедливы и для электрических цепей, если считать, что U — электрическая, а T — магнитная энергия, q_λ — заряды, $\dot{q}_\lambda$ — токи. Из уравнений Лагранжа получаются все законы колебаний механических, электрических и смешанных систем. Эти уравнения очень общи.

Нас будут интересовать специально *линейные* колебательные системы (нелинейные системы гораздо сложнее). Для линейных механических и электрических колебательных систем функции T и U имеют один и тот же вид и получаются одинаковые уравнения движения.

Перейдем к исследованию устойчивости равновесия.

Устойчивым состоянием равновесия называется такое состояние равновесия, что если систему вывести из него, и притом так, что изменения координат, а также скорости, достаточно малы, то они будут оставаться сколь угодно малыми в течение любого времени.

Дирихле доказал, что достаточное условие устойчивости равновесия заключается в том, что в состоянии равновесия должно быть

$$U(q_1, q_2, \dots, q_n) = \text{minimum},$$

т. е. если в положении равновесия потенциальная энергия имеет минимум, то равновесие устойчиво. Докажем это утверждение (необходимые условия равновесия мы затрагивать не будем).

Если мы прибавим к U постоянную величину, уравнения движения не изменятся. Мы можем поэтому считать, что минимум U соответствует $U=0$. Тогда при малом отклонении от равновесия $U>0$. Так как справедлив закон сохранения энергии, то $T + U = \text{const}$, причем и $T>0$. Следовательно, если мы дадим системе

достаточно малое начальное отклонение, при котором $T_0 + U_0 < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), то и в дальнейшем

$$T + U < \varepsilon,$$

т. е. значения координат и скоростей не выйдут за известные пределы и, следовательно, равновесие устойчивое.

Одно маленькое замечание: из того, что кинетическая энергия всегда остается меньше ε , мы заключаем, что ни одна точка системы не может получить большой скорости. При этом мы рассуждаем так: если T достаточно мала, то каждый ее член $m_i v_i^2/2$ тоже достаточно мал:

$$\frac{m_i v_i^2}{2} < \varepsilon.$$

Тогда и $|v_i|$ меньше некоторой заданной величины. Но это рассуждение годится только для систем, состоящих из конечного числа точек, каждая из которых имеет конечную массу. Если наша система — континуум, то может случиться, что входящая в ее состав очень маленькая масса, несмотря на то, что $T < \varepsilon$, получит очень большую скорость. Пусть, например, поверхность воды находится в равновесии. Для того, чтобы быть уверенным, что равновесие устойчиво, нужно доказать, что при $T < \varepsilon$ сколь угодно маленькая капля не получит сколь угодно большой скорости.

Рассмотрим движение системы вблизи положения равновесия:

$$q_1 = q_1^0, q_2 = q_2^0, \dots, q_n = q_n^0.$$

Введем новые координаты:

$$q'_1 = q_1 - q_1^0, q'_2 = q_2 - q_2^0, \dots, q'_n = q_n - q_n^0.$$

При дифференцировании по времени q_λ^0 выпадают, так что

$$\dot{q}'_1 = \dot{q}_1, \dot{q}'_2 = \dot{q}_2, \dots, \dot{q}'_n = \dot{q}_n.$$

Изменив таким образом начало координат, мы имеем в положении равновесия:

$$q'_1 = 0, q'_2 = 0, \dots, q'_n = 0,$$

и в новых координатах

$$U(0, 0, \dots, 0) = \text{minimum}.$$

Разложим U в степенной ряд около положения равновесия. Опуская штрихи в обозначении новых координат, имеем:

$$U(q_1, q_2, \dots, q_n) = \sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i + \sum_{i, k} b_{ik} q_i q_k + \dots$$

Так как в положении равновесия U минимум, то все $\partial U / \partial q_i$ равны нулю. Ограничимся здесь очень малыми отклонениями. Тогда кубические члены малы по сравнению с квадратичными, и в первом приближении их можно отбросить. Для двух степеней свободы можно считать, что

$$U = b_{11} q_1^2 + 2b_{12} q_1 q_2 + b_{22} q_2^2. \quad (8)$$

Перейдем к кинетической энергии (5). Разложим функцию α_{ik} в степенной ряд по q_k :

$$\alpha_{ik} = a_{ik} + \sum_l \beta_{ikl} q_l + \dots$$

Отбросив и здесь все члены, кроме первого, получаем в случае двух степеней свободы следующее выражение для T :

$$T = a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2. \quad (9)$$

Из выражений (8) и (9) мы получим в качестве уравнений Лагранжа два совокупных линейных дифференциальных уравнения для q_1 и q_2 .

В задачах, которые мы будем рассматривать, электростатическая энергия есть квадратичная функция с постоянными коэффициентами от зарядов. Коэффициенты определяются емкостями C . Магнитная энергия — квадратичная функция токов, т. е. производных от зарядов. В ней коэффициенты определяются индуктивностями L . Величины C и L не зависят от зарядов и токов. Таким образом, вид формул (8) и (9) для всех рассматриваемых задач одинаков. Мы применим их к частным случаям и на них выявим свойства изучаемых систем. (Нагляднее всего исходить из конкретных физических примеров.)

Мы рассмотрим сегодня два простых примера.

Первый пример: балка на двух пружинах (рис. 90). Этот пример и практически интересен, так как представляет собой простую модель вагона на двух рессорах. Нужно выбрать координаты, однозначно определяющие конфигурацию системы. Пусть ξ — координата центра тяжести P , x_1 и x_2 — координаты концов,

θ — угол поворота балки. Между этими четырьмя координатами имеются два соотношения (угол θ по предположению мал):

$$x_1 = \xi - l_1 \theta,$$

$$x_2 = \xi + l_2 \theta.$$

Какие координаты здесь „естественные“? Физически все они равноправны. Но вопрос о „естественности“ тех или иных координат играл когда-то очень большую роль.

Сначала мы напишем выражение кинетической энергии в одной системе координат, а выражение потенциальной — в другой. Пусть k_1 и k_2 — коэффициенты упругости пружин. Тогда потенциальная энергия

$$U = \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_2 x_2^2}{2}.$$

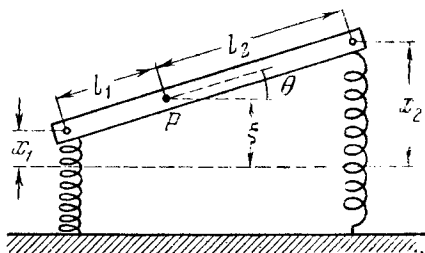


Рис. 90.

По теореме Кёнига можно складывать кинетические энергии поступательного и вращательного движений, и, следовательно,

$$T = \frac{M \dot{\xi}^2}{2} + \frac{I \dot{\theta}^2}{2}$$

(M — масса балки; I — ее момент инерции).

Почему мы написали потенциальную энергию в одних, а кинетическую энергию в других координатах? Потому что при этом в обоих выражениях нет произведений координат или скоростей. Но выразим ξ и θ через x_1 и x_2 . При этом в выражение кинетической энергии войдет, кроме суммы квадратов, также и произведение скоростей. Наоборот, если перейти к ξ и θ , то кинетическая энергия будет суммой квадратов, а потенциальная энергия будет содержать член с произведением координат.

Если потенциальная энергия содержит произведение координат, то говорят, что имеется *силовая связь* (в механическом случае) или *ёмкостная связь* (в электрическом случае). Если кинетическая энергия содержит произведение скоростей, то говорят: система связана *инерциально* (в механическом случае) или *индуктивно* (в электрическом случае). Если и в U , и в T есть члены с произведениями, то связь смешанная.

Вот второй пример (рис. 91). Здесь

$$U = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2}, \quad T = \frac{L_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{L_2 \dot{q}_2^2}{2} + M \dot{q}_1 \dot{q}_2.$$

Какова здесь связь? Емкостная или индуктивная?

На это следует ответить так: определение инерциальной (индуктивной) и силовой (емкостной) связи, в сущности, условно. Введем координаты:

$$q'_1 = q_1 + q_2, \quad q'_2 = q_1 - q_2.$$

Тогда в выражении для U появится член с произведением координат, т. е. будет иметь место емкостная связь. Можно возразить,

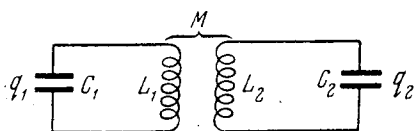


Рис. 91.

что введение координат q'_1 и q'_2 — математическое ухищрение. Здесь „естественно“ сказать, что связь — индуктивная. Но в нашем механическом примере трудно сказать, что естественнее: взять за координаты ξ и θ (тогда связь

силовая) или x_1 и x_2 (тогда связь инерциальная).

Таким образом, тип связи зависит от выбора обобщенных координат. Говоря о том или ином типе связи, нужно соблюдать известную осторожность. Может быть правильнее всего было бы говорить о типе связи по отношению к данным координатам.

ДВАДЦАТЬ ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ

(28/I 1931 г.)

Математическая теория линейной консервативной системы с двумя степенями свободы. Нормальные колебания. Секулярное уравнение. Связь между парциальными и нормальными частотами. Нормальные координаты. Общее решение как суперпозиция нормальных колебаний.

Рассмотрим общий случай малых колебаний консервативной системы с двумя степенями свободы около устойчивого положения равновесия. Потенциальная и кинетическая энергия — квадратичные формы соответственно от координат и скоростей:

$$\left. \begin{aligned} U &= ax^2 + 2hxy + by^2; \\ T &= A\dot{x}^2 + 2H\dot{x}\dot{y} + B\dot{y}^2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Вот второй пример (рис. 91). Здесь

$$U = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2}, \quad T = \frac{L_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{L_2 \dot{q}_2^2}{2} + M \dot{q}_1 \dot{q}_2.$$

Какова здесь связь? Емкостная или индуктивная?

На это следует ответить так: определение инерциальной (индуктивной) и силовой (емкостной) связи, в сущности, условно. Введем координаты:

$$q'_1 = q_1 + q_2, \quad q'_2 = q_1 - q_2.$$

Тогда в выражении для U появится член с произведением координат, т. е. будет иметь место емкостная связь. Можно возразить,

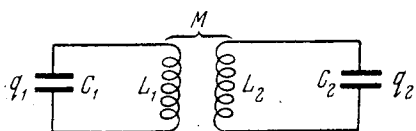


Рис. 91.

что введение координат q'_1 и q'_2 — математическое ухищрение. Здесь „естественно“ сказать, что связь — индуктивная. Но в нашем механическом примере трудно сказать, что естественнее: взять за координаты ξ и θ (тогда связь

силовая) или x_1 и x_2 (тогда связь инерциальная).

Таким образом, тип связи зависит от выбора обобщенных координат. Говоря о том или ином типе связи, нужно соблюдать известную осторожность. Может быть правильнее всего было бы говорить о типе связи по отношению к данным координатам.

ДВАДЦАТЬ ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ

(28/I 1931 г.)

Математическая теория линейной консервативной системы с двумя степенями свободы. Нормальные колебания. Секулярное уравнение. Связь между парциальными и нормальными частотами. Нормальные координаты. Общее решение как суперпозиция нормальных колебаний.

Рассмотрим общий случай малых колебаний консервативной системы с двумя степенями свободы около устойчивого положения равновесия. Потенциальная и кинетическая энергия — квадратичные формы соответственно от координат и скоростей:

$$\left. \begin{aligned} U &= ax^2 + 2hxy + by^2; \\ T &= A\dot{x}^2 + 2H\dot{x}\dot{y} + B\dot{y}^2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Обе квадратичные формы положительно definite. При этом

$$\left. \begin{aligned} A > 0, B > 0, AB - H^2 > 0, \\ a > 0, b > 0, ab - h^2 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Подставляя (1) и (2) в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

получаем для нашей системы уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} A\ddot{x} + H\ddot{y} + ax + hy &= 0, \\ H\ddot{x} + B\ddot{y} + hx + by &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

На рис. 92, а, б показаны два примера систем с двумя степенями свободы. В качестве x и y можно взять заряды на любых двух конденсаторах (рис. 92, а) и углы отклонения маятников (рис. 92, б) или любые линейные комбинации этих величин.

Можно ввести понятие *парциальных систем*¹. Мы будем называть парциальными те системы с одной степенью сво-

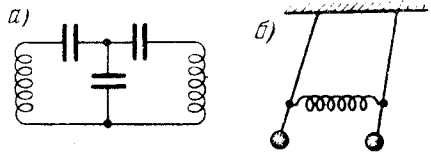


Рис. 92.

боды, которые получаются из данной системы с двумя степенями свободы при „закреплении“ одной из координат, т. е. в случае рис. 92, а — при разрыве цепи, к которой относится соответственно координата x или y , а в случае рис. 92, б — при закреплении того или другого маятника. Математически это означает следующее. Одну парциальную систему мы получим, положив, что в (1) $x=0$ (тождественно по t), другую — положив аналогичным образом в (1) $y=0$.

Для первой парциальной системы имеем:

$$T = A\dot{x}^2, \quad U = ax^2.$$

Эта система имеет собственную частоту n_1 (парциальную частоту), такую, что

$$n_1^2 = \frac{a}{A}.$$

¹ [Подробнее см. 24-ую лекцию.]

Для второй парциальной системы имеем:

$$T = By^2, \quad U = by^2,$$

$$n_2^2 = \frac{b}{B}$$

(n_2 — вторая парциальная частота).

Будем искать решение уравнения (3) системы с двумя степенями свободы в таком виде:

$$\begin{aligned} x &= C \cos(\omega t + \alpha), \\ y &= kC \cos(\omega t + \alpha), \end{aligned} \quad (4)$$

где C, k, ω, α — постоянные. Движение типа (4) мы будем называть *нормальным* колебанием, его частоту ω — *нормальной частотой*.

Подставляя (4) в (3) и сокращая на общий множитель $\cos(\omega t + \alpha)$, получаем систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (\omega^2 A - a) + (\omega^2 H - h)k &= 0, \\ (\omega^2 H - h) + (\omega^2 B - b)k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Рассматривая эти уравнения как систему двух линейных уравнений относительно неизвестной k , напомним условие их совместности:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 A - a & \omega^2 H - h \\ \omega^2 H - h & \omega^2 B - b \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Это — уравнение, определяющее неизвестную величину ω^2 . Оно называется *секулярным уравнением*. Обозначим

$$\omega^2 = \xi$$

и запишем секулярное уравнение в таком виде:

$$F(\xi) = 0,$$

где $F(\xi)$ — полином второй степени:

$$F(\xi) = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \xi + \lambda_3. \quad (7)$$

Уравнение

$$\eta = F(\xi)$$

есть уравнение параболы. Абсциссы точек, в которых она пересекает ось ξ , равны корням уравнения (6), т. е. квадратам частот искомых колебаний вида (4).

Развертывая детерминант уравнения (6) и сравнивая с (7), мы видим, что

$$\lambda_1 = AB - H^2, \quad \lambda_2 = 2hH - aB - bA, \quad \lambda_3 = ab - h^2.$$

На основании (2)

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_3 > 0.$$

При большом ξ знак η совпадает со знаком члена $\lambda_1 \xi^2$, и, следовательно, η положительно. При $\xi = 0$ имеем

$$\eta = F(0) = \lambda_3,$$

и, следовательно, η здесь также положительно.

Подставляя в (7) значения ξ :

$$\xi = n_1^2 = \frac{a}{A}, \quad \xi = n_2^2 = \frac{b}{B},$$

получаем:

$$F\left(\frac{a}{A}\right) = -\left(H \frac{a}{A} - h\right)^2 < 0;$$

$$F\left(\frac{b}{B}\right) = -\left(H \frac{b}{B} - h\right)^2 < 0.$$

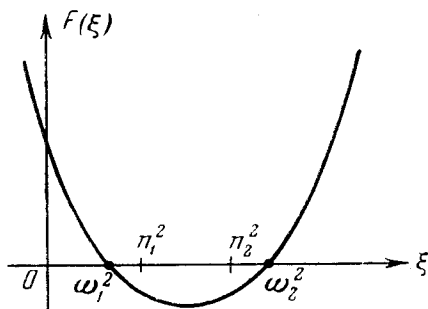


Рис. 93.

Итак, парабола пересекает ось абсцисс и имеет вид, показанный на рис. 93. Корни ω_1^2 и ω_2^2 уравнения (5) действительны и положительны, причем

$$\omega_1^2 \leq n_1^2 \leq n_2^2 \leq \omega_2^2.$$

Парциальные частоты лежат между нормальными частотами и — в крайнем случае — совпадают с ними.

Применим полученные результаты к случаю системы, состоящей из двух индуктивно связанных контуров (рис. 91). Здесь

$$2T = L_1 \dot{q}_1^2 + L_2 \dot{q}_2^2 + M \dot{q}_1 \dot{q}_2,$$

$$2U = \frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2}.$$

Секулярное уравнение

$$\begin{vmatrix} \omega^2 L_1 - \frac{1}{C_1} & \omega^2 M \\ \omega^2 M & \omega^2 L_2 - \frac{1}{C_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Введем парциальные частоты:

$$n_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1}, \quad n_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2} \quad (8)$$

и обозначим

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}. \quad (9)$$

Развертывая детерминант и воспользовавшись (8) и (9), получаем:

$$\sigma \omega^4 - (n_1^2 + n_2^2) \omega^2 + n_1^2 n_2^2 = 0. \quad (10)$$

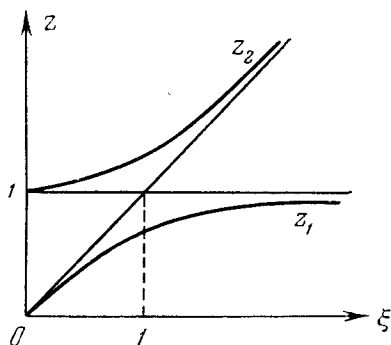


Рис. 94.

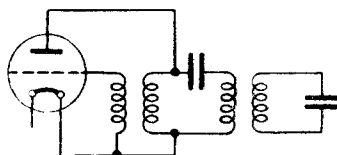


Рис. 95.

Введем еще „расстройку“ парциальных частот

$$\xi = \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \quad (11)$$

и величину

$$z = \frac{\omega^2}{n_1^2} \quad (12)$$

(квадрат отношения нормальной частоты к одной из парциальных). Подставляя (11) и (12) в (10), получаем

$$\sigma z^2 - (1 + \xi) z + \xi = 0.$$

На плоскости (z, ξ) этому уравнению соответствует семейство гипербол (каждая гипербола соответствует определенному значению параметра σ). Одна из таких гипербол изображена на рис. 94. Каждому значению расстройки ξ соответствуют две ординаты: z_1, z_2 (две нормальные частоты). Рис. 94 наглядно показывает, как нормальная частота зависит от расстройки парциальных систем.

Построенный нами график имеет большое значение при исследовании некоторых нелинейных систем, например лампового генератора, колебательный контур которого индуктивно связан с другим колебательным контуром (рис. 95). Здесь при определенных условиях происходит следующее. Имеет место периодическое

(незатухающее) колебание, частота которого практически совпадает с одной из нормальных частот той линейной консервативной системы, в которую превратилось бы устройство рис. 95 при отсутствии лампы и сопротивлений в контурах. При изменении расстройки ξ частота генерируемого колебания меняется так, как показано на рис. 96. При $\xi < \xi_1$ возможны колебания только с частотой ω_2 , при $\xi > \xi_2$ — только с частотой ω_1 ; при $\xi_1 < \xi < \xi_2$ в зависимости от истории системы происходят колебания либо с частотой ω_1 , либо с частотой ω_2 (явление „затягивания“ — своеобразный гистерезис). Переход от частоты ω_1 к частоте ω_2 или наоборот происходит скачком.

Найдя нормальные частоты, мы можем определить из (5) соответствующие значения отношения амплитуд k . Обозначим их k_1 и k_2 .

Введем посредством уравнений

$$\begin{aligned} x &= \xi + \eta, \\ y &= k_1 \xi + k_2 \eta \end{aligned} \quad (13)$$

новые обобщенные координаты ξ и η . Подставив (13) в (1), получаем:

$$\left. \begin{aligned} T &= (A + 2Hk_1 + Bk_1^2)\dot{\xi}^2 + 2[A + H(k_1 + k_2) + Bk_1k_2]\dot{\xi}\dot{\eta} + \\ &\quad + (A + 2Hk_2 + Bk_2^2)\dot{\eta}^2; \\ U &= (a + 2hk_1 + bk_1^2)\xi^2 + 2[a + h(k_1 + k_2) + bk_1k_2]\xi\eta + \\ &\quad + (a + 2hk_2 + bk_2^2)\eta^2. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Заметим теперь, что на основании (5)

$$\begin{aligned} \omega_1^2(A + Hk_1) &= a + hk_1, & \omega_2^2(A + Hk_2) &= a + hk_2; \\ \omega_1^2(H + Bk_1) &= h + bk_1, & \omega_2^2(H + Bk_2) &= h + bk_2. \end{aligned}$$

Сложим уравнения первого столбца, умножив предварительно второе на k_1 :

$$\omega_1^2(A + 2Hk_1 + Bk_1^2) = a + 2hk_1 + bk_1^2. \quad (15)$$

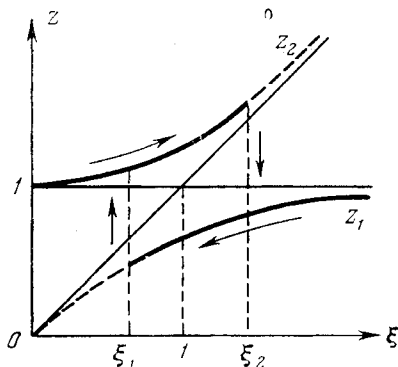


Рис. 96.

Сложим теперь уравнения второго столбца, умножив предварительно второе на k_2 :

$$\omega_2^2 (A + 2Hk_2 + Bk_2^2) = a + 2hk_2 + bk_2^2. \quad (16)$$

Если же проделать аналогичную операцию, но умножая на k_2 и k_1 вместо k_1 и k_2 , то получим еще:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 [A + H(k_1 + k_2) + Bk_1k_2] &= a + h(k_1 + k_2) + bk_1k_2; \\ \omega_2^2 [A + H(k_1 + k_2) + Bk_1k_2] &= a + h(k_1 + k_2) + bk_1k_2. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

При $\omega_1^2 \neq \omega_2^2$ из (17) следует, что

$$A + H(k_1 + k_2) + Bk_1k_2 = 0,$$

$$a + h(k_1 + k_2) + bk_1k_2 = 0.$$

Следовательно, выражения (14) не содержат членов с произведениями $\ddot{\xi}\dot{\eta}$ и $\dot{\xi}\eta$ и имеют вид

$$\begin{aligned} T &= A_1\dot{\xi}^2 + A_2\dot{\eta}^2, \\ U &= a_1\xi^2 + a_2\eta^2, \end{aligned} \quad (18)$$

причем

$$\frac{a_1}{A_1} = \omega_1^2, \quad \frac{a_2}{A_2} = \omega_2^2.$$

В системе координат (ξ, η) нет ни силовой, ни инерциальной связи. Мы показали, что подходящим выбором обобщенных координат всегда можно привести обе квадратичные формы (14) к каноническому виду (18), т. е. привести их к суммам квадратов. Координаты ξ и η называются нормальными координатами.

Уравнения Лагранжа в новых обобщенных координатах

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right) + \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} \right) + \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0,$$

имеют вид

$$\left. \begin{aligned} A_1\ddot{\xi} + a_1\xi &= 0; \\ A_2\ddot{\eta} + a_2\eta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

В одно из них входит только обобщенная координата ξ , в другое — только обобщенная координата η .

Уравнения (19) имеют общее решение:

$$\xi_1 = C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1), \quad \eta = C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

где ω_1 и ω_2 — нормальные частоты. Согласно (13)

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \\ y &= k_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + k_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Таково выражение общего решения в исходных координатах x, y . Мы могли бы его написать сразу (не переходя к нормальным координатам ξ и η) как сумму двух частных решений вида (4).

Сформулируем физический смысл уравнения (20).

Каждая из координат x и y совершает, вообще говоря, сумму двух гармонических колебаний с различными нормальными частотами ω_1 и ω_2 .

Частоты эти задаются самой системой (видом кинетической и потенциальной энергии). Самой системой задаются также отношения k_1 и k_2 амплитуд каждого нормального колебания в обеих координатах (эти отношения могут быть как положительными, так и отрицательными). Сами амплитуды и фазы задаются начальными условиями. Каждое из гармонических колебаний имеет в обеих координатах одинаковую фазу.

ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ

(25/II 1931 г.)

Циклические координаты. Решение уравнений для линейной системы с двумя степенями свободы (без трения). Нормальные колебания, их частоты и распределения. Нормальные координаты. Нормальные частоты как экстремумы отношения двух квадратичных форм. Разделение системы на парциальные системы

Вообще говоря, интегрирование системы уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

описывающих движение системы с n степенями свободы недостаточно. Но мы рассматриваем движение системы с n степенями

Уравнения (19) имеют общее решение:

$$\xi_1 = C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1), \quad \eta = C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

где ω_1 и ω_2 — нормальные частоты. Согласно (13)

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \\ y &= k_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + k_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Таково выражение общего решения в исходных координатах x, y . Мы могли бы его написать сразу (не переходя к нормальным координатам ξ и η) как сумму двух частных решений вида (4).

Сформулируем физический смысл уравнения (20).

Каждая из координат x и y совершает, вообще говоря, сумму двух гармонических колебаний с различными нормальными частотами ω_1 и ω_2 .

Частоты эти задаются самой системой (видом кинетической и потенциальной энергии). Самой системой задаются также отношения k_1 и k_2 амплитуд каждого нормального колебания в обеих координатах (эти отношения могут быть как положительными, так и отрицательными). Сами амплитуды и фазы задаются начальными условиями. Каждое из гармонических колебаний имеет в обеих координатах одинаковую фазу.

ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ

(25/II 1931 г.)

Циклические координаты. Решение уравнений для линейной системы с двумя степенями свободы (без трения). Нормальные колебания, их частоты и распределения. Нормальные координаты. Нормальные частоты как экстремумы отношения двух квадратичных форм. Разделение системы на парциальные системы

Вообще говоря, интегрирование системы уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

описывающих движение системы с n степенями свободы недостаточно. Но мы рассматриваем движение системы с n степенями

свободы, находящейся вблизи устойчивого состояния равновесия. При этом дифференциальные уравнения приобретают сравнительно простой вид:

$$\sum_k (b_{ik}\ddot{q}_k + a_{ik}q_k) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Это — система n линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Такая система легко интегрируется (по крайней мере в общем виде).

Теперь предпочитают работать с индексами. Для сложных систем это гораздо нагляднее. Но для случая системы с двумя степенями свободы мы воспользовались такими обозначениями:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a, & a_{12} &= h, & a_{22} &= b, \\ b_{11} &= A, & b_{12} &= H, & b_{22} &= B, \end{aligned}$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} 2T &= A\dot{x}^2 + 2H\dot{x}\dot{y} + B\dot{y}^2, \\ 2U &= ax^2 + 2hxy + by^2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Дифференциальные уравнения (1) записываются при этом так:

$$\left. \begin{aligned} A\ddot{x} + H\ddot{y} + ax + hy &= 0, \\ H\ddot{x} + B\ddot{y} + hx + by &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Рассмотрим тот частный случай, когда одна из координат (скажем, y) не входит в выражение потенциальной энергии (этот случай часто встречается на практике). Тогда

$$h = 0, \quad b = 0.$$

Координата, не входящая в выражение потенциальной энергии, носит название *циклической*.

Если y — циклическая координата, имеем:

$$\begin{aligned} H\ddot{x} + B\ddot{y} &= 0, \\ \left(A - \frac{H^2}{B}\right)\ddot{x} + ax &= 0. \end{aligned}$$

Для координаты x получается такое же уравнение второго порядка, как для системы с одной степенью свободы. Существуют, таким образом, случаи двух степеней свободы, которые сводятся на одну степень свободы.

Такова, например, система рис. 97. В электрическую энергию входит только q_1 , а в магнитную энергию, конечно, входит и q_1 и q_2 . Соответствующая механическая задача: имеется вал с двумя дисками (рис. 98). Этот пример мы уже рассматривали¹. Так можно идеализировать вал с пропеллером и мотором. Введя в качестве координат углы поворота маховика и пропеллера, мы можем свести здесь задачу на случай одной степени свободы.

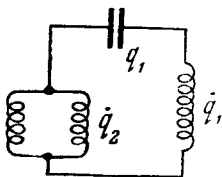


Рис. 97.



Рис. 98.

Если имеется n степеней свободы и m циклических координат, задача приводится к $n - m$ степеням свободы.

Вернемся к уравнениям (3).

Существует решение вида

$$x = C \cos(\omega t + \alpha),$$

$$y = kC \cos(\omega t + \alpha).$$

Эти выражения удовлетворяют уравнениям (2), если ω и k удовлетворяют алгебраическим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} -(A + Hk)\omega^2 + a + hk &= 0; \\ -(H + Bk)\omega^2 + h + bk &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Требуется определить из них ω и k .

Можно задать ω или k и рассматривать уравнения (4) как уравнения с одной неизвестной (k или ω). В общем случае детерминант этих уравнений не равен нулю и они не имеют решения.

Если подобрать ω так, чтобы детерминант уравнений для неизвестной k равнялся нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \omega^2 A - a & \omega^2 H - h \\ \omega^2 H - h & \omega^2 B - b \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

то они имеют определенное решение.

¹ [См. 7-ю лекцию.]

Уравнение (5) — квадратное относительно ω^2 . Квадратное уравнение может иметь разнообразные корни. Если равновесие устойчивое, то потенциальная энергия имеет минимум при $x=y=0$. Значит, квадратичные формы (2) положительны при любых x, y и $\dot{x}, \dot{y}$ (T всегда положительна). Математика доказывает, что при этих условиях оба корня уравнения (5) действительны и положительны.

Каждому значению ω соответствует свое значение k . Мы имеем два (положительные) значения ω ($\omega=\omega_1, \omega=\omega_2$) и два значения k ($k=k_1, k=k_2$), т. е. имеем, таким образом, два частных решения системы (3):

$$x = C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1),$$

$$y = k_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1)$$

и

$$x = C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$y = k_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Сумма их

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \\ y &= k_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + k_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

тоже будет решением при любых значениях $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$.

Смысл этого решения такой: если вывести систему с двумя степенями свободы из состояния равновесия, то каждая координата выразится, как функция времени, в виде суммы двух синусоидальных колебаний. Частоты ω_1 и ω_2 получаются из секулярного, или векового, или характеристического уравнения (5). Амплитуда каждой координаты в первом колебании произвольна. Но если выбрана амплитуда первой координаты C_1 , то амплитуда первого колебания во второй координате не произвольна, а задается системой. То же самое имеет место для второго колебания.

Системой задаются величины ω_1, ω_2, k_1 и k_2 . Величины k_1 и k_2 характеризуют *распределение* колебаний. Распределения, как и частоты, задаются параметрами системы. Абсолютные амплитуды в одной из координат, а также фазы, произвольны. Они задаются начальными условиями. (Заметим, что механика и электродинамика сами по себе не говорят, каково движение системы. Они учат, как движется система, если заданы начальные условия.)

Пусть при $t=0$

$$x = x_0, y = y_0, \dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0. \quad (7)$$

Если заданы эти четыре величины, то мы знаем, как система будет себя вести дальше. Из начальных условий (7) определяются C_1 , C_2 , α_1 , α_2 . Этим вся задача однозначно определена. В технике отыскание собственных частот часто является жизненным вопросом.

Пусть вагон (его можно схематизировать так, как показано на рис. 90) движется с определенной скоростью. Он получает удары на стыках рельс. Здесь может возникнуть резонанс (как и в системе с одной степенью свободы): если частота ударов равна ω_1 или ω_2 , вагон очень сильно раскачивается¹. У спальных вагонов плавный ход связан, между прочим, с тем, что они имеют длинные периоды собственных колебаний. В машинах резонанс может приводить к разрушениям, в электрических системах — к перенапряжениям и пробоям. Чтобы этого не было, надо избегать того, чтобы внешняя сила попадала в такт с ω_1 или ω_2 .

Вернемся к (6). Движение каждой координаты — не синусообразное. То, что его можно представить в виде суммы двух синусообразных колебаний (с постоянной амплитудой), имеет существенное значение. Дело в том, что очень часто система рассматриваемого здесь вида действует в качестве источника силы на другую линейную систему. Тогда, как мы знаем, именно такое представление целесообразно².

Вопрос о том, какими координатами характеризовать систему, не решается однозначно. Это вопрос вкуса и удобства.

Задаaniem x и y или ξ и θ мы вполне определяем конфигурацию системы (рис. 90). Между теми и другими координатами имеются определенные соотношения, а именно:

$$x_1 \equiv x = \xi - l_1 \theta, \quad x_2 \equiv y = \xi + l_2 \theta.$$

Получим ли мы те же самые величины ω_1 , ω_2 , k_1 и k_2 , если воспользуемся другими координатами? Частоты колебаний получаются теми же самыми (ω_1 и ω_2 инвариантны). Но распределение будет зависеть от выбора координат.

Если мы перейдем к другим координатам, то может оказаться, в частности, $H=0$ или $h=0$. Это было очень ясно на примере, который разбирался в прошлый раз. Но можно ли подобрать координаты так, чтобы и h и H обратились в нули? Если это

¹ [См. 26-ю лекцию.]

² [См. 16-ю лекцию.]

удастся, то получатся чрезвычайно простые уравнения: система распадается на две системы, описываемые уравнениями вида

$$\left. \begin{aligned} A_1 \ddot{\xi} + a_1 \xi &= 0, \\ A_2 \ddot{\eta} + a_2 \eta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Частоты здесь находятся сразу:

$$\omega_1^2 = \frac{a_1}{A_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{a_2}{A_2}; \quad (9)$$

k_1 и k_2 также находятся сразу, так как здесь

$$\xi = C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1), \quad \eta = C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \quad (10)$$

Величины k_1 и k_2 показывают, в каком отношении находятся амплитуды одного и того же колебания в одной и другой координате. В данном случае $k_1 = 0$, $k_2 = \infty$.

Оказывается, что такие координаты подобрать можно. Если решить исходную задачу о нахождении ω_1^2 , ω_2^2 , k_1 , k_2 и связать новые координаты с исходными соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi + \eta, \\ y &= k_1 \xi + k_2 \eta, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

то для потенциальной и кинетической энергии получатся выражения, в которых произведения отсутствуют:

$$\left. \begin{aligned} 2U &= a_1 \xi^2 + a_2 \eta^2, \\ 2T &= A_1 \dot{\xi}^2 + A_2 \dot{\eta}^2. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Отсюда сразу следует (8) и (9), причем частоты инвариантны по отношению к преобразованию (11).

Тривиальный случай, когда $k_1 = 0$, $k_2 = \infty$, это — случай двух не связанных маятников. Для всех рассматриваемых систем с двумя степенями свободы, как бы они ни были сложны, всегда можно подобрать такие координаты, при которых задача приводится к этому тривиальному случаю. Такие координаты называются *нормальными координатами*. Однако, чтобы подобрать нормальные координаты, нужно сначала решить задачу, выраженную уравнениями (4) и (5). Таким образом, в вычислительном смысле существование нормальных координат не дает облегчения.

Подойдем к вопросу с другой стороны.

Пусть

$$\omega^2 = \frac{ax^2 + 2hxy + by^2}{Ax^2 + 2Hxy + By^2} \quad (13)$$

(мы образуем такую дробь и обозначаем ее ω^2). Зададимся „странным“ вопросом: при каких значениях x и y эта дробь получает максимальное значение и при каких значениях x и y — минимальное? (Здесь важны не сами x и y , а отношение x/y). Введем нормальные координаты ξ , η . Тогда

$$\omega^2 = \frac{a_1\xi^2 + a_2\eta^2}{A_2\xi^2 + A_2\eta^2}. \quad (14)$$

Если при $x=x_1$ $y=y_1$ выражение (14) имеет максимум, то при соответствующих $\xi=\xi_1$, $\eta=\eta_1$ выражение (14) тоже имеет максимум. При введении нормальных координат задача упрощается.

Пусть

$$\frac{a_1}{A_2} > \frac{a_2}{A_2}. \quad (15)$$

Если ξ и η оба отличны от нуля, то можно написать:

$$\omega^2 = \frac{a_1 + b_1}{A_1 + B_1}, \quad (16)$$

где

$$b_1 = a_2 \left(\frac{\xi}{\eta} \right)^2, \quad B_1 = A_2 \left(\frac{\xi}{\eta} \right)^2. \quad (17)$$

Не трудно видеть, что значение дроби (16) заключено между a_1/A_1 и b_1/B_1 . В самом деле, пусть

$$a_1 = A_1 l;$$

тогда вследствие (15)

$$b_1 < B_1 l$$

и далее

$$\frac{a_1 + b_1}{A_1 + B_1} < \frac{A_1 l + B_1 l}{A_1 + B_1} = l,$$

т. е.

$$\frac{a_1 + b_1}{A_1 + B_1} < \frac{a_1}{A_1}.$$

Аналогично найдем:

$$\frac{a_1 + b_1}{A_1 + B_1} > \frac{a_2}{A_2}.$$

Таким образом, мы доказали следующее: какие бы ни были ξ , η , если только они не равны нулю,

$$\frac{a_2}{A_2} < \omega^2 < \frac{a_1}{A_1}.$$

Далее, есть такие значения ξ и η , при которых ω^2 принимает значения a_1/A_1 и a_2/A_2 . В самом деле, первое значение ω^2 принимает при $\xi=0$, $\eta \neq 0$, а второе — при $\xi \neq 0$, $\eta=0$. Следовательно,

$$\frac{a_2}{A_2} \leq \omega^2 \leq \frac{a_1}{A_1}. \quad (18)$$

Получился интересный результат (нормальные координаты здесь важны для доказательства; сам результат не относится специально к нормальным координатам): максимальное значение выражения (13), т. е. отношения квадратичных форм

$$\frac{U(x, y)}{T(x, y)},$$

равно квадрату одной собственной частоты, его минимальное значение — квадрату другой собственной частоты.

Перейдем теперь к другому вопросу.

Я умышленно говорил все время об одной системе с двумя степенями свободы, а не о *двух* связанных системах, из которых каждая имеет одну степень свободы.

Система с двумя степенями свободы может получиться генетически из сближения двух систем, из которых каждая имела одну степень свободы. Часто система с двумя степенями свободы интересна как результат связи двух систем, каждая из которых имеет одну степень свободы.

Но может возникнуть обратный вопрос: имеется заданная система с двумя степенями свободы. Из каких двух систем с одной степенью свободы она произошла? Этот вопрос напрашивается сам собой. В случае рис. 99, *а* все просто, но как быть в случае рис. 100, *а*? Нужно ли считать так, как на рис. 100, *б* или так, как на рис. 100, *в*? Да и в случае рис. 99, *а* — только кажущаяся простота; какие две системы связаны здесь между собой, если взаимная индукция осуществляется через железо (рис. 99, *б*)?

Разделение целого на части не однозначно. То же самое у нас было с рядом Фурье, с помощью которого мы разлагали периодическую функцию на сумму других функций. В молекулярной физике возникает аналогичный вопрос о том, как твердые тела —

кристаллические решетки — разделять на молекулы. Но можно искать целесообразную точку зрения.

Разделение по „историческому“ признаку, по признаку того, как происходило присоединение частей одних к другим (по тому, как „приносили куски системы из магазина“), вряд ли целесообразно. Но есть целесообразное определение.

Каков критерий целесообразности определения? То, что, пользуясь им, можно установить закономерность. В данном случае целесообразно такое разделение системы, при котором можно установить закономерную связь между свойствами полной системы и свойствами парциаль-

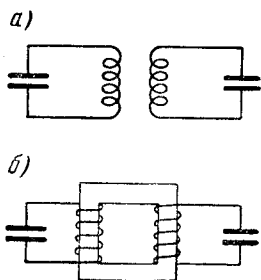


Рис. 99.

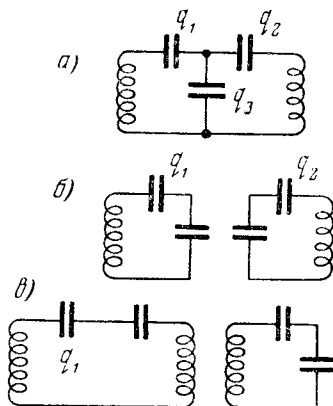


Рис. 100.

ных систем (ее частей). Разные разделения законны, но все, кроме одного, ни к чему не ведут, так как не приводят к закономерностям. Во всяком случае я могу сказать, что знаю только одно определение, которое является целесообразным. Вот оно.

Пусть даны выражения T и U . Положим одну координату равной нулю. Мы получим систему с одной степенью свободы. Положим теперь другую координату равной нулю. Мы получим другую систему с одной степенью свободы. Связь между этими двумя парциальными системами дает нам исходную систему. Наша исходная система получается в результате связи этих двух систем.

Что значит положить $x=0$? Это значит, что мы закрепили один маятник (рис. 92, б) или разорвали один провод (рис. 99, б). Железо при этом должно остаться.

Разделение на парциальные системы зависит от тех координат, из которых мы исходим. Если в качестве координат выбраны q_1 и q_2 (рис. 100, а), то получатся одни парциальные системы (рис. 100, б).

Если ввести координаты q_1 и q_3 (рис. 100, а), то получатся другие парциальные системы (рис. 100, в).

При нашем определении период каждой парциальной системы (рис. 92, б) будет иной, чем у маятника без пружины. Мы прощаем этот случай в следующий раз.

Рассмотрим (в общем случае) систему с двумя степенями свободы, как связанную. Тогда парциальные частоты n_1 и n_2 (частоты парциальных систем) определяются равенствами:

$$n_1^2 = \frac{a}{A}, \quad n_2^2 = \frac{b}{B}.$$

Найдем общее соотношение между нормальными и парциальными частотами.

Отношения a/A , b/B принадлежат к числу значений, принимаемых отношением (13), но не при $\xi=0$ и не при $\eta=0$. Поэтому

$$\omega_1^2 > n_1^2 > n_2^2 > \omega_2^2.$$

Итак, существует следующая закономерность: собственные частоты отдельных парциальных систем *лежат между частотами связанной системы*.

Если определить парциальные системы иначе, то между нормальными и парциальными частотами мы получим самые разнообразные соотношения.

ДВАДЦАТЬ ПЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(7/III 1931 г.)

Случай вырождения — случай двух одинаковых нормальных частот. Еще раз о парциальных системах и парциальных частотах. Задача о взаимодействии парциальных систем. Слабая и сильная связь; слабая и сильная „связанность“. Нормальные колебания и перекачка энергии в случае слабой и сильной „связанности“. Парадокс, связанный с полной перекачкой энергии при сколь угодно слабой связи.

Мы разбираем системы с двумя степенями свободы, описываемые уравнениями вида

$$\left. \begin{aligned} A\ddot{x} + H\ddot{y} + ax + hy &= 0, \\ H\ddot{x} + B\ddot{y} + hx + by &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Решая эти уравнения, мы узнаем частоты колебаний и отношения амплитуд, с которыми колеблются координаты x и y .

Если ввести координаты q_1 и q_3 (рис. 100, а), то получатся другие парциальные системы (рис. 100, в).

При нашем определении период каждой парциальной системы (рис. 92, б) будет иной, чем у маятника без пружины. Мы прощаем этот случай в следующий раз.

Рассмотрим (в общем случае) систему с двумя степенями свободы, как связанную. Тогда парциальные частоты n_1 и n_2 (частоты парциальных систем) определяются равенствами:

$$n_1^2 = \frac{a}{A}, \quad n_2^2 = \frac{b}{B}.$$

Найдем общее соотношение между нормальными и парциальными частотами.

Отношения a/A , b/B принадлежат к числу значений, принимаемых отношением (13), но не при $\xi=0$ и не при $\eta=0$. Поэтому

$$\omega_1^2 > n_1^2 > n_2^2 > \omega_2^2.$$

Итак, существует следующая закономерность: собственные частоты отдельных парциальных систем *лежат между частотами связанной системы*.

Если определить парциальные системы иначе, то между нормальными и парциальными частотами мы получим самые разнообразные соотношения.

ДВАДЦАТЬ ПЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(7/III 1931 г.)

Случай вырождения — случай двух одинаковых нормальных частот. Еще раз о парциальных системах и парциальных частотах. Задача о взаимодействии парциальных систем. Слабая и сильная связь; слабая и сильная „связанность“. Нормальные колебания и перекачка энергии в случае слабой и сильной „связанности“. Парадокс, связанный с полной перекачкой энергии при сколь угодно слабой связи.

Мы разбираем системы с двумя степенями свободы, описываемые уравнениями вида

$$\left. \begin{aligned} A\ddot{x} + H\ddot{y} + ax + hy &= 0, \\ H\ddot{x} + B\ddot{y} + hx + by &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Решая эти уравнения, мы узнаем частоты колебаний и отношения амплитуд, с которыми колеблются координаты x и y .

Может ли система с двумя степенями свободы иметь две одинаковые нормальные частоты?

Для этого должно быть

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{h}{H}. \quad (2)$$

Это возможно, если кинетическая энергия пропорциональна потенциальной энергии, или, точнее, если квадратичная форма $T(x, y)$ пропорциональна квадратичной форме $U(x, y)$.

Мы видели, что нормальные частоты суть максимальное и минимальное значения определенной дроби¹. Здесь максимальное и минимальное значения совпадают. В случае (2) дробь имеет постоянное значение. Легко убедиться, что этот случай — настолько вырожденный, что он физически мало интересен.

В этом случае соответствующей обработкой уравнений можно сразу перейти к одной координате (без введения нормальных координат).

Умножим первое уравнение (1) на B , второе на H и вычтем:

$$(AB - H^2)\ddot{x} + (aB - hH)x = 0. \quad (3)$$

Аналогичным образом получим:

$$(AB - H^2)\ddot{y} + (bA - hH)y = 0. \quad (4)$$

Хотя это сразу, может быть, не видно, но для каждого из двух контуров, связанных так, что выполняется условие (2), получается отдельное уравнение (3) или (4). При соответствующем подборе коэффициента взаимной индукции M два контура (рис. 101) не связаны друг с другом. Связь через емкость и связь через взаимную индукцию компенсируют друг друга, в результате чего получаются два несвязанных контура.

Как было сказано в прошлой лекции, наша система может рассматриваться как состоящая из двух выделяемых определенным образом частичных (парциальных) систем, которые связаны между собой.

Часто опыт делается так, что приводит к следующей постановке вопроса: имеются две колебательные системы; как происходит взаимодействие между ними? Особенно важную роль играет такая постановка вопроса в молекулярной динамике, в тех случаях, когда изучается взаимодействие двух атомов. По волновой

¹ [См. 24-ю лекцию, формула (13) и дальше.]

механике взаимодействие двух атомов — это взаимодействие двух колебательных систем.

При том определении составляющих (парциальных) систем, которое мы дали, частоты каждой из них лежат между нормальными частотами (рис. 102). Связывая системы, мы раздвигаем нормальные частоты. Это — общая теорема, но если бы мы определили парциальные системы по-другому, то она была бы несправедлива.

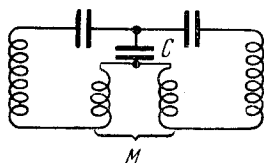


Рис. 101.

Выбор парциальных систем зависит от выбора координат.

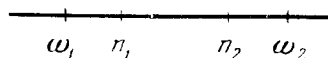


Рис. 102.

Если в выражении для потенциальной энергии $h \neq 0$, то мы говорим, что имеется силовая (емкостная) связь; если в выражении для кинетической энергии $H \neq 0$, — что имеется инерциальная (индуктивная) связь; если $h \neq 0$, $H \neq 0$, — что имеется смешанная связь.

Это понятие качества или рода связи не инвариантно по отношению к выбору координат. Также не инвариантна и величина связи. Но остановимся на определенных координатах. Тогда имеет полный смысл говорить о том, что имеется связь определенного рода.

В случае равных корней секулярного уравнения согласно (2) налицо либо оба вида связи, либо оба отсутствуют. В нашем примере с вагоном (рис. 90), если мы берем координаты x_1 и x_2 , получается инерциальная связь, а если мы берем координаты ξ и θ — силовая. Здесь сразу можно сказать, что корни неравны.

Рассмотрим теперь подробно взаимодействие парциальных систем. Выделим существенные вопросы и разберем их на несложном примере. Рассмотрим случай двух связанных маятников (рис. 103). Мы будем говорить о взаимодействии между двумя связанными системами, входящими в состав одной системы с двумя степенями свободы. Здесь

$$\begin{aligned} 2T &= I_1 \dot{\varphi}_1^2 + I_2 \dot{\varphi}_2^2, \\ 2U &= P_1 \varphi_1^2 + P_2 \varphi_2^2 + \lambda (\varphi_1 - \varphi_2)^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где I_1 и I_2 — моменты инерции маятников; P_1 и P_2 — произведения их весов на расстояния центров тяжести от осей; λ — пропорцио-

нально коэффициенту упругости пружины. Можно сразу сказать, что в *данных* координатах связь силовая, так как

$$2U = (P_1 + \lambda) \varphi_1^2 + (P_2 + \lambda) \varphi_2^2 - 2\lambda \varphi_1 \varphi_2.$$

Полагая $\varphi_2 = 0$ или $\varphi_1 = 0$ (закрепляя маятники), получаем парциальные системы. Для них потенциальная энергия

$$U_1 = \frac{P_1 + \lambda}{2} \varphi_1^2 \text{ и } U_2 = \frac{P_2 + \lambda}{2} \varphi_2^2.$$

Собственные частоты парциальных (в нашем толковании) систем равны:

$$n_1 = \sqrt{\frac{P_1 + \lambda}{I_1}}, \quad n_2 = \sqrt{\frac{P_2 + \lambda}{I_2}}. \quad (6)$$

Обычно под частотами отдельных систем понимают:

$$n_1^* = \sqrt{\frac{P_1}{I_1}}, \quad n_2^* = \sqrt{\frac{P_2}{I_2}}. \quad (7)$$

Это — нечто другое. При $n_1 = n_2$ возможно и $n_1^* = n_2^*$.

Мы увидим, что влечет за собой равенство или неравенство парциальных частот в нашем понимании. Мы увидим, что частотами парциальных систем целесообразно считать именно n_1 и n_2 ; особые явления наступают тогда, когда $n_1 = n_2$, а не в том случае, когда маятники *без пружин* имеют одинаковые частоты (т. е. $n_1^* = n_2^*$).

Напишем, исходя из (5) и (6), уравнения движения, разделив их на I_1 и I_2 :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + n_1^2 \varphi_1 - \frac{\lambda}{I_1} \varphi_2 &= 0; \\ \ddot{\varphi}_2 + n_2^2 \varphi_2 - \frac{\lambda}{I_2} \varphi_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Общее решение есть

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \\ \varphi_2 &= k_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + k_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

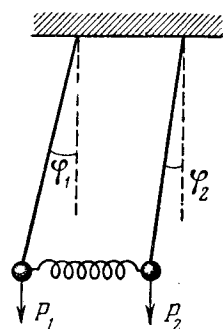


Рис. 103.

причем

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2 \pm \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4\lambda^2/I_1 I_2}}{2}, \quad (10)$$

$$k_{1,2} = \frac{n_1^2 - n_2^2 \pm \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4\lambda^2/I_1 I_2}}{2\lambda/I_1}. \quad (11)$$

Если для частоты мы берем знак плюс, то для коэффициента k нужно брать знак минус.

Вясним физическое содержание этих формул.

Принято вводить обозначение

$$\rho^2 = \frac{\lambda^2}{(P_1 + \lambda)(P_2 + \lambda)} \quad (12)$$

и называть отвлеченное число ρ коэффициентом связи. Последний член под корнем в (10) и (11) можно написать так:

$$\frac{4\lambda^2}{I_1 I_2} = 4\rho^2 n_1^2 n_2^2.$$

Здесь нет пока хорошей терминологии. Говорят, что *связь слаба*, если

$$\rho \ll 1. \quad (13)$$

Это значит, что добавочный член в энергии, обусловленной связью, мал по сравнению с остальными. Но это мало что дает, т. е. *не это* характеризует явления.

Немного больше дало бы такое определение малости связи:

$$\frac{\lambda}{P_1 + \lambda} \ll 1, \quad \frac{\lambda}{P_2 + \lambda} \ll 1.$$

Это значило бы, что связь мала, если пружина мало влияет на *каждый* маятник.

Существенна *другая* малость. Важно соотношение двух величин под корнем:

$$(n_1^2 - n_2^2)^2 \quad \text{и} \quad 4\rho^2 n_1^2 n_2^2.$$

Важно, как мы сейчас увидим, выполняется или нет условие

$$\rho \ll \frac{|n_1^2 - n_2^2|}{n_1 n_2}. \quad (14)$$

Решающее значение имеет разность $n_1^2 - n_2^2$. Если $n_1 = n_2$, то физически не бывает слабой связи.

Важна степень физической „связанности“. И в том случае, когда ρ очень мало, т. е. связь очень мала, „связанность“ систем может быть велика.

Выразим это иначе. Нас интересует, получится ли сильное взаимодействие. Оказывается, что в случае, когда ρ очень мало по отношению к единице, но не по отношению к $|n_1^2 - n_2^2|/n_1 n_2$, то, несмотря на „слабую связь“, взаимодействие будет очень сильное.

Если мы хотим определить „связанность“ так, чтобы она характеризовала взаимодействие, то в качестве условия малой связанности нужно требовать, чтобы выполнялось условие (14). При этом если $n_1 = n_2$, то вообще не может быть малой „связанности“.

Если отдельные системы расстроены одна по отношению к другой, то с точностью до величин второго порядка по λ (т. е. если отбросить члены порядка λ^2 и т. д.)

$$\omega_1^2 = n_1^2, \quad \omega_2^2 = n_2^2.$$

При слабой связи, если „связанность“ достаточно слабая, то в первом порядке нормальные частоты не отличаются от парциальных.

Рассмотрим величины k_1 и k_2 . Величина k_1 характеризует относительную силу первого колебания во второй координате; величина $1/k_2$ характеризует относительную слабость второго колебания в первой координате.

При вычислении k_1 мы не имеем права пренебречь λ^2 . С точностью до членов высшего порядка по λ

$$k_1 = -\frac{\lambda}{(n_1^2 - n_2^2) I_2}, \quad k_2 = \frac{(n_1^2 - n_2^2) I_1}{\lambda}.$$

Если I_1 и I_2 — одного и того же порядка, но если $\lambda/(n_1^2 - n_2^2)$ — малая величина, то k_1 — очень малая, k_2 — очень большая величина. Картина ясна: первое колебание ограничено главным образом первой системой, второе колебание — главным образом второй системой. Каждая частота соответствует „своему“ маятнику. Уже одно это показывает, что физически связь очень мала. Каждый маятник колеблется почти так, как будто бы другого нет.

Если $n_1 = n_2 = n$, то для частот получаются такие выражения:

$$\omega_1^2 = n^2(1 + \rho), \quad \omega_2^2 = n^2(1 - \rho).$$

Если парциальные системы имеют одинаковые собственные периоды, то, как мы видим, связь сказывается на частотах в первом порядке по λ (так как ρ пропорционально λ). При различных n_1 и n_2 частоты *не* отличались в первом по λ . Важно знать, что получится при $n_1 = n_2$ для k_1 и k_2 . Здесь

$$k_1 = -\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}, \quad k_2 = +\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}.$$

Теперь относительная сила первого колебания во втором маятнике и второго колебания в первом вовсе не мала. В частности, если $I_1 = I_2$, то

$$k_1 = -1, \quad k_2 = 1,$$

причем это соотношение *не* зависит от величины связи. Как бы связь ни была слаба, и первое и второе колебания одинаково сильно представлены как в первом, так и во втором маятнике:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2); \\ \varphi_2 &= -C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned}$$

Резюмируем. Если оба маятника расстроены ($n_1 \neq n_2$) и слабо связаны [выполнено (14)], то каждый сохраняет приблизительно свою частоту. Если мы отклоним и приведем в колебание первый маятник, то второй почти не колеблется.

Совсем другое дело в случае *равных* парциальных частот. Как бы ни была слаба связь, нормальные колебания таковы: маятники колеблются с одинаковыми амплитудами, при более быстром колебании — навстречу друг другу (рис. 104, а), при более медленном — в одну сторону (рис. 104, б).

Таковы нормальные (синусоидальные) колебания. Посмотрим теперь, каково будет взаимодействие, если мы выведем первый маятник из состояния равновесия, а второй — нет. При этом будет колебание, отличное от нормального. Нам нужно решить задачу о том, как передается энергия от одного маятника к другому.

Зададим для простоты такие начальные условия. Пусть при $t=0$

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 = 0.$$

Взяв в (9) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, мы удовлетворим последним двум условиям. Первые два условия дают уравнения:

$$C_1 + C_2 = 1, \quad k_1 C_1 + k_2 C_2 = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{k_2}{k_1 - k_2}, \quad C_2 = \frac{k_1}{k_1 - k_2},$$

так что

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{k_1 - k_2} (-k_2 \cos \omega_1 t + k_1 \cos \omega_2 t), \\ \varphi_2 &= \frac{k_1 k_2}{k_1 - k_2} (-\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t). \end{aligned} \quad (15)$$

Эти уравнения и дают нам ответ на вопрос о том, как передается энергия от первого маятника ко второму, если вначале возбужден первый маятник.

Заметим, что выражение для φ_2 можно представить в виде

$$\varphi_2 = \frac{2k_1 k_2}{k_1 - k_2} \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \quad (16)$$

Второй множитель — быстро колеблющаяся синусоида, а первый множитель — переменная амплитуда. Получаются *биения*. Максимальное значение φ_2 наступает тогда, когда оба множителя равны единице:

$$\varphi_{2\max} = \frac{2k_1 k_2}{k_1 - k_2},$$

или, если подставить сюда (11),

$$\varphi_{2\max} = \frac{2\lambda}{I_2 \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4\lambda^2 / I_1 I_2}}. \quad (17)$$

Возьмем первый случай, когда

$$(n_1^2 - n_2^2)^2 \gg \frac{4\lambda^2}{I_1 I_2}.$$

Тогда приближенно

$$\varphi_{2\max} = \frac{2\lambda}{I_2 (n_1^2 - n_2^2)}.$$

Таким образом, если парциальные системы расстроены, то при слабой связи передача энергии ничтожна и тем меньше, чем меньше λ .

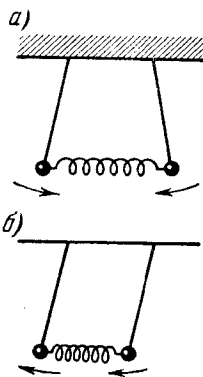


Рис. 104.

Совсем иначе будет в случае, если парциальные системы настроены, т. е. $n_1 = n_2$. Тогда

$$\varphi_{2\max} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}.$$

При „резонансе“ парциальных частот колебание „заразительно“. Если $I_1 = I_2$, т. е. маятники тождественны, то $\varphi_{2\max} = 1$, — максимальное значение отклонения второго маятника равняется начальному отклонению первого маятника. Это значит, что *вся* энергия передается через некоторое время второму маятнику. В этом состоит другое проявление того, что если связь как угодно слаба, но отдельные системы друг на друга настроены, то все же „связанность“ очень велика.

Если есть различие между n_1 и n_2 , то всегда можно выбрать столь малое λ , чтобы не было заметного взаимодействия. Если же $n_1 = n_2$, то „слабо“ связать системы невозможно: всегда есть сильное взаимодействие.

Как зависит амплитуда $\varphi_{2\max}$ от расстройки? Формула (17) напоминает формулу

$$X = \frac{E}{L \sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}} \quad (18)$$

для колебаний системы с одной степенью свободы под действием синусоидальной внешней силы. Там мы имели явления резонанса. Структура формулы (17) — совершенно та же. Достаточно малой расстройки между частотами, чтобы сильно расстроить передачу энергии.

Но в случае (18) амплитуда силы постоянна, теперь же она переменна. Второй маятник не может получить больше энергии, чем имеет вначале первый. Когда один раскачивается, другой теряет энергию. Здесь — не действие на маятник силы с заданной амплитудой, а *взаимодействие*. Как бы велико ни было λ , $\varphi_{2\max}$ не будет больше единицы.

Картина смещений обоих маятников показана на рис. 105.

При очень слабой связи перекачка энергии от первого маятника ко второму происходит очень медленно, но если $n_1 = n_2$, то в конце концов перекачается *вся* энергия. Но можно ли поверить, что такая полная перекачка получится на самом деле при сколь угодно слабой связи? Мы пришли к парадоксу. В реальных условиях этого не может быть. Теория правильна, но она перестает

быть применимой при слишком малой связи. В молекулярной физике область применимости нашей теории простирается гораздо дальше, чем для маятников. Там она дает „парадоксальные“, но реально наблюдаемые вещи: очень сильное взаимодействие при чрезвычайно слабых связях. Там это имеет еще большее значение, чем в обычной теории колебаний.

Разберем подробнее наш парадоксальный результат.

Пусть λ очень мало (представим себе, что мы уносим второй маятник в другую комнату). Тогда приближенно

$$\omega_1 = n \left(1 + \frac{\rho}{2}\right), \quad \omega_2 = n \left(1 - \frac{\rho}{2}\right).$$

Разность нормальных частот $\omega_1 - \omega_2$ очень мала по сравнению с $\omega_1 + \omega_2$. В начальный момент величина φ_2 равна нулю. Она станет заметной только через колоссальное время. В предельном случае бесконечно слабой связи перекачка будет длиться бесконечное время. Это и ограничивает приме-

нение теории на практике. Будем оценивать время по отношению к периоду. Если перекачка длится 10^{10} периодов, то это практически значит, что перекачки никогда не произойдет. Но в молекулярной физике 10^{10} периодов составляют, например, 10^{-2} секунды, а это на наши масштабы — конечное время.

Но это еще не все. Мы вели расчет для идеальных условий. Если передача должна длиться очень долго, то прежде чем она произойдет, вся энергия будет „съедена“ даже маленьким трением.

В том, что было сказано о перекачке, математическая сторона ясна, но возникает следующий физический вопрос. Пустим левый маятник. Он толкает правый маятник, раскачивает его. Пусть правый раскачался настолько, что он обладает половиной всей энергии. Почему его энергия будет и дальше увеличиваться? Строгий ответ дается математическим решением задачи, но хочется иметь наглядную картину. Дело в том, что левый маятник сообщает толчки правому маятнику в *определенные* моменты. В случае $n_1 = n_2$ толчки продолжают наступать в моменты, благоприятные

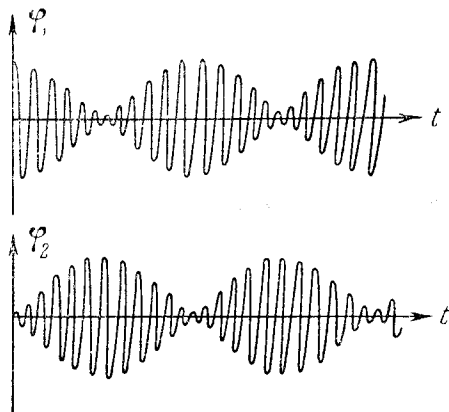


Рис. 105.

для передачи энергии от левого маятника к правому, и после того, как энергии маятников сравнялись. Дело здесь не в запасе энергии у каждого из маятников, а в том, как распределены толчки во времени.

ДВАДЦАТЬ ШЕСТАЯ ЛЕКЦИЯ

(17/III 1931 г.)

Примеры, где существенное значение имеет распределение нормальных колебаний. Когда можно приближенно рассматривать связанные колебания как вынужденные. Приближенное вычисление изменения нормальной частоты при малом изменении параметра. Вырожденный случай. Эффект слабой связи в теории возмущений. Вынужденные колебания в системе с двумя степенями свободы. Теорема взаимности. Резонанс. Успокоение.

Для систем с двумя степенями свободы нам остается, во-первых, подвести некоторые итоги, во-вторых, разобрать вынужденные колебания и, наконец, разобрать вопрос о затухании колебаний.

В прошлый раз мы рассчитали до конца простой пример двух связанных маятников. В общем случае электрической или механической системы, обозначая координаты через x и y , мы имеем общее решение вида

$$x = C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$y = k_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + k_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Каждая координата совершает движение, которое может быть представлено, вообще говоря, как сумма двух гармонических колебаний с определенными периодами. В частности, система может колебаться с одним периодом (если $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$). Эти особенные колебания с одним периодом называются нормальными. Величины k_1 и k_2 характеризуют распределение нормальных колебаний по координатам. Знание периодов существенно в вопросах резонанса. Укажем теперь примеры, на которых выяснилось, насколько важно для чисто технических вопросов знание также и величин k_1 и k_2 .

для передачи энергии от левого маятника к правому, и после того, как энергии маятников сравнялись. Дело здесь не в запасе энергии у каждого из маятников, а в том, как распределены толчки во времени.

ДВАДЦАТЬ ШЕСТАЯ ЛЕКЦИЯ

(17/III 1931 г.)

Примеры, где существенное значение имеет распределение нормальных колебаний. Когда можно приближенно рассматривать связанные колебания как вынужденные. Приближенное вычисление изменения нормальной частоты при малом изменении параметра. Вырожденный случай. Эффект слабой связи в теории возмущений. Вынужденные колебания в системе с двумя степенями свободы. Теорема взаимности. Резонанс. Успокоение.

Для систем с двумя степенями свободы нам остается, во-первых, подвести некоторые итоги, во-вторых, разобрать вынужденные колебания и, наконец, разобрать вопрос о затухании колебаний.

В прошлый раз мы рассчитали до конца простой пример двух связанных маятников. В общем случае электрической или механической системы, обозначая координаты через x и y , мы имеем общее решение вида

$$x = C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$y = k_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + k_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Каждая координата совершает движение, которое может быть представлено, вообще говоря, как сумма двух гармонических колебаний с определенными периодами. В частности, система может колебаться с одним периодом (если $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$). Эти особенные колебания с одним периодом называются нормальными. Величины k_1 и k_2 характеризуют распределение нормальных колебаний по координатам. Знание периодов существенно в вопросах резонанса. Укажем теперь примеры, на которых выяснилось, насколько важно для чисто технических вопросов знание также и величин k_1 и k_2 .

Пусть система колеблется под действием внешнего источника колебаний. Если внешняя сила действует только на одну парциальную систему, то тем не менее одновременно приходят в колебание обе. Если частота внешней силы значительно отличается от нормальных частот, то тип колебаний существенно другой, чем при нормальных колебаниях. Но пусть частота внешней силы очень близко подходит к ω_1 или ω_2 . Тогда система начинает возбуждаться очень сильно (резонанс) и, кроме того, тип колебаний становится почти таким же, как при соответствующем нормальном колебании.

Физически речь может идти, например, о двух маятниках (рис. 86). Это — модель парохода с успокоителем качки¹, или пловучего маяка (фонарь подвешен на бую).

Вот еще система с двумя степенями свободы: колокол и язык (рис. 106). В 70-х годах прошлого века наблюдался случай, когда очень большой колокол не звонил. Постараемся понять, в чем здесь дело. Для того, чтобы сильно раскачать колокол, его тянут с одним из собственных периодов. Тип колебания приблизительно такой же, как при собственных колебаниях.

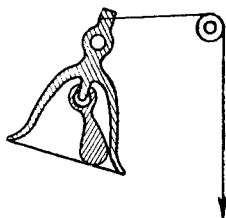


Рис. 106.

Пусть $k_1 = 1$. Это значит, что вблизи резонанса $x = y$. Колокол отклоняется так же, как и язык. Они колеблются как целое, и язык не ударяет в колокол.

Для того, чтобы колокол или пловучий маяк правильно действовали, нужно, чтобы было $y = 0$, т. е. $k_1 = 0$ (y — отклонение языка или фонаря). Но в связанной системе никогда не бывает $k_1 = 0$: идеально успокоить фонарь невозможно. Чтобы обойти эту трудность, делают фонарь с очень большим собственным периодом. Здесь мы возвращаемся к уже известному нам случаю действия силы с коротким периодом на систему с очень длинным собственным периодом².

Обратимся снова к вопросу о взаимодействии между парциальными системами. Мы знаем, что здесь возможны два существенно различных случая — слабой и сильной „связанности“. Если парциальные системы расстроены и связь мала, то в первом приближении каждая из них колеблется „сама по себе“. Если частоты

¹ [См. 27-ю лекцию.]

² [См. 20-ю лекцию.]

парциальных систем совпадают, сильное взаимодействие будет и при сколь угодно слабой связи.

Вопрос о взаимодействии при слабой связи интересен и получил решающее значение в теории возмущений. Для того, чтобы понять, в чем тут дело, напишем снова уравнения связанных маятников:

$$\ddot{\varphi}_1 + n_1^2 \varphi_1 = \frac{\lambda}{I_1} \varphi_2;$$

$$\ddot{\varphi}_2 + n_2^2 \varphi_2 = \frac{\lambda}{I_2} \varphi_1.$$

Если бы во втором уравнении справа стояла заданная функция времени, то для второй парциальной системы была бы задача о вынужденных колебаниях системы с одной степенью свободы. Эту задачу мы уже рассматривали. Но в действительности мы не знаем $\varphi_1(t)$, ибо φ_1 связана таким же уравнением с φ_2 , как φ_2 с φ_1 . Поэтому здесь нужна новая теория.

Вначале встречались такого рода недоумения. Если мы сначала пустим первую систему, то она должна колебаться со своим собственным периодом и на вторую систему будет действовать периодическая сила с частотой n_1 . Между тем по теории должно быть две частоты. Откуда взялась вторая частота?

Парадокс получался только потому, что не умели правильно решать задачу. Существование двух частот вполне естественно и с физической точки зрения: если первое движение возбуждает второе, то оно изменяется под действием этого второго движения. Сила, действующая на φ_2 , уменьшается по амплитуде, а сила с переменной амплитудой — это уже не синусообразная сила.

Но есть ли случаи, когда применимы рассуждения, сводящие задачу о связанных колебаниях на задачу о вынужденных? Если они есть, то в таких случаях удобно решать задачу, как задачу о вынужденных колебаниях. (Например, радиопередатчик на 100 квт и приемник образуют связанную систему, но здесь наверное можно считать, что приемник совершает колебания под действием заданной внешней силы.)

В нашем случае линейной системы задачу о связанных колебаниях можно свести приближенно к задаче о вынужденных колебаниях тогда, когда связь мала и есть сильная расстройка между парциальными системами ($|k_1| \ll |k_2|$). При этом можно положить

$$x = \cos \omega_1 t$$

(x колеблется почти так, как будто второй координаты нет). Случай, когда связь мала по отношению к расстройке, соответствует слабой связанности в нашем смысле.

Можно показать, что и при совпадении парциальных частот, т. е. когда $n_1 = n_2$, если связь слабая, такой способ рассмотрения допустим в первое, начальное время после того, как пустили первый маятник (второй вначале покоится), т. е. в течение определенного числа периодов, зависящего от связи. Это время тем меньше, чем больше связь. Здесь нельзя забывать, что с течением времени наступает полная перекачка энергии.

До сих пор затухание не учитывалось. Пусть теперь имеется затухание и такое, что колебания затухнут раньше, чем успеет произойти заметная перекачка энергии. Тогда и при настройке парциальных систем ($n_1 = n_2$) мы получим все, что нужно, сводя задачу о связанных колебаниях на задачу о вынужденных колебаниях.

Разумеется, как угодно малая расстройка физически не может играть никакой роли в теории связанных колебаний. В окончательном результате не может иметь значения, являются ли парциальные системы тождественными или слегка различными. Как теперь известно, эту точку зрения нельзя переносить в теорию атомных явлений. Там мы имеем основание говорить об особых случаях полной тождественности двух систем. Вне наших возможностей не допустить различия двух макроскопических систем хотя бы на один атом. В макроскопических системах точное число атомов не может играть роли. Но когда речь идет об *одном* атоме, дело обстоит иначе. Различие между тождественностью и нетождественностью системы имеет в волновой механике важный физический смысл.

Возьмем связанную систему (рис. 107). Как выделить нормальные колебания на опыте? С помощью волномера (при очень слабой связи между волномером и исследуемой системой) можно разделить колебания с частотами ω_1 и ω_2 ; но если они близки, то раздельный прием очень труден. Свяжем, однако, с исследуемой системой две катушки так, как показано на рис. 107. Тогда ток I будет линейной комбинацией координат x и y :

$$I = s_1 x + s_2 y.$$

Если мы подберем коэффициенты трансформации s_1 и s_2 так, чтобы было $s_1 + s_2 k_1 = 0$, т. е. $s_1/s_2 = -k_1$, то в токе I будет

отсутствовать частота ω_1 , и мы физически осуществим в дополнительной цепи вторую нормальную координату. Аналогичным образом мы можем физически осуществить первую нормальную координату.

В теории колебаний встречается целый класс задач следующего типа. Дана система с такими-то частотами и такими-то распределениями амплитуд. Изменим параметры системы. Как изменятся при этом частоты и распределения?

Вообще говоря, для новых значений параметров нужно заново решать всю задачу о нахождении частот и распределений. Но

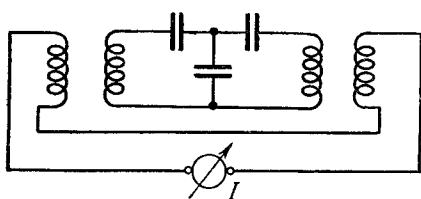


Рис. 107.

часто бывает так, что параметры изменены *очень мало*, и тогда, в первом приближении, можно узнать, как меняются частота и распределение без сложных вычислений.

Такой подход характерен для теории возмущений. Про-

иллюстрируем его на простом примере системы с двумя степенями свободы. Напишем снова:

$$U = ax^2 + 2hxy + by^2,$$

$$T = Ax^2 + 2H\dot{x}\dot{y} + B\dot{y}^2.$$

Отбросим точки в выражении для T , обозначим

$$\frac{y}{x} = \xi$$

и составим отношение полученных таким образом выражений:

$$\frac{a + 2h\xi + b\xi^2}{A + 2H\xi + B\xi^2}. \quad (1)$$

Мы доказали, что максимальное и минимальное значения этой функции от ξ получаются соответственно при $\xi = \xi_1$ и $\xi = \xi_2$ и равны квадратам нормальных частот¹.

Пусть теперь немного изменился один из параметров, входящий в T или U . Изменяются нормальные частоты и отношения ξ_1 и ξ_2 . Утверждение состоит в следующем: чтобы найти с точностью до величин второго порядка относительно изменения параметра новый максимум выражения (1), нужно подставить в него *прежнее* ξ_1 .

¹ [См. 24-ю лекцию.]

Докажем это. Будем менять, скажем, параметр a и рассматривать ω_1^2 как функцию параметра a и величины ξ_1 :

$$\omega_1^2 = f(a, \xi),$$

причем $\xi = \xi(a)$, т. е.

$$\omega_1^2 = f[a, \xi(a)].$$

Если меняется параметр a , то меняется и ω_1^2 , причем в первом порядке:

$$\Delta \omega_1^2 = \frac{\partial f}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{d\xi}{da} \Delta a,$$

где производную $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ нужно брать при неизменных параметрах и подставить в нее старое значение a .

Но при старом значении a подстановка значения $\xi = \xi_1$ обращает величину ω_1^2 в максимум, и потому

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta \omega_1^2 = \frac{\partial f}{\partial a} \Delta a.$$

Изменение ξ выпадает.

Для того, чтобы пояснить математическую сторону дела, приведем следующий пример: возьмем функцию

$$x^2 + ax$$

и изменим параметр a . При этом изменяется значение x , дающее экстремум функции. Но если a изменяется на малую величину *первого* порядка, то значение x , соответствующее экстремуму, остается прежним с точностью до величин *второго* порядка.

Только что указанный простой способ нахождения изменения частот имеет одно очень важное исключение. Это — случай, когда в исходной системе нет связи и обе частоты совпадают:

$$n_1^2 = \frac{a}{A} = n_2^2 = \frac{b}{B},$$

а возмущение заключается в том, что вводится малая связь.

Если мы захотим применить общий способ, мы должны будем подставить в выражение (1) для возмущенной системы значения ξ в невозмущенной системе. Но чему считать равным это ξ ? Неизвестно. В исходной системе ξ может иметь какие угодно значения. Так решать задачу нельзя.

Но легко доказать следующее. Если

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B},$$

то при наличии связи

$$\xi_1 = -\xi_2, \quad \xi_1 = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

а раз мы нашли ξ_1 и ξ_2 , то очень просто найти обычным путем нормальные частоты как максимум и минимум выражения (1). Здесь также есть исключительный случай — тот, когда

$$\frac{h}{H} = \frac{a}{A}.$$

Но тогда и при возмущении попрежнему нет связи.

Случай, когда две тождественные системы с одной степенью свободы, сначала не связанные, приходят в слабую связь, имеет в теории возмущений большое значение. При этом всегда наступает полная перекачка энергии. К этому случаю применим только что указанный способ расчета.

Перейдем к вопросу о действии внешней периодической силы на систему с двумя степенями свободы. Вернемся к уравнениям Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i.$$

Если обобщенные силы Q_i содержат, помимо слагаемых Q'_i , имеющих потенциальную энергию:

$$Q'_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i},$$

еще слагаемые Q''_i , происходящие от внешних воздействий, уравнения принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial (U - T)}{\partial q_i} = Q''_i.$$

Пусть система имеет две степени свободы и пусть на координаты x и y действуют синусоидальные силы с частотой p (например, рис. 108). Тогда мы получаем уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} A\ddot{x} + H\ddot{y} + ax + hy &= X \cos pt; \\ H\ddot{x} + B\ddot{y} + hx + by &= Y \cos pt. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} x &= \alpha \cos pt, \\ y &= \beta \cos pt. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя эти формулы в дифференциальные уравнения, получаем для α и β систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (a - Ap^2)\alpha + (h - Hp^2)\beta = X; \\ (h - Hp^2)\alpha + (b - Bp^2)\beta = Y. \end{cases} \quad (4)$$

Из них мы определим амплитуды обеих координат при действии внешней силы. При собственном колебании детерминант должен был равняться нулю. Из этого условия мы определяли нормальные частоты. При любом p , таком, что детерминант системы отличен от нуля, система (4) имеет решение. При этом однородные уравнения не имеют решения.

Напишем решения неоднородных уравнений в виде отношения детерминантов:

$$\alpha = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} X & h - Hp^2 \\ Y & b - Bp^2 \end{vmatrix}, \quad \beta = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a - Ap^2 & X \\ h - Hp^2 & Y \end{vmatrix}, \quad (5)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a - Ap^2 & h - Hp^2 \\ h - Hp^2 & b - Bp^2 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Здесь возникает ряд вопросов, чуждых системе с одной степенью свободы.

Пусть $Y=0$, $X \neq 0$ (сила действует только на первую парциальную систему). Тогда

$$\beta = - \frac{X(h - Hp^2)}{\Delta}.$$

Пусть теперь сила действует только на вторую парциальную систему: $X=0$, $Y \neq 0$. При этом

$$\alpha = - \frac{Y(h - Hp^2)}{\Delta}.$$

Мы получили замечательное свойство — свойство, далеко идущее и очень общее: если на вторую координату действует сила

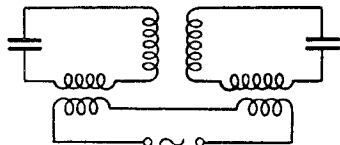


Рис. 108.

$Y=1$, то движение первой координаты — такое же, как движение второй координаты, когда на первую будет действовать сила $X=1$. Это — знаменитая *теорема взаимности*. Она справедлива для систем с любым числом степеней свободы, и — в соответствующим образом измененной формулировке — для сплошных систем. Она широко применяется в радиотехнике и в оптике.

Я укажу на одно ее применение в беспроводной телеграфии. Имеются две радиостанции A и B с какими угодно антеннами. Пусть один раз станция A передает, а B принимает, а в другой раз B передает, а A принимает. Теорема взаимности утверждает, грубо говоря, что станция A так же принимает станцию B , как станция B принимает станцию A . Если в направлении B станция A передает сильнее, то она и принимает сильнее колебания, приходящие из направления B . Это отнюдь не само собой понятно. Это связано с линейностью уравнений. Вот тривиальный пример, когда это перестает быть справедливым. Пусть антенна станции A перегружается, в ней пробивается изоляция. Тогда станция B принимать не будет, а станция A попрежнему хорошо принимает станцию B . Это происходит потому, что нарушается линейность: когда происходит пробой, ток не растет пропорционально напряжению, проводник не подчиняется закону Ома.

Ионизированные слои атмосферы не подчиняются линейным зависимостям. При достаточно больших амплитудах они должны дать нарушение взаимности, но я не думаю, чтобы это легко было обнаружить на опыте¹.

Вернемся к формулам (5) и (6).

Пусть p приближается к ω_1 или ω_2 . При этом

$$\Delta \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad \beta \rightarrow \infty.$$

Получаются два положения резонанса. При приближении к резонансу начинает играть роль затухание, но если мы захотим его учесть, то нам нужно будет решать чрезвычайно громоздкие уравнения.

Затухание приводит к тому, что при резонансе получается чрезвычайно большая, но конечная амплитуда. Для многих вопросов достаточно знать, при каких частотах имеет место резонанс. На этот вопрос уравнения (5) часто дают достаточно правильный

¹ [Нелинейные явления в ионосфере (Люксембург-Горьковский эффект) были впервые замечены в 1933 г.]

ответ. Важно подчеркнуть, что система отвечает особенно сильно на две частоты.

Рассмотрим теперь очень специфический случай. Пусть

$$Y=0, \quad p = \sqrt{\frac{b}{B}} = n_2$$

(внешняя сила действует только на *первую* парциальную систему. Ее частота равна частоте *второй* парциальной системы). В этом случае получаем согласно (5)

$$\alpha = 0.$$

Таким образом, если на парциальную систему x действует сила с частотой, равной собственной частоте парциальной системы y , то в координате x колебание не возбуждается. Это имеет очень важное практическое значение для электрических фильтров и успокоителей механических колебаний, например устройств для успокоения качки корабля.

ДВАДЦАТЬ СЕДЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(27/III 1931 г.)

Механические успокоители и электрические „пробки“. Отсутствие резонанса при совпадении частоты внешней силы с одной из нормальных частот и в случае внешней силы, ортогональной к нормальному колебанию. Линейная система с двумя степенями свободы при наличии трения. Метод, позволяющий находить интегральные эффекты, не решая дифференциального уравнения.

В прошлый раз мы начали исследование поведения линейной системы с двумя степенями свободы под действием периодических внешних сил. Следует, может быть, напомнить, что наши обобщенные координаты x и y , вообще говоря, не являются декартовыми координатами. Поэтому наши внешние силы являются обобщенными силами (обобщенной силой может быть, например, момент силы). Но для простоты мы говорим просто о силах.

Пусть сила действует только на правую координату, а ее частота p равна собственной частоте второй координаты:

$$p = \sqrt{\frac{b}{B}} = n_2.$$

ответ. Важно подчеркнуть, что система отвечает особенно сильно на две частоты.

Рассмотрим теперь очень специфический случай. Пусть

$$Y=0, \quad p = \sqrt{\frac{b}{B}} = n_2$$

(внешняя сила действует только на *первую* парциальную систему. Ее частота равна частоте *второй* парциальной системы). В этом случае получаем согласно (5)

$$\alpha = 0.$$

Таким образом, если на парциальную систему x действует сила с частотой, равной собственной частоте парциальной системы y , то в координате x колебание не возбуждается. Это имеет очень важное практическое значение для электрических фильтров и успокоителей механических колебаний, например устройств для успокоения качки корабля.

ДВАДЦАТЬ СЕДЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(27/III 1931 г.)

Механические успокоители и электрические „пробки“. Отсутствие резонанса при совпадении частоты внешней силы с одной из нормальных частот и в случае внешней силы, ортогональной к нормальному колебанию. Линейная система с двумя степенями свободы при наличии трения. Метод, позволяющий находить интегральные эффекты, не решая дифференциального уравнения.

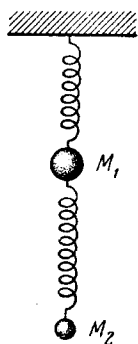
В прошлый раз мы начали исследование поведения линейной системы с двумя степенями свободы под действием периодических внешних сил. Следует, может быть, напомнить, что наши обобщенные координаты x и y , вообще говоря, не являются декартовыми координатами. Поэтому наши внешние силы являются обобщенными силами (обобщенной силой может быть, например, момент силы). Но для простоты мы говорим просто о силах.

Пусть сила действует только на правую координату, а ее частота p равна собственной частоте второй координаты:

$$p = \sqrt{\frac{b}{B}} = n_2.$$

Тогда, как было показано в прошлой лекции, амплитуда первой координаты $\alpha = 0$. При этом амплитуду β второй координаты легко найти. Итак, в этом случае первая координата не колеблется. Это справедливо при любых h и H .

Если на один груз (M_1 ; рис. 109) действует периодическая сила, он будет совершать вынужденные колебания при всяком периоде силы. Привяжем пружину со вторым грузом M_2 (рис. 109), и пусть p соответствует собственной частоте второй пружины с грузом (при закрепленном первом грузе). Тогда амплитуда колебания первого груза равна нулю, происходит его *успокоение*: под действием прежней периодической силы он остается теперь в покое.



Если на диск, насаженный на вал (рис. 98), действует момент с парциальной частотой второго диска, то вращательные колебания первого диска будут успокоены.

Это явление находит существенные применения. На нем основаны механические успокоители.

Если установить на фундаменте мощную машину, не совсем выверенную, фундамент придет при резонансе в сильные колебания, что чрезвычайно нежелательно. Закрепить фундамент невозможно. Но для его успокоения достаточно поставить на фундамент другую колебательную систему и подобрать ее период так, чтобы он совпадал с периодом внешней силы. Дополнительная система (маятник) при этом колеблется, но это нас мало беспокоит. Мы нашли „выход“ силе и таким образом освободили фундамент от колебаний.

Успокоение наступает при $p = p_2$. Если же p — одна из частот связи (нормальных частот), наступает резонанс. Если машина не имеет постоянного числа оборотов и если нормальные частоты близки к парциальным, то легко может наступить переход от успокоения к резонансу; при этом машина начнет сильно раскачивать фундамент.

Полное успокоение имеет место только при отсутствии затухания. Если есть малое затухание, то $\alpha \neq 0$, а только очень мало. Но при этом не так страшна неточность совпадения частот p и p_2 . Введя затухание, мы понижаем эффект успокоителя, но зато делаем его менее чувствительным к изменениям периода внешней силы. Полный расчет здесь очень громоздок, и мы не будем его проводить.

Приведем два существенных применения изложенной теории.

1. Успокоитель качки судов. Судно на воде приходит в колебания. Давно возник вопрос о том, как их успокоить. Было предложено много решений. Вот принцип одного из них — успокоителя Фрама (1911 г.). Вода в резервуаре (рис. 110) — одна колебательная система, корабль — другая. На корабль действует периодическая сила. Период колебаний воды в резервуаре подобран так, что он приблизительно совпадает с периодом качки. Вода начинает очень сильно колебаться, но колебания корабля заметно успокаиваются. Колебания воды не создают никаких неприятностей.

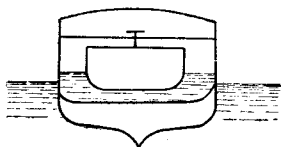


Рис. 110.

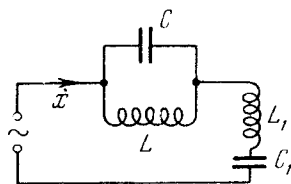


Рис. 111.

Конечно, волны не имеют какого-то одного определенного периода, и здесь нужно найти компромисс между степенью успокоения и нечувствительностью к периоду качки. Он достигается подбором затухания, которое регулируется открытием крана в трубе, через которую перекачивается воздух. Опыт дал благоприятные результаты.

2. „Пробка“ в электротехнике. В схеме рис. 111, если

$$p^2 = \frac{1}{LC}, \quad (1)$$

то ток $\dot{x}$ в цепи L_1, C_1 будет равен нулю. Если же равенство (1) нарушено, $\dot{x} \neq 0$. Контур LC обладает бесконечным сопротивлением для определенной частоты и запирает цепь для этой частоты.

Явление здесь сходно с резонансом. В контуре рис. 112, а случай (1), когда ток максимален, принято называть резонансом напряжений, так как на конденсаторе и катушке получаются большие напряжения (по сравнению с общим напряжением на клеммах). В случае же „пробки“ (рис. 112, б) говорят о резонансе токов, потому что ток в контуре LC имеет при условии (1) большую амплитуду (по сравнению с током в общей цепи). Эта теория очень проста, но простота куплена ценой отказа от рассмотрения

затухания. При проектировании действительных устройств нужно, конечно, учитывать затухание. Выясним, какие изменения оно внесет.

Без затухания мы получили $\alpha=0$, $\beta \neq 0$. Но если $\alpha=0$, то откуда берется энергия второго контура? Поскольку сопротивление отсутствует, нет ничего удивительного, что при *установившемся процессе* энергия во второй контур не поступает, — она в нем не потребляется.

Но пусть имеется сопротивление. Из математических соображений непрерывности можно заключить, что при достаточно малом сопротивлении ток мало отличен от того, который был бы без

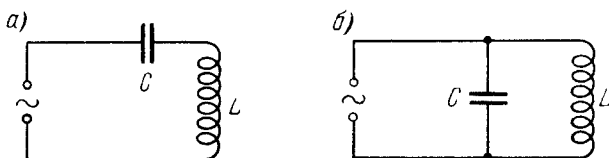


Рис. 112.

сопротивления. Пусть для простоты $L_1=0$, $C_1=\infty$ (рис. 111), т. е. речь идет о схеме рис. 112, б). Тогда амплитуда тока через C будет

$$I = pC\varepsilon. \quad (2)$$

Если сопротивление мало, то ток через L имеет амплитуду, очень близкую к этому значению. Но теперь потребляется мощность $RI^2/2$. Она откуда-то поставляется. Это возможно только благодаря тому, что есть ток во внешней цепи. Этот ток — в фазе с электровозбудительной силой (что очень легко показать), а тогда легко видеть, чему он равен:

$$\frac{RI^2}{2} = \frac{I_0\varepsilon}{2},$$

или на основании (2)

$$I_0 = \varepsilon \frac{RC}{L}.$$

При малом сопротивлении ток очень мал.

Таким образом, в действительности пробка имеет конечное сопротивление, которое тем больше, чем меньше R . Если R мало, действие пробки очень острое.

На примере успокоителей особенно ясно, насколько нужно быть осторожными в вопросе о том, что называть парциальными частотами. Если стремиться сохранить тот результат, что успокоение наступает тогда, когда внешняя частота равна собственной частоте парциальной системы, то нужно пользоваться тем определением последней, которое мы дали.

Собственные частоты системы инвариантны по отношению к выбору координат, и, следовательно, частоты, при которых наступает резонанс, не зависят от выбора координат. Частота успокоения зависит от того, где, в какой координате тушится колебание. При включении внешней силы в три разные ветви (рис. 113) успокоение будет наступать при трех различных частотах внешней силы. Каждый раз это будет собственная частота контура, получающегося, если разорвать ветвь, в которую включена внешняя сила.

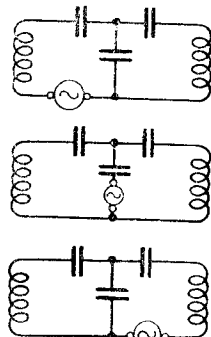


Рис 113.

Это практическое приложение подтверждает целесообразность нашего определения парциальных систем.

Когда частота внешней силы совпадает с одной из нормальных частот, происходит сильное возбуждение колебаний, наступает резонанс. Здесь есть, однако, момент, существенно отличающий системы с двумя степенями свободы от системы с одной степенью свободы. В простом контуре при $p = \omega_0$ (ω_0 — собственная частота) резонанс не наступает, только если амплитуда внешней силы равна нулю. Точно так же при двух степенях свободы резонанса не будет ни при $p = \omega_1$, ни при $p = \omega_2$, если $X = Y = 0$. Это — тривиальный случай. Но в случае двух степеней свободы есть еще другой, не тривиальный, случай отсутствия резонанса при $p = \omega_1$ или $p = \omega_2$, который специфичен для систем, имеющих больше чем одну степень свободы. Выясним, когда он наступает. Согласно уравнению (5) предыдущей лекции имеем:

$$\alpha = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} X & h - Hp^2 \\ Y & b - Bp^2 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Пусть p совпадает с одной из нормальных частот. Мы получаем резонанс ($\alpha = \infty$) в предположении, что детерминант в числителе не обращается в нуль. Если же он тоже равен нулю, т. е.

$$X(b - Bp^2) - Y(h - Hp^2) = 0, \quad (4)$$

то α не обращается в ∞ , резонанса не наступает. В случае свободных колебаний, если частота их равна p , отношение амплитуд есть

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{b - Bp^2}{h - Hp^2} = -\frac{h - Hp^2}{a - Ap^2}. \quad (5)$$

Таким образом, резонанс не наступает, несмотря на совпадение внешней частоты с нормальной частотой, если

$$X\alpha + Y\beta = 0, \quad (6)$$

где α и β — амплитуды обеих координат при соответствующем нормальном колебании.

Речь шла только об амплитуде α первой координаты. Но если p совпадает с нормальной частотой, то из (5) следует, что при условии (6) верхний детерминант в выражении для β тоже обращается в нуль и, следовательно, β также не обращается в ∞ .

Мы можем рассматривать X и Y как компоненты вектора на плоскости, характеризующего распределение внешней силы, а α и β в формуле (5) — как компоненты вектора, определяющего форму нормального колебания. Условие (6) есть условие перпендикулярности (ортогональности) этих векторов. Таким образом, резонанс не наступает, если вектор, соответствующий силе, ортогонален к вектору, соответствующему собственному колебанию. В такой форме можно обобщить этот результат на n степеней свободы.

Можно избежать нежелательного резонанса, соответствующим образом распределяя искусственно силу между координатами. Для каждой нормальной частоты подбор распределения силы должен быть различным.

Все это имеет место в таком чистом виде, если нет затухания. При наличии малого затухания основные результаты — те же, но явления теряют остроту, смазываются. Резонанс устраняет бесконечности. В отсутствие затухания вычисления настолько проще, что лучше сначала все выяснить без затухания, а потом вносить поправки на затухание.

Для случая затухания уравнения Лагранжа нужно писать так:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i,$$

где Q_i — сумма обобщенных внешних сил и сил трения.

Релей обратил внимание на следующее. Для сил трения или сопротивления, зависящих от скоростей, существует во многих случаях так называемая *диссипативная функция*. Это такая функция $F(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ обобщенных скоростей, удвоенное значение которой равно количеству энергии, рассеиваемой в единицу времени на трение. При этом силы трения таковы:

$$Q_i = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}.$$

Если мы найдем функцию F , то мы будем знать силы трения. Обычно можно узнать, какова эта функция, из физических соображений.

Возьмем в качестве примера два индуктивно связанных электрических контура. Здесь

$$2T = L_1 \dot{q}_1^2 + L_2 \dot{q}_2^2 + 2M \dot{q}_1 \dot{q}_2,$$

$$2U = \frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2}.$$

Складывая потери в единицу времени в обоих контурах, получаем для диссипативной функции выражение

$$2F = R_1 \dot{q}_1^2 + R_2 \dot{q}_2^2.$$

Уравнения движения имеют теперь вид

$$\left. \begin{aligned} L_1 \ddot{q}_1 + M \ddot{q}_2 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{q_1}{C_1} &= 0, \\ L_2 \ddot{q}_2 + M \ddot{q}_1 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{q_2}{C_2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Отличие от прежних уравнений в том, что теперь вошли первые производные $\dot{q}_1$ и $\dot{q}_2$. Раньше переменные входили или с двумя точками, или без точек, и мы могли положить:

$$q = A \cos(\omega t + \alpha),$$

заранее зная, что косинус сократится. Теперь так не получится. Но мы можем воспользоваться решением в виде экспоненциальной функции, так как при дифференцировании она себя повторяет. Будем искать решение в виде

$$q_1 = \alpha e^{mt}, \quad q_2 = \beta e^{mt}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в уравнения (7), получаем уравнения

$$\left. \begin{aligned} (L_1 m^2 + R_1 m + \frac{1}{C_1}) \alpha + M m^2 \beta &= 0; \\ M m^2 \alpha + (L_2 m^2 + R_2 m + \frac{1}{C_2}) \beta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Здесь неизвестны α , β и m . По отношению к α и β эти уравнения линейны. Они имеют не тривиальное решение только тогда, когда равен нулю детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 m^2 + R_1 m + \frac{1}{C_1} & M m^2 \\ M m^2 & L_2 m^2 + R_2 m + \frac{1}{C_2} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Развертывая детерминант, мы получаем для m уравнение четвертой степени:

$$\begin{aligned} m^4 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) + m^3 \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2} \right) + m^2 \left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} \right) + \\ + m \left(\frac{R_1}{C_2} + \frac{R_2}{C_1} \right) \frac{1}{L_1 L_2} + \frac{1}{L_1 L_2 C_1 C_2} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Когда нет трения, все просто: уравнение — биквадратное, оба его корня m^2 отрицательны, так как

$$1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} > 0, \quad \frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} > 0, \quad \frac{1}{L_1 L_2 C_1 C_2} > 0$$

и, следовательно,

$$m = i\omega,$$

где ω — действительная частота.

При наличии трения все очень усложняется. Решение уравнения четвертой степени — дело очень неприятное. Но сказать кое-что о корнях можно и не решая уравнения. Они — либо действительные, либо комплексные, попарно сопряженные. Если R_1 и R_2 малы, то корнями будут четыре комплексных величины:

$$m_1 = \delta' + i\omega', \quad m_2 = \delta' - i\omega', \quad m_3 = \delta'' + i\omega'', \quad m_4 = \delta'' - i\omega'',$$

так что частотное решение уравнений (7) имеет вид

$$q_1 = \alpha' e^{\gamma' t + i\omega' t}, \quad q_2 = \beta' e^{\delta' t + i\omega' t}.$$

Таким образом, если есть малое трение или сопротивление, то общее решение состоит из суммы двух колебаний с частотами ω' и ω'' , с возрастающими или затухающими (смотря по знаку δ' и δ'') амплитудами. Весь вопрос в том, чтобы найти δ и ω . Для этого нужно решить уравнение (11). Найдя δ и ω , мы сможем из уравнений (9) определить α и β . Это нам даст величины

$$\frac{\beta}{\alpha} = k.$$

Здесь есть очень существенное отличие от случая отсутствия затухания. Там отношение k было действительной величиной, т. е. фаза нормального колебания в первой и второй координате была всегда одна и та же. Теперь отношение получается комплексным. Это означает, что есть сдвиг фаз между координатами.

Таким образом, в случае системы с трением или сопротивлением характерным является

- 1) затухание колебаний,
- 2) сдвиг фаз между колебаниями каждой из частот в обеих координатах.

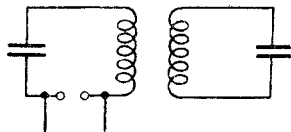


Рис. 114.

Было время, когда вопрос о затухающих колебаниях в системах с двумя степенями свободы стоял очень остро. В передатчиках использовали тогда собственные колебания связанных систем (рис. 114). Второй контур соответствует антенне. Когда искровой промежуток пробивается, контуры начинают колебаться, происходят затухающие колебания с двумя частотами. Важно было рассчитать, как зависят эти колебания от параметров контуров. Пользуясь тем, что сопротивления малы, находили приближенное решение. Теперь затухающими колебаниями почти не пользуются, и эти проблемы в значительной степени утратили интерес.

Я хотел бы обратить ваше внимание на то, как удается иногда обходить решение уравнений (ряд опытов приводит к вопросам, на которые можно ответить, не решая уравнений).

Часто важно знать интегральный эффект в первом или во втором контуре, например, какая рассеялась энергия

$$\int_0^{\infty} R i^2 dt.$$

Можно найти этот интеграл, не решая уравнений. На этом примере мы увидим, в чем состоит метод.

Пусть, например, в начале ($t=0$) заряжен только первый контур и начальные условия таковы:

$$q_1 = q_{10}, \quad q_2 = 0, \quad i_1 \equiv \dot{q}_1 = 0, \quad i_2 \equiv \dot{q}_2 = 0. \quad (12)$$

Умножим первое уравнение (7) на $i_1 = \dot{q}_1$, второе — на $i_2 = \dot{q}_2$ и сложим, а затем проинтегрируем по t от 0 до ∞ . Учитывая начальные условия (12), мы получаем:

$$\int_0^{\infty} R_1 i_1^2 dt + \int_0^{\infty} R_2 i_2^2 dt = \frac{q_{10}^2}{2C_1}.$$

Физический смысл здесь ясен: первоначально сообщенная энергия равна потребленной энергии. Интерес представляет применение этого метода к электродинамометру¹. Если по обмоткам пропускаются токи i_1 и i_2 , то вращательный момент пропорционален величине

$$\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt.$$

Важно знать, при каких условиях этот момент будет равен нулю. Это будет, оказывается, при любых R_1 и R_2 , если

$$L_1 C_1 = L_2 C_2.$$

Этот результат далеко не тривиален.

Ряд подобных вопросов удастся решить именно таким способом. Очень часто при рассмотрении затухающих колебаний приходится пользоваться приближенными методами. Метод, о котором сейчас шла речь, является не приближенным, а точным.

Затухающие колебания отжили свой век в радиотехнике, но жаль забыть некоторые замечательные проблемы, на решение которых было затрачено много остроумия.

В самом начале в передатчиках применялся простой контур (рис. 115). Это очень невыгодно. Передатчик должен решать две задачи: первая — генерация, вторая — излучение. Их нерационально решать в одном контуре. Поэтому были введены системы с двумя

¹ [Ср. том I, стр. 173, а также 12-ю лекцию.]

степенями свободы (в одном из контуров можно создать большую емкость и накопить много энергии).

Энергия перекачивается из одного контура в другой, возникают два колебания с разными частотами. При приеме на резонанс это нежелательно. Требование техники состояло в том, чтобы избежать в таком передатчике „двуволнистости“. Но она органически связана с наличием двух степеней свободы. Ф. Браун предложил остроумный метод. Его идея заключалась вот в чем: надо убрать первый контур в тот момент, когда вся энергия перекачивается во второй. Но как это сделать? Много труда было затрачено на решение этой задачи. М. Вину удалось найти новое физическое явление, решившее вопрос.

Вин создал очень малый разрядный промежуток, примерно в 0,1 мм. Когда в нем наступает пробой, он становится проводником. Но можно подобрать такие условия, при которых разрядный промежуток теряет свою проводимость, если ток становится очень слабым. Это достигается охлаждением. Тогда первый контур размыкается сам собой, автоматически, как только амплитуда его колебаний становится очень малой, и обратной перекачки энергии не происходит.

При этом среди радиоспециалистов возникли первые разговоры о проводниках, не подчиняющихся закону Ома. Уже здесь стало видно, насколько нелинейные системы — системы, не подчиняющиеся закону Ома, — существенны для радиотехники.

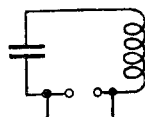


Рис. 115.

ДВАДЦАТЬ ВОСЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(6/IV 1931 г.)

Затухающие колебания системы с двумя степенями свободы. Оптические применения теории связанных колебаний. Примеры систем с большим числом степеней свободы. Самовозбуждение систем с произвольным числом степеней свободы; условия Раута—Гурвица. Случай кратных корней; ошибка Лагранжа.

Введем новые обозначения, которые нам понадобятся для систем с n степенями свободы. Будем обозначать координаты буквой q с индексом наверху, а нормальные колебания, как прежде, — индексом внизу.

степенями свободы (в одном из контуров можно создать большую емкость и накопить много энергии).

Энергия перекачивается из одного контура в другой, возникают два колебания с разными частотами. При приеме на резонанс это нежелательно. Требование техники состояло в том, чтобы избежать в таком передатчике „двуволнистости“. Но она органически связана с наличием двух степеней свободы. Ф. Браун предложил остроумный метод. Его идея заключалась вот в чем: надо убрать первый контур в тот момент, когда вся энергия перекачивается во второй. Но как это сделать? Много труда было затрачено на решение этой задачи. М. Вину удалось найти новое физическое явление, решившее вопрос.

Вин создал очень малый разрядный промежуток, примерно в 0,1 мм. Когда в нем наступает пробой, он становится проводником. Но можно подобрать такие условия, при которых разрядный промежуток теряет свою проводимость, если ток становится очень слабым. Это достигается охлаждением. Тогда первый контур размыкается сам собой, автоматически, как только амплитуда его колебаний становится очень малой, и обратной перекачки энергии не происходит.

При этом среди радиоспециалистов возникли первые разговоры о проводниках, не подчиняющихся закону Ома. Уже здесь стало видно, насколько нелинейные системы — системы, не подчиняющиеся закону Ома, — существенны для радиотехники.

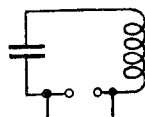


Рис. 115.

ДВАДЦАТЬ ВОСЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(6/IV 1931 г.)

Затухающие колебания системы с двумя степенями свободы. Оптические применения теории связанных колебаний. Примеры систем с большим числом степеней свободы. Самовозбуждение систем с произвольным числом степеней свободы; условия Раута—Гурвица. Случай кратных корней; ошибка Лагранжа.

Введем новые обозначения, которые нам понадобятся для систем с n степенями свободы. Будем обозначать координаты буквой q с индексом наверху, а нормальные колебания, как прежде, — индексом внизу.

Общее решение уравнений линейной системы с двумя степенями свободы с учетом затухания мы запишем теперь в таком виде:

$$q^{(1)} = R_1^{(1)} C_1 e^{-\delta_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1^{(1)} + \psi_1) + R_2^{(1)} C_2 e^{-\delta_2 t} \cos(\omega_2 t + \varphi_2^{(1)} + \psi_2);$$

$$q^{(2)} = R_1^{(2)} C_1 e^{-\delta_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1^{(2)} + \psi_1) + R_2^{(2)} C_2 e^{-\delta_2 t} \cos(\omega_2 t + \varphi_2^{(2)} + \psi_2).$$

Структура самой системы задает частоты и затухания колебаний, а также коэффициенты распределения амплитуд $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ (они написаны теперь в нормировке, отличной от прежней) и сдвиги фаз $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ между координатами. Величины C_1 , C_2 , ψ_1 , ψ_2 — произвольные постоянные, определяемые начальными условиями.

Существенно новое по сравнению с системой без затухания состоит здесь в том, что система задает сдвиги фаз между координатами.

Двадцать лет тому назад, до электронных ламп, когда приходилось работать с затухающими колебаниями, имело смысл подробно рассказывать о приближенных способах вычисления частот и затуханий в системе с двумя степенями свободы. Теперь это не имеет смысла, но несколько слов все же следует сказать.

Пусть у нас два индуктивно связанных контура со слабым затуханием. Частоты можно рассчитывать так, как будто нет затухания, так как оно влияет на частоты лишь во втором порядке. Затухание колебаний связанной системы зависит от затухания каждой парциальной системы в отдельности. При слабой связи величины δ_1 и δ_2 близки к тем затуханиям, которые каждый контур имел бы сам по себе. Когда связь сильна, положение несколько другое.

Задача о двух связанных системах имеет очень существенное значение в оптике.

Мы представляем себе, что в каждой молекуле газа находится оптический резонатор с определенной частотой ν . Свечение газа объясняется тем, что резонаторы колеблются с определенной частотой и газ испускает свет этой частоты.

Пусть теперь на газ падает извне световая волна. Под действием этой волны резонаторы приходят в колебания и поглощают энергию. Если период падающей волны и период собственных колебаний не совпадают, резонаторы колеблются слабо и поглощают мало. Если же периоды совпадают, то они колеблются

сильно (резонанс) и поглощают много энергии. В этом заключается смысл закона Кирхгофа.

Преломление объясняется следующим образом. Когда резонатор колеблется под действием падающей волны, то он сам излучает. То, что мы видим, — это тот свет, который прошел сквозь газ, плюс вторичное излучение, которое испустили резонаторы под влиянием падающего света. Если подсчитать результат такого сложения, то как раз получается правильное значение показателя преломления¹.

Как объяснить, что в плотном газе наблюдается расширение спектральных линий, расплывание частоты? Исходя из только что указанных представлений, мы получаем очень простой ответ: когда резонаторы сближены, они образуют связанную систему. Такая система имеет ряд различных нормальных частот. Частоты испускаемого света соответствуют этим нормальным частотам. Таким образом, сюда прямо переносится то, что мы знаем о связанных системах. В настоящее время известно, что модель простого классического резонатора здесь непосредственно неприменима; атом гораздо сложнее. Но все черты резонансной теории, в сущности, сохраняются и в современной теории. Поведение атома под действием внешней силы чрезвычайно близко к тому, что мы знаем из классической модели простого резонатора. Многие основные черты старой интерпретации дисперсии, абсорбции, испускания света сохранились и в новой теории.

Перейдем к системам с n степенями свободы ($n > 2$).

Вал с двумя шкивами² является системой с двумя степенями свободы, но в действительных машинах бывает большее число шкивов. Иногда говорят: зачем рассматривать общий случай n степеней свободы, — он практически не встречается, достаточно рассмотреть 2, 3, 4 степени свободы. Это неправильно. Есть много случаев, когда необходимо рассматривать большое число степеней свободы. Правда, в обычных передатчиках устройства, имеющие больше чем три контура, редко встречаются. Но в фильтрах бывает 5—10 ячеек.

Теория колебаний систем с n степенями свободы интересна, в частности, в связи с вопросами структуры твердых тел и в особенности кристаллов³.

¹ [См. том I, стр. 112 и след.]

² [См. 24-ю лекцию.]

³ [См. 29-ю и 30-ю лекции.]

Рассмотрим систему с n степенями свободы, характеризующуюся тремя квадратичными формами: кинетической энергией, диссипативной функцией и потенциальной энергией:

$$\left. \begin{aligned} 2T &= \sum_{i,k} a_{ik} \dot{q}^{(i)} \dot{q}^{(k)}, \\ 2F &= \sum_{i,k} b_{ik} \dot{q}^{(i)} \dot{q}^{(k)}, \\ 2U &= \sum_{i,k} c_{ik} q^{(i)} q^{(k)}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

причем

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad b_{ik} = b_{ki}, \quad c_{ik} = c_{ki}.$$

Уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{(i)}} \right) + \frac{\partial U}{\partial q^{(i)}} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^{(i)}} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

(без внешних сил) для такой системы имеют вид

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} \ddot{q}^{(k)} + b_{ik} \dot{q}^{(k)} + c_{ik} q^{(k)}) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Требуется решить эту систему дифференциальных уравнений.

Сделав подстановку

$$q^{(k)} = A^{(k)} e^{\lambda t}, \quad (3)$$

мы получаем систему алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} \lambda^2 + b_{ik} \lambda + c_{ik}) A^{(k)} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Неизвестными являются λ и $A^{(k)}$. Система линейна и однородна по отношению к $A^{(k)}$. Она имеет решения, отличные от нуля, только если детерминант

$$\Delta(\lambda) = 0, \quad (5)$$

или более подробно

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11} & \dots & a_{1n}\lambda^2 + b_{1n}\lambda + c_{1n} \\ a_{21}\lambda^2 + b_{21}\lambda + c_{21} & \dots & a_{2n}\lambda^2 + b_{2n}\lambda + c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\lambda^2 + b_{n1}\lambda + c_{n1} & \dots & a_{nn}\lambda^2 + b_{nn}\lambda + c_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. только при определенных λ . Найдя корень детерминанта $\Delta(\lambda)$, мы подставим его в уравнения (4) и найдем затем значения всех $A^{(k)}$.

Уравнение (5) есть уравнение степени $2n$. Оно имеет $2n$ корней. Можно удовлетворить уравнениям движения (2), подставив в (4) первый корень уравнения (5) и найдя соответствующие $A^{(k)}$, а также подставив второй корень уравнения (5) и найдя соответствующие $A^{(k)}$, и т. д. Мы получим таким образом $2n$ частных решений системы (2):

$$q_1^{(k)} = A_1^{(k)} e^{\lambda_1 t}, \quad q_2^{(k)} = A_2^{(k)} e^{\lambda_2 t}, \dots, \quad q_{2n}^{(k)} = A_{2n}^{(k)} e^{\lambda_{2n} t} \quad (6)$$

Если отдельные частные решения (6) линейно независимы, то общее решение будет

$$q^{(k)} = \sum_{i=1}^{2n} C_i A_i^{(k)} e^{\lambda_i t} \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

где C_i — произвольные постоянные. (Общее решение системы $2n$ уравнений второго порядка содержит $2n$ независимых произвольных постоянных).

Система имеет n степеней свободы. Начальные условия задаются значениями n координат и n скоростей. В решении (7) можно подобрать C_i так, чтобы удовлетворить любым начальным условиям.

Кинетическая энергия всегда положительна; потенциальная энергия при колебаниях около устойчивого положения равновесия тоже положительна. Если колебания сопряжены с развитием тепла, то диссипативная функция тоже положительна.

Корни уравнения (5) могут быть действительными или комплексными. Так как коэффициенты уравнения (5) действительны, то комплексные корни являются попарно сопряженными. Можно доказать, что в случае, когда все три квадратичные формы (1) дефинитны и положительны, действительные корни отрицательны, а действительные части всех комплексных корней отрицательны или равны нулю.

Действительным корням соответствуют частные решения (3) вида

$$e^{-\delta t} \quad (\delta > 0),$$

т. е. апериодическое стремление координат к нулю.

Пусть уравнение (5) имеет комплексные корни

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\delta + i\omega, \\ \lambda_1^* &= -\delta - i\omega, \quad (\delta > 0).\end{aligned}\quad (8)$$

Если при $\lambda = \lambda_1$ уравнения (4) имеют решения $A^{(k)}$, то при $\lambda = \lambda_1^*$ они имеют решения $A^{(k)*}$. Поэтому частным решением уравнений (2) является действительная функция

$$q^{(k)} = \alpha A^{(k)} e^{(-\delta + i\omega)t} + \alpha^* A^{(k)*} e^{(-\delta - i\omega)t}, \quad (9)$$

где α — произвольная комплексная постоянная.

Пусть

$$\begin{aligned}A^{(k)} &= R^{(k)} e^{i\varphi^{(k)}}, & R^{(k)} &= |A^{(k)}|, \\ \alpha &= C e^{i\psi}, & C &= |\alpha|.\end{aligned}\quad (10)$$

В результате несложных выкладок из (9) и (10) получается

$$q^{(k)} = R^{(k)} C e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi^{(k)} + \psi).$$

Пусть все корни уравнения (5) комплексные. Тогда

$$q^{(k)} = \sum_{j=1}^n R_j^{(k)} C_j e^{-\delta_j t} \cos(\omega_j t + \varphi_j^{(k)} + \psi_j) \quad (11)$$

есть общее решение системы (2), так как оно содержит $2n$ независимых произвольных постоянных C_j , ψ_j ($j=1, 2, \dots, n$). Физический смысл его следующий: изменение каждой координаты есть сумма n колебаний, вообще говоря, затухающих. Абсолютные амплитуды и абсолютные фазы суть произвольные, зависящие от начальных условий, постоянные. Что же касается относительных амплитуд и фаз, то они строго определены самой системой. Часто забывают, что относительные фазы здесь задаются системой.)

То, что я здесь говорил о корнях уравнения (5), изложено в весьма изящной форме у Гельмгольца, в томе его „Теоретической физики“, посвященном акустике¹.

В настоящее время наибольший интерес для нас представляет вопрос совсем другого характера — вопрос о возникновении и самовозбуждении колебаний. Есть системы, для которых мы

¹ [H. v. Helmholtz. Vorlesungen über theoretische Physik, т. III, § 19 и § 21. Лейпциг, 1898.]

приходим к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, но где отнюдь не сказано, что происходят потери энергии: в этих системах могут быть и отрицательные сопротивления. Для схем, содержащих контуры и лампы, уравнение (5) может иметь положительные корни, а также комплексные корни с положительной действительной частью. Если хотя бы один корень λ положителен или имеет положительную действительную часть, состояние равновесия неустойчиво, система удаляется от него (самовозбуждается).

Поставим вопрос о том, каковы условия устойчивости и неустойчивости равновесия в системе, описываемой системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Это важно, в частности, для нахождения условий самовозбуждения лампового генератора, так как при учете сеточного тока задача уже не сводится на рассмотрение системы с одной степенью свободы¹.

Заметим, что положительная дефинитность функции F — достаточное, но не необходимое условие устойчивого равновесия системы, описываемой уравнениями (2).

Пусть дана система m линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. К такой системе можно привести нашу систему из линейных уравнений второго порядка, причем $m = 2n$, где n — число степеней свободы. Решая ее подстановкой (3), мы придем к детерминантному уравнению m -ой степени, которое мы запишем теперь так:

$$a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m = 0. \quad (12)$$

Требуется указать необходимые и достаточные условия того, чтобы все корни этого уравнения имели отрицательные действительные части (случай, когда действительная часть какого-нибудь корня равна нулю, мы не рассматриваем). Такой критерий существует. Он был дан сначала Раутом, а затем — в особо изящной форме — Гурвицем. Я приведу его без доказательства. Строгое доказательство имеется в ряде книг. Оно довольно длинное, хотя и значительно упрощено по сравнению с первоначальным.

Пусть

$$a_0 > 0.$$

¹ [См. 13-ю и 14-ю лекции.]

Это условие не нарушает общности, так как при $a_0 < 0$ мы можем умножить уравнение (12) на -1 . Напишем детерминанты:

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots \quad (13)$$

$$D_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2m-1} & \dots & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Элементы детерминантов с индексами, превышающими m , здесь надо полагать равными нулю (они вводятся для удобства записи и легкого запоминания).

Необходимое и достаточное условие того, что все корни уравнения (12) имеют отрицательные действительные части (сюда входят и действительные отрицательные корни), состоит в том, чтобы все эти детерминанты были положительны:

$$D_j > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (14)$$

При разворачивании детерминантов все сильно упрощается вследствие того, что многие элементы равны нулю.

Пусть, например, $m = 3$. Условия (13) принимают вид

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \quad a_3 > 0.$$

В случае n степеней свободы характеристическое уравнение порядка $m = 2n$. Какому же физическому случаю соответствует $m = 3$? Случаю двух степеней свободы, из которых одна — вырожденная. Такой случай мы встречаем в простейшем генераторе (рис. 43), когда принимаем во внимание сеточный ток. Здесь можно говорить, что число степеней свободы равно полутора.

Если мы хотим получить самовозбуждение, то надо нарушить хотя бы одно из условий (13). Если мы хотим иметь усилитель, то ни одно из них не должно быть нарушено. Условия (13) используются также при исследовании вопросов устойчивости регуляторов. В сущности, там имеет место то же самое, что и в электри-

ческих усилителях. В настоящее время знание условий устойчивости (13) совершенно необходимо. Они завоевали огромное место в технических расчетах.

Вернемся к системе без затухания. Разберем вопрос, имеющий интересную историю, который часто ставит начинающих в тупик. Его разъяснение имеет серьезное педагогическое значение. В общем решении

$$q^{(k)} = \sum_{j=1}^n C_j A_j^{(k)} \cos(\omega_j t + \varphi_j) \quad (15)$$

уравнений

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} \ddot{q}^{(k)} + c_{ik} q^{(k)}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

имеется $2n$ произвольных постоянных. Они определяются из уравнений

$$\sum_{k=1}^n (-\omega^2 a_{ik} + c_{ik}) A^{(k)} = 0. \quad (17)$$

Пусть детерминантное уравнение для ω^2 имеет равные корни; например

$$\omega_1 = \omega_2.$$

Тогда

$$C_1 A_1^{(k)} \cos \omega_1 t + C_2 A_2^{(k)} \cos \omega_2 t = (C_1 + C_2) A_1^{(k)} \cos \omega_1 t.$$

Эта уже не сумма двух независимых решений. C_1 и C_2 теперь не независимые произвольные постоянные интегрирования. Если два корня равны, то теряется одна постоянная интегрирования, а это значит, что (15) не есть общее решение. Каково же теперь общее решение? На этот вопрос Лагранж дал следующий ответ: в случае, когда имеется два равных корня $\omega_1 = \omega_2$, уравнения (16) имеют еще частное решение вида

$$t \cos \omega_1 t;$$

если имеется три равных корня $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$, система (16) имеет решение, содержащее член с множителем t^2 , и т. д. При этом Лагранж сказал примерно следующее: так как этот вопрос нас не очень интересует, то мы не будем в него углубляться.

На то, что утверждение Лагранжа ошибочно, указал Вейерштрасс. Дело заключается вот в чем. В случае кратных корней

характеристического уравнения система вида (16) имеет „обычно“ решение с множителями t , t^2 и т. д. Но мы имеем дело с *особым* случаем системы линейных дифференциальных уравнений: вследствие того, что система (16) происходит от дифференцирования квадратичных форм, она обладает определенными свойствами симметрии ($a_{ik} = a_{ki}$, $c_{ik} = c_{ki}$). В этом особом случае система дифференциальных уравнений имеет *и при наличии кратных корней* уравнения для ω^2 только решение вида $\cos \omega t$.

Но как же в таком случае получить при наличии кратных корней частные решения в достаточном числе для построения общего решения? Ответ здесь такой.

В случае простого корня ω_1 , если выбрана одна из амплитуд $A_j^{(k)}$, скажем $A_1^{(k)}$, то все остальные $A^{(k)}$ этим вполне определены. Но система линейных однородных уравнений, детерминант которой равен нулю, однозначно определяет отношения неизвестных не всегда, а только если не все миноры этого детерминанта равны нулю. Поясним это на примере.

Рассмотрим систему ($n=3$)

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0.$$

Пусть детерминант системы равен нулю. Если не все миноры равны нулю, то третье уравнение есть следствие первых двух и первые два уравнения однозначно определяют отношения x/z , y/z . Если же все миноры равны нулю, то второе и третье уравнения являются следствием первого, и, таким образом, мы имеем для трех неизвестных одно уравнение. Можно задать произвольно две из величин x , y , z .

Именно такой случай имеет место для системы (17) при подстановке в нее значения ω^2 , являющегося кратным корнем ее детерминантного уравнения. Здесь можно задать произвольно две амплитуды, скажем $A_1^{(1)}$ и $A_1^{(2)}$. Благодаря этому получается требуемое число постоянных интегрирования.

ДВАДЦАТЬ ДЕВЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(Апрель 1937 г.)

Системы со многими степенями свободы, кратные корни (повторение). Использование симметрии для отыскания формы и частоты колебаний. Введение в теорию кристаллических решеток. Квантовая теория теплотемкости кристаллов. Работа Эйнштейна. Приближенный прием Дебая. Решение дискретной задачи Борном и Карманом. Одномерная модель кристалла, состоящего из двух сортов атомов. Дебаевский и борновский спектры.

Повторим сначала несколько общих замечаний, относящихся к системам с n степенями свободы. Мы имели:

$$\sum_{k=1}^n (-\omega^2 a_{ik} + c_{ik}) A^{(k)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Эти n линейных однородных уравнений для $A^{(k)}$ определяют собственные колебания: собственные частоты и типы колебаний (относительное распределение амплитуд для всех координат). Уравнения (1) имеют не тривиальные решения только тогда, когда детерминант

$$|-\omega^2 a_{ik} + c_{ik}| = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) для ω^2 имеет n корней (n собственных частот). Если все корни различны, то каждой частоте соответствуют вполне определенные отношения амплитуд $A^{(k)}$. Амплитуды определяются в этом случае системой с точностью до произвольного постоянного множителя.

Но может быть и так, что уравнение (2) имеет равные корни. Вообще говоря, в этом случае постоянных $A^{(k)}$ не хватает для построения общего решения той системы дифференциальных уравнений, из которых получилась система (1). Но для интересующих нас систем, если детерминант имеет двойной корень, то этот корень обращает в нуль также миноры $(n-1)$ -го порядка. Это значит, что независимых соотношений для $A^{(k)}$ имеется не $n-1$, а только $n-2$. Следовательно, отношения амплитуд не определены однозначно. При кратном корне получается произвол, „степень“ которого равна кратности корня.

Умножим каждое из уравнений (1) на $A^{(i)}$ и просуммируем их; это дает:

$$\omega^2 \sum_{i,k=1}^n a_{ik} A^{(i)} A^{(k)} - \sum_{i,k=1}^n c_{ik} A^{(i)} A^{(k)} = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{U(A^{(i)}, A^{(k)})}{T(A^{(i)}, A^{(k)})}. \quad (3)$$

Вообще говоря, формула (3) не избавляет от необходимости решать детерминантное уравнение. Для того, чтобы вычислить ω по формуле (3), нужно в нее подставить такие значения $A^{(i)}$ и $A^{(k)}$, которые удовлетворяют уравнениям (1), а обычно их можно узнать, лишь решив уравнение (2).

Но из свойства собственных частот, выражаемого формулой (3), можно сделать много различных выводов. Она позволяет установить некоторые законы, которым удовлетворяет расположение корней детерминантного уравнения. Она дает качественные ответы на вопрос о том, как меняются частоты в зависимости от условий задачи (я имею в виду теоремы Куранта). Это очень важно, так как решать уравнения n -ой степени чрезвычайно неприятно.

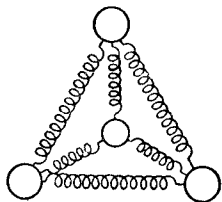


Рис. 116.

Теоремы Куранта хорошо изложены¹. Те вещи, о которых будет идти речь дальше, менее доступны: они разбросаны по разным местам.

Иногда удастся найти распределение амплитуд сразу, т. е. не решая уравнения (2). Тогда с помощью (3) можно очень просто определить частоты. Поясним это на примере (рис. 116). Эта модель не совсем выдумана. Примерно так сейчас представляют себе ячейку решетки кальцита CO_3 . Высокая степень симметрии настолько облегчает здесь решение задачи, что можно получить ответ без всяких вычислений.

Если уравнение (2) имеет корень n -ой кратности, т. е. существует *единственная* частота, этот корень обращает в нуль миноры всех порядков, до элементов детерминанта включительно. Из того, что при некотором значении ω все элементы детерминанта обращаются в нуль, следует, что

$$\frac{a_{ik}}{c_{ik}} = \text{const.}$$

¹ [Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики, гл. 1, § 4. 3-е изд., М., 1951.]

для всех значений i и k . Такое соотношение между кинетической и потенциальной энергией возможно, если

- 1) совсем нет связей между координатами,
- 2) имеются как инерционные, так и упругие связи.

Следовательно, если имеются связи, но только одного типа, то не может быть корня n -ой кратности.

Модель, изображенная на рис. 116, имеет три колебательные степени свободы. Тройной корень невозможен, так как имеется только один тип связи. Следовательно, имеется по крайней мере один простой корень.

Пусть при некотором нормальном колебании

$$\frac{A_1}{A_2} = k_2, \quad \frac{A_1}{A_3} = k_3. \quad (4)$$

В силу симметрии системы возможно нормальное колебание той же частоты, при котором

$$\frac{A_2}{A_1} = k_2, \quad (5)$$

и нормальное колебание той же частоты, при котором

$$\frac{A_3}{A_1} = k_3. \quad (6)$$

Для *простого* корня отношение амплитуд однозначно определено, и, следовательно, распределения (4) — (6) должны совпадать. Это возможно, только если $k_2 = k_3 = 1$. Итак, для простого корня обязательно

$$A_1 = A_2 = A_3.$$

Так как согласно (3) отношения амплитуд однозначно определяют частоту, имеется *только один* простой корень. Следовательно, имеется еще двойной корень.

Какое возможно соотношение между амплитудами в случае двойного корня? Только такое:

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0. \quad (7)$$

Докажем это.

Предположим, что имеет место соотношение

$$kA_1 + A_2 + A_3 = 0.$$

Тогда вследствие симметрии должно иметь место также

$$A_1 + kA_2 + A_3 = 0.$$

Но для двойного корня существует *единственное* линейное соотношение между амплитудами и, следовательно, $k=1$.

Соотношению (7) удовлетворяют, например, значения

$$A_1=0, \quad A_2=-A_3.$$

Подставляя эти значения в уравнение (3), мы найдем частоту.

Совершенно то же самое можно сказать о симметричной системе из трех колебательных контуров (рис. 117).

Рассмотрим теперь принципиально важную группу вопросов, касающихся систем с n степенями свободы:

- 1) динамику кристаллической решетки;
- 2) техническую задачу о фильтрах;
- 3) переход от дискретных к сплошным системам.



Рис. 117.

Начнем с применения общих соображений о системах с n степенями свободы к кристаллическим решеткам. Изложение будет вестись на самых простых примерах.

Мы представляем себе кристалл следующим образом. В узлах решетки находятся атомы. Атомы связаны между собой. Вся система может находиться в устойчивом равновесии. Если сжать кристалл, а затем отпустить, он приходит в колебания. Это — колебания системы с n степенями свободы около устойчивого положения равновесия. В первом приближении система описывается квадратичными формами, т. е. получается задача о колебаниях *линейной* системы с n степенями свободы. Число атомов в кристалле обычных размеров — порядка 10^{24} . Число степеней свободы — того же порядка. Если бы не было далеко идущей симметрии, если бы в кристалле не повторялись одинаковые ячейки, то решить задачу было бы невозможно. Мы можем ее решить только благодаря симметрии.

Если ударить по кристаллу, возникают акустические колебания. Они состоят из n независимых (нормальных) колебаний. Тепловое движение кристалла — это *те же* колебания. Заслуга Дебая состоит в том, что он увидел, что тепловое движение кристалла — это упругие колебания, но только очень быстрые. Они являются суперпозицией собственных (нормальных) колебаний решетки.

Раньше к задаче о колебаниях кристалла подходили так: рассматривали кристаллы как континуум, вводили такие понятия, как плотность и упругие постоянные, и получали для кристалла уравне-

ние в частных производных. Его гораздо легче решить, чем систему, состоящую из очень большого числа обыкновенных дифференциальных уравнений. В действительности кристалл не является сплошным, и поэтому такое „сплошное“ рассмотрение не может дать всего. К тепловым колебаниям так подходить нельзя.

Теория тепловых колебаний кристаллов была поставлена на вычислительную почву в связи с вопросом о теплоемкости твердых тел.

Вначале теория теплоемкости кристаллов строилась так. Каждый атом рассматривался как осциллятор с тремя степенями свободы, т. е. как три осциллятора. Таким образом, в кристалле, содержащем n атомов, имеется $3n$ осцилляторов. Средняя энергия теплового движения каждого осциллятора равна kT (k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура). Поэтому полная средняя энергия теплового движения

$$W = 3nkT.$$

Нельзя себе представлять, что в кристалле имеется $3n$ осцилляторов, колеблющихся с одинаковой частотой. Если осцилляторы связаны, то имеется $3n$ нормальных колебаний *различной* (вообще говоря) частоты. На каждое нормальное колебание приходится по классической статистике одинаковая энергия kT , независимо от его частоты. Акустические колебания — сравнительно медленные; частоты тепловых колебаний очень велики (в них ν доходит до 10^{13}). Но раньше, в классической статистике, не нужно было интересоваться частотами, ибо, повторяю, в ней энергия, приходящаяся на каждое колебание, не зависит от частоты.

Опыт не подтверждает той зависимости энергии от температуры, которую дает классическая теория.

Эйнштейн первый указал на то, что здесь нужно *отбросить* классику, что резонатор, в согласии с теорией Планка, имеет среднюю энергию, равную не kT , а

$$w = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

(h — постоянная Планка). Эта величина очень сильно зависит от ν . Поэтому для того, чтобы вычислить теплоемкость по квантовой теории, необходимо знать частоты колебаний кристалла.

Эйнштейн решил задачу просто. Он подобрал разумным образом некоторую среднюю частоту ν . Основные противоречия были

устранены, но полученная таким образом формула не очень хорошо совпадала с опытом. Теория была явно недостаточна.

Мысль о том, что нужно перейти к планковской теории, была огромным шагом вперед. Но для того, чтобы подсчитать теплоемкость, нужно учесть, что в кристалле имеются колебания с совершенно различными частотами. Как рассчитать эти частоты? За эту задачу взялся Дебай в 1912 г. Он сделал явно неправильную, но гениальную вещь.

Будем рассматривать кристалл как сплошное тело. Будем говорить для простоты о стержне в одном измерении (не о цепочке из n частиц, а о макроскопическом стержне). Вычислим частоты его собственных колебаний.

Пусть l — длина стержня, ρ — плотность, E — модуль Юнга. Тогда скорость распространения звука

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

длины волн

$$\lambda_s = \frac{2l}{s},$$

где s — целые числа, и для частот мы получаем:

$$\omega_s = 2\pi \frac{v}{\lambda_s} = \frac{s\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (8)$$

Вот что дает теория сплошных систем.

Но колебания с малым s , т. е. длинные акустические волны в кристалле, — заведомо такие, которые дает теория сплошных систем. Забудем, что кристалл имеет структуру, и напишем для него формулу (8). Сплошной стержень имеет бесчисленное множество таких собственных колебаний ($s=1, 2, \dots, \infty$). Если рассчитать теплоемкость по такой модели, получается очень плохой результат.

То, что сделал Дебай, сводится к следующему. Кристалл имеет $N=3n$ колебаний. Вычислим частоты по формуле для сплошной среды, но возьмем только первые $3n$ частот, первые $3n$ колебаний и *отбросим остальные*. Это смело и заведомо неправильно, но это исключительно сильный прием. Дебай так сделал и сумел разрубить узел.

Теория Дебая была первой серьезной теорией теплоемкости кристалла. Дебай получил для ряда тел замечательно хороший

результат. Но, как мы скоро увидим, есть такие случаи, когда теория Дебая не дает совпадения с опытом.

За проблему теплостойкости кристаллов взялись также Борн и Карман. Они решили взять быка за рога, просчитать собственные колебания кристаллической решетки, найти частоты и типы колебаний, рассматривая дискретную решетку как таковую, не сводя ее к континууму.

Решение этой задачи можно довести до конца в силу высокой симметрии. При этом получаются принципиальные отличия от



Рис. 118.

сплошной среды — качественное своеобразие, обуславливающее ряд явлений.

Рассмотрим простую одномерную модель (рис. 118) — цепочку частиц (атомов), связанных одинаковыми пружинами. Если атомы одинаковы, то результат Дебая довольно хорошо подходит; различие между дискретной системой и континуумом скрыто. Но предположим, что в цепочке чередуются два сорта атомов, имеющих различные массы (рис. 119). Этого достаточно для того, чтобы выяснить все принципиальные, основные вопросы, связанные с различием между дискретной системой и континуумом.

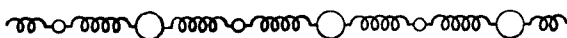


Рис. 119.

Пусть все четные массы равны M , все нечетные — m . Пусть α — постоянная пружины (при удлинении ее на Δl возникает сила $-\alpha \Delta l$). Пусть расстояние между соседними атомами равно d .

Для того, чтобы сравнивать результаты, которые мы получим для цепочки, с тем, что дает теория сплошного стержня, нужно будет принять во внимание следующее.

Пусть E — модуль Юнга цепочки. Тогда, очевидно,

$$\alpha = \frac{E}{d}. \quad (9)$$

Пусть далее ρ — масса цепочки на единицу длины (линейная плотность). Масса всей цепочки (длина ее l) равна

$$n(M + m) = \rho l \quad (10)$$

(n — число частиц каждого сорта). С другой стороны,

$$l = 2nd. \quad (11)$$

Мы считаем здесь n настолько большим, что можно пренебречь отличием между $2n$ и $2n+1$ (следует заметить, что такое пренебрежение даже при очень большом n допустимо не во всех вопросах). Из соотношений (10) и (11) следует, что

$$\varphi = \frac{n(M+m)}{l} = \frac{M+m}{d}. \quad (12)$$

Пусть $x^{(k)}$ — координаты атомов первого сорта, $y^{(j)}$ — координаты атомов второго сорта. Нумеровать атомы мы будем подряд, так что k будет пробегать все нечетные, а j — все четные значения. Концы цепочки будем считать закрепленными. Мы могли бы считать, что k принимает значения $1, 3, \dots, 2n-1$, а j — значения $2, 4, \dots, 2n$; но уравнения будут гораздо более симметричны, если координаты закрепленных точек мы назовем $y^{(0)}$ и $x^{(2n+1)}$. У нас будет при этом уже не $2n$, а $2n+2$ частиц и столько же координат. Так как концы закреплены, мы потребуем, чтобы было

$$y^{(0)} = 0, \quad x^{(2n+1)} = 0. \quad (13)$$

Потенциальная энергия U состоит из энергий отдельных пружин

$$2U = \alpha [(y^{(0)} - x^{(1)})^2 + (x^{(1)} - y^{(2)})^2 + (y^{(2)} - x^{(3)})^2 + \dots]. \quad (14)$$

Для кинетической энергии T имеем:

$$2T = m[(\dot{x}^{(1)})^2 + (\dot{x}^{(3)})^2 + \dots] + M[(\dot{y}^{(2)})^2 + (\dot{y}^{(4)})^2 + \dots]. \quad (15)$$

Уравнения движения могут быть получены с помощью выражений (14) и (15) (как уравнения Лагранжа). Они могут быть получены также с помощью элементарных механических соображений, учитывающих силы.

Для k -го атома массы m имеем:

$$m\ddot{x}^{(k)} + \alpha \{2x^{(k)} - [y^{(k-1)} + y^{(k+1)}]\} = 0 \quad (k=1, 3, \dots, 2n+1). \quad (16)$$

Для j -го атома массы M имеем:

$$M\ddot{y}^{(j)} + \alpha \{2y^{(j)} - [x^{(j-1)} + x^{(j+1)}]\} = 0 \quad (j=0, 2, 4, \dots, 2n). \quad (17)$$

Всех уравнений движения $2n+2$.

Казалось бы, особенных успехов мы не достигли: нужно решить систему из 10^{24} уравнений! Но здесь будет видна мощь применения индексов. Ничтоже сумняшеся, полагаем:

$$x^{(k)} = A^{(k)} \cos(\omega t + \varphi),$$

$$y^{(j)} = B^{(j)} \cos(\omega t + \varphi)$$

(так мы делаем всегда, когда ищем решение уравнений дискретной линейной консервативной системы со многими степенями свободы). Мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} (2\alpha - m\omega^2) A^{(k)} - \alpha [B^{(k-1)} + B^{(k+1)}] &= 0; \\ -\alpha [A^{(j-1)} + A^{(j+1)}] + (2\alpha - M\omega^2) B^{(j)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Мы превратили, таким образом, $2n + 2$ дифференциальных уравнений во столько же алгебраических уравнений для $A^{(k)}$ и $B^{(j)}$. Но можно свести определение $2n + 2$ величин $A^{(1)}, A^{(3)}, \dots, B^{(2)}, B^{(4)}, \dots$ к определению всего лишь *двух* величин. Это делается с помощью очень красивого приема (не знаю, как до него дошли). Полагаем:

$$\left. \begin{aligned} A^{(k)} &= a \sin k\beta; \\ B^{(j)} &= b \sin j\beta. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Можно так распорядиться величинами a , b и β (если мы правильно подберем ω , т. е. частоту), что выражения (19) будут решением системы алгебраических уравнений (18).

Подставляем (19) в (18). Получаем:

$$(2\alpha - m\omega^2) a \sin k\beta - \alpha b [\sin(k-1)\beta + \sin(k+1)\beta] = 0,$$

$$-\alpha a [\sin(j-1)\beta + \sin(j+1)\beta] + (2\alpha - M\omega^2) b \sin j\beta = 0,$$

или

$$\left\{ \begin{aligned} [(2\alpha - m\omega^2) a - 2\alpha \cos \beta \cdot b] \sin k\beta &= 0, \\ [-2\alpha \cos \beta \cdot a + (2\alpha - M\omega^2) b] \sin j\beta &= 0. \end{aligned} \right. \quad (20)$$

Наша подстановка (19) будет удовлетворять уравнениям (20) при любых k и j , если

$$\left\{ \begin{aligned} (2\alpha - m\omega^2) a - 2\alpha \cos \beta \cdot b &= 0, \\ -2\alpha \cos \beta \cdot a + (2\alpha - M\omega^2) b &= 0. \end{aligned} \right. \quad (21)$$

Мы сделали огромный шаг вперед. Нужно было решить систему алгебраических уравнений (18) с очень большим числом неизвест-

ных. Мы ищем их в виде (19). [Здесь зависимость неизвестного от его номера j или k заключена под знаком синуса. При подстановке (19) в (18) j и k выпадают, и мы получаем, вместо $2n+2$ уравнений, два уравнения (21). Это оказалось возможным потому, что все уравнения (16) и все уравнения (17) имеют одинаковую структуру.

Но прежде, чем решать уравнения (21), нужно определить величину β . Вспомним для этого, что концы цепочки закреплены. Это выражается условиями (13). Подставляя в (19) $j=0$, мы видим, что первое из этих условий уже выполнено. Остается подобрать β так, чтобы было выполнено также второе условие (13). Для этого должны быть

$$(2n+1)\beta = s\pi,$$

где s — произвольное целое число, или

$$\beta = \frac{s\pi}{2n+1}. \quad (22)$$

Получается бесчисленное множество возможных значений β . Легко видеть, что значениям β , получающимся при $s=1, 2, \dots, n$, соответствуют различные решения уравнений (21), а значениям, получающимся при $s=n+1, n+2, \dots$, соответствуют решения уравнений (21), повторяющие те, которые получаются при $s=1, 2, \dots, n^1$.

Подставляя значения β , соответствующие $s=1, 2, \dots, n$, в уравнения (21), мы будем каждый раз получать для определения частот детерминантное уравнение

$$\begin{vmatrix} 2\alpha - m\omega^2 & -2\alpha \cos \beta \\ -2\alpha \cos \beta & 2\alpha - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (23)$$

Это — квадратное уравнение относительно ω^2 . Для каждого заданного β оно дает два значения ω^2 , т. е. две различные частоты. Мы получаем всего $2n$ различных частот. Так как число степеней свободы равно $2n$, больше требовать ничего нельзя, — мы нашли все частоты.

¹ [Подробнее см. 30-ю лекцию.]

Обозначим через $x_s^{(k)}$ и $y_s^{(j)}$ смещения k -ой и j -ой точки при определенном s . Тогда

$$x_s^{(k)} = a_s \sin \frac{ks\pi}{2n+1} \cos(\omega_s t + \varphi_s),$$

$$y_s^{(j)} = b_s \sin \frac{js\pi}{2n+1} \cos(\omega_s t + \varphi_s).$$

Для каждого s имеется две частоты ω_{s1} и ω_{s2} и соответственно два значения отношения b/a . Для того, чтобы найти эти значения, нужно решить систему уравнений (21) при $\omega = \omega_{s1}$ и $\omega = \omega_{s2}$. Для амплитуд имеем:

$$A_s^{(k)} = a_s \sin \frac{ks\pi}{2n+1}, \quad B_s^{(j)} = b_s \sin \frac{js\pi}{2n+1}.$$

Рассматриваемые колебания продольны, но представим себе, что мы отложили смещения, как ординаты, против точек, где расположены массы. Для данного s все массы каждого сорта располагаются в любой момент времени по синусоиде. Длина волны синусоиды определяется числом s . Например, для $s=1$ на цепочке укладывается полволны.

В случае континуума точки также располагаются по синусоидам. Но между полученной здесь картиной и тем, что дает „непрерывная“ теория, есть принципиальная разница. В случае континуума каждой длине волны соответствует одна частота. В нашей дискретной системе для каждого s , для каждой длины волны имеется два нормальных колебания — две частоты и два распределения амплитуд. Это — замечательное обстоятельство.

ТРИДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(6/V 1931 г.)

Одномерная модель кристалла, состоящего из двух сортов атомов (продолжение). Подробное исследование типов колебаний и строения спектра. Акустические и внутримолекулярные колебания. Принципиальное отличие от теории, не учитывающей атомистическую структуру. Переход к случаю, когда все атомы имеют одинаковую массу. Задача об электрических фильтрах.

В прошлой лекции мы начали разбирать одномерную модель кристаллической решетки, состоящей из чередующихся частиц (атомов) двух сортов. Конечно, реальная решетка — трехмерна, но основные, характерные черты можно увидеть и на одномерной

Обозначим через $x_s^{(k)}$ и $y_s^{(j)}$ смещения k -ой и j -ой точки при определенном s . Тогда

$$x_s^{(k)} = a_s \sin \frac{ks\pi}{2n+1} \cos(\omega_s t + \varphi_s),$$

$$y_s^{(j)} = b_s \sin \frac{js\pi}{2n+1} \cos(\omega_s t + \varphi_s).$$

Для каждого s имеется две частоты ω_{s1} и ω_{s2} и соответственно два значения отношения b/a . Для того, чтобы найти эти значения, нужно решить систему уравнений (21) при $\omega = \omega_{s1}$ и $\omega = \omega_{s2}$. Для амплитуд имеем:

$$A_s^{(k)} = a_s \sin \frac{ks\pi}{2n+1}, \quad B_s^{(j)} = b_s \sin \frac{js\pi}{2n+1}.$$

Рассматриваемые колебания продольны, но представим себе, что мы отложили смещения, как ординаты, против точек, где расположены массы. Для данного s все массы каждого сорта располагаются в любой момент времени по синусоиде. Длина волны синусоиды определяется числом s . Например, для $s=1$ на цепочке укладывается полволны.

В случае континуума точки также располагаются по синусоидам. Но между полученной здесь картиной и тем, что дает „непрерывная“ теория, есть принципиальная разница. В случае континуума каждой длине волны соответствует одна частота. В нашей дискретной системе для каждого s , для каждой длины волны имеется два нормальных колебания — две частоты и два распределения амплитуд. Это — замечательное обстоятельство.

ТРИДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(6/V 1931 г.)

Одномерная модель кристалла, состоящего из двух сортов атомов (продолжение). Подробное исследование типов колебаний и строения спектра. Акустические и внутримолекулярные колебания. Принципиальное отличие от теории, не учитывающей атомистическую структуру. Переход к случаю, когда все атомы имеют одинаковую массу. Задача об электрических фильтрах.

В прошлой лекции мы начали разбирать одномерную модель кристаллической решетки, состоящей из чередующихся частиц (атомов) двух сортов. Конечно, реальная решетка — трехмерна, но основные, характерные черты можно увидеть и на одномерной

решетке. (Аналогичная задача — поперечные колебания струны с грузами, рис. 120.)

Мы написали для каждого сорта частиц по уравнению — представителю:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}^{(k)} + \alpha(2x^{(k)} - y^{(k+1)} - y^{(k-1)}) &= 0 \quad (k=1, 3, \dots, 2n-1), \\ M\ddot{y}^{(j)} + \alpha(2y^{(j)} - x^{(j+1)} - x^{(j-1)}) &= 0 \quad (j=0, 2, 4, \dots, 2n), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

всего $2n+2$ уравнений (по числу частиц).

Уравнения (1) имеют один и тот же вид для каждого атома каждого сорта, за исключением первого и последнего уравнений, в которых отсутствуют соответственно члены $y^{(k-1)}$ и $x^{(j+1)}$.

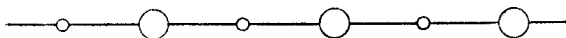


Рис. 120.

Аналогично тому, как это всегда делается при рассмотрении сплошных сред, мы вводим краевые или граничные условия. Для этого мы добавляем две новые координаты $y_{(0)}$ и $x^{(2n+1)}$. Тогда для $x^{(1)}$ и $y^{(2n)}$ получаются такие же уравнения, что для остальных $x^{(k)}$ и $y^{(j)}$, но мы требуем дополнительно — и в этом состоят краевые условия, — чтобы было

$$y^{(0)} = 0, \quad x^{(2n+1)} = 0. \quad (2)$$

Итак, мы добились того, что все уравнения (1) для $k=1, 3, \dots, 2n-1$, а также для $j=0, 2, 4, \dots, 2n$ тождественны, но зато ввели краевые условия.

Мы взяли специальный случай, когда концы (крайние частицы слева и справа) закреплены. Закрепить концы реального кристалла не так просто. Физический смысл закрепленных концов — заделка концов кристалла в иную, намного более жесткую среду. Можно было бы взять другие специальные случаи граничных условий, например случай свободных концов. Можно считать приближенно, что концы свободны, если кристалл намного жестче, чем ограничивающая его среда.

Необходимо заметить, что главные интересующие нас здесь свойства колебаний кристаллической решетки *не зависят* от граничных условий.

Решение задачи (1), (2) лобовым методом, приводящее к секулярному уравнению $2n$ -го порядка, очень громоздко. Мы применили особый прием, сделав для амплитуд $A^{(k)}$ и $B^{(j)}$ координат $x^{(k)}$ и $y^{(j)}$ подстановку

$$A^{(k)} = a \sin k\beta, \quad B^{(j)} = b \sin j\beta, \quad (3)$$

и получили для a , b и ω уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (2\alpha - m\omega^2)a - 2\alpha \cos \beta \cdot b &= 0; \\ -2\alpha \cos \beta \cdot a + (2\alpha - M\omega^2)b &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Если мы найдем такие a , b и ω , которые удовлетворяют этим двум уравнениям, то подстановка (3) удовлетворит всем $2n$ уравнениям (1) при любом β . Остается удовлетворить граничным условиям (2).

Мы могли бы заменить в (3) синусы на косинусы. Это также привело бы к решению уравнений (1), но не позволило бы удовлетворить граничным условиям. Тем, что мы взяли синусы, мы уже удовлетворили первому граничному условию. Для того, чтобы удовлетворить второму, нужно взять для β одно из значений

$$\beta = \frac{s\pi}{2n+1} \quad (s=1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Для каждого s имеется два значения ω_s , определяемые уравнениями (4). Обозначим меньшее из этих значений через ω_{s1} , большее — через ω_{s2} . Для того, чтобы решить задачу до конца, нужно для каждого s вычислить ω_{s1} и ω_{s2} , а затем найти из (4) соответствующие им значения отношения a/b . Но основное свойство этого отношения можно вывести, не проводя вычисления частот ω_{s1} и ω_{s2} . Это свойство состоит в том, что отношение a/b положительно для $\omega = \omega_{s1}$ и отрицательно для $\omega = \omega_{s2}$. Действительно, из уравнений (4) имеем:

$$\frac{a}{b} = \frac{2\alpha \cos \beta}{2\alpha - m\omega^2}. \quad (6)$$

Уравнения (4) имеют такой же вид, как уравнения системы с двумя степенями свободы, причем величины

$$n_1 = \sqrt{\frac{2\alpha}{M}}, \quad n_2 = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \quad (7)$$

играют роль парциальных частот (для любого s). Следовательно, если $M \neq m$, то¹

$$\omega_{s1}^2 < n_1^2 < n_2^2 < \omega_{s2}^2.$$

Перепишем (6) в таком виде:

$$\frac{a}{b} = \frac{2\alpha}{m} \frac{\cos \beta}{n_2^2 - \omega^2}. \quad (9)$$

Подставляя в (9) $\omega = \omega_{s1}$ и $\omega = \omega_{s2}$, принимая во внимание неравенства (8), а также то, что согласно (5) $\cos \beta_s > 0$, получаем:

$$\frac{a_{s1}}{b_{s1}} > 0, \quad \frac{a_{s2}}{b_{s2}} < 0.$$

Таким образом, колебания с частотой ω_{s1} происходят так, что все массы — и большие и малые — смещаются одновременно в *одну*

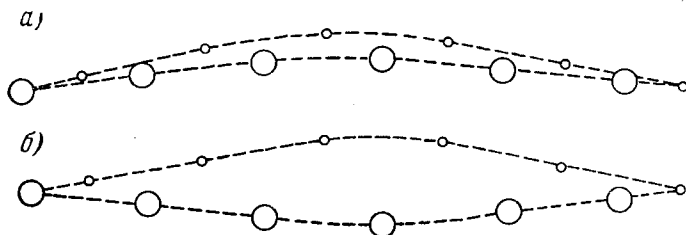


Рис. 121.

сторону, а колебания с частотой ω_{s2} — так, что одновременно смещения больших и малых масс направлены в *разные* стороны.

Для того, чтобы наглядно себе представить картину колебания всей цепочки, отложим амплитуды по оси ординат. Для a_{s1} и b_{s1} мы получим синусоиды, обращенные всюду в одну и ту же сторону (например, для $s=1$ — рис. 121, а). Для a_{s2} и b_{s2} мы получим синусоиды, обращенные всюду в противоположные стороны (для $s=1$ — рис. 121, б).

Расстояние между частицами, совершающими одинаковое движение, мы будем называть длиной волны (оно и соответствует тому, что принято называть длиной волны). Мы можем теперь сказать, что каждой длине волны соответствуют два типа колебаний.

При колебаниях *первого* типа (частота ω_{s1}) синусоиды, изображающие колебания частиц обоих сортов, колеблются синфазно.

¹ [См. 23-ю лекцию.]

При этом частицы одного сорта колеблются немного слабее, частицы другого сорта — немного сильнее. В случае колебаний *второго* типа (частота ω_{s2}) обе синусоиды колеблются в противофазе.

Не следует забывать, что в действительности колебания продольны. Полученная картина означает следующее.

Колебания ω_{s1} . Здесь смещения соседних частиц происходят в одном и том же направлении. При этом меняется количество частиц на единицу длины, т. е. макроскопическая плотность. Таким образом, колебания с частотами ω_{s1} — это *обычные акустические колебания*.

Колебания ω_{s2} . Смещения соседних частиц происходят в противоположных направлениях. При этом типе колебаний *нет* заметного макроскопического изменения плотности. Это — *внутримолекулярные колебания*.

Перейдем к вычислению частот (напомним, что в вопросе о теплостойкости после того, как пришлось отказаться от равномерного распределения энергии по степеням свободы, стало важно знать частоты колебаний кристаллической решетки).

Для того, чтобы найти ω_{s1} и ω_{s2} для определенного s , надо решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 2\alpha - m\omega^2 & -2\alpha \cos \beta_s \\ -2\alpha \cos \beta_s & 2\alpha - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$Mm\omega^4 - 2\alpha(M+m)\omega^2 + 4\alpha^2 \sin^2 \beta_s = 0,$$

т. е. квадратное уравнение для ω^2 , напоминающее секулярное уравнение для линейной консервативной системы с двумя степенями свободы. Решая это уравнение, находим:

$$\omega_s^2 = \alpha \frac{M+m \pm \sqrt{(M+m)^2 - 4Mm \sin^2 \beta_s}}{Mm} \quad (s=1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

(такое простое выражение для частоты получается лишь в случае одномерной решетки. В случае пространственной решетки вычисление частот гораздо сложнее).

Кристалл имеет огромное число частот — порядка 10^{23} . Фактически нам нужно знать не каждую частоту в отдельности, а закономерности в *распределении* частот. Набор частот принято называть спектром. Нам нужно выяснить, каков *спектр* нашей одномерной цепочки. Для этой цели мы найдем более простое

выражение, воспользовавшись тем, что n — очень большое число.

Из формулы (10) видно, что с увеличением s бóльшая частота ω_{s2} уменьшается, а меньшая частота ω_{s1} увеличивается. Таким образом, $s=1$ дает самую низкую и самую высокую частоту, $s=2$ дает две более близкие частоты и т. д.

Рассмотрим очень длинные волны, т. е. очень малые s . Для малых s величины β_s , а следовательно, и $\sin \beta_s$, очень малы. Здесь приближенно

$$\sqrt{(M+m)^2 - 4Mm \sin^2 \beta_s} \approx (M+m) \left[1 - \frac{2Mm}{(M+m)^2} \sin^2 \beta_s \right]. \quad (11)$$

Не трудно видеть, что то же приближение справедливо для любых β_s , если m мало по сравнению с M (в случае очень длинных волн, т. е. достаточно малых s и β_s , выражение (11) приближенно справедливо для любых M и m).

Напишем, используя (11), приближенные выражения для частот. Для второй частоты мы можем в первом приближении отбросить второй член формулы (11). Это приближение годится для длинных волн, а также для любых волн при большой разности масс. Мы получаем на основании (10):

$$\omega_{s1}^2 = \frac{2\alpha \sin^2 \beta_s}{M+m}, \quad \omega_{s2}^2 = \frac{2\alpha (M+m)}{Mm}. \quad (12)$$

Самое существенное в излагаемой теории заключается в том, что при одной и той же длине волны мы имеем две частоты, которые для $M \gg m$ сильно отличаются друг от друга. Колебание с малой частотой — акустическое колебание. Колебание с большой частотой — внутримолекулярное колебание. Это разделение колебаний на два типа специфично для дискретной решетки и совершенно чуждо сплошной системе (вполне понятно, что в сплошной системе нет внутримолекулярных колебаний).

Спектр частот нашей дискретной решетки состоит из двух ветвей: ветви низких частот, которую называют *акустическим* или *дебаевским* спектром, и ветви высоких частот, которую называют *оптическим* (инфракрасным) или *борновским* спектром.

Рассмотрим теперь самые короткие волны, для которых s близко к n . Для них из точной формулы (10) имеем с очень хорошим приближением:

$$\omega_{n1}^2 = \frac{2\alpha}{M}, \quad \omega_{n2}^2 = \frac{2\alpha}{m}. \quad (13)$$

Действительно, при большом n

$$\beta_n = \frac{n\pi}{2n+1} \approx \frac{\pi}{2},$$

откуда $\sin^2 \beta_n = 1$, и, следовательно,

$$\sqrt{(M+m)^2 - 4Mm \sin^2 \beta_n} = M - m.$$

Подставляя это значение в (10), получаем (13).

Нарисуем диаграмму распределения частот, расположив их в порядке возрастания их величины, т. е. введя надлежащую новую нумерацию частот (рис. 122).

Если масштаб выдержан (n очень велико, порядка 10^{24}), то первые частоты (ω_{s1} для малых s) очень малы, так как очень малы величины $\sin \frac{s\pi}{2n+1}$, и практически кривая начинается с нуля. Так как для достаточно малых s с хорошим приближением

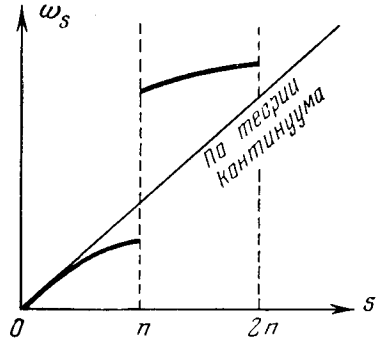


Рис. 122.

$$\omega_{s1} = \sqrt{\frac{2\alpha}{M+m}} \frac{s\pi}{2n+1} = \alpha s \quad (14)$$

(α — постоянная), то вначале кривая не отличима от прямой. Если $M \gg m$, то приближенно

$$\omega_{12} - \omega_{n2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \cdot \frac{m}{M},$$

и вся вторая половина диаграммы лежит в узкой полоске, параллельной оси абсцисс.

То, что при $M \gg m$ в цепочке из двух сортов масс все частоты борновского спектра приблизительно одинаковы, легко видеть и непосредственно. При $M \gg m$ в дебаевском спектре большие массы колеблются и увлекают малые, а в борновском спектре большие массы почти покоятся. Здесь можно считать (приближенно), что n частиц колеблются независимо и, следовательно, с равными частотами. Аналогичное рассмотрение применимо в случае, когда ячейки состоят из трех частиц, одна из которых обладает гораздо большей массой, чем две другие.

Таким образом, спектр состоит из двух ветвей, не соприкасающихся между собой, если $M \neq m$. Одна ветвь начинается практически с нуля. Другая ветвь, соответствующая более высоким частотам, не является простым продолжением первой. Наличие этих двух ветвей — это то основное и замечательное, что характерно для дискретной теории.

Посмотрим теперь:

1) дает ли дискретная теория те результаты, которые правильно отображает теория сплошных сред;

2) что в дискретной теории чуждо обычной теории сплошных сред.

Для макроскопических свойств — модуля Юнга (коэффициента упругости) E и плотности ρ — имеем¹:

$$E = \alpha d, \quad \rho = \frac{M + m}{2d},$$

откуда

$$\frac{E}{\rho} = \frac{2\alpha d^2}{M + m}. \quad (15)$$

Теория сплошных сред утверждает, что звуковые (упругие) колебания распространяются в стержне со скоростью

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (16)$$

Вдоль стержня укладывается целое число полуволен, т. е.

$$s \frac{\lambda_s}{2} = l,$$

причем

$$\omega_s = \frac{2\pi v}{\lambda_s}.$$

Принимая во внимание (16), получаем:

$$\omega_s = \frac{s\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

С другой стороны, формула (14), полученная из дискретной теории, в сочетании с формулой (15) для перехода от микроскопического рассмотрения к макроскопическому для низких частот дает:

$$\omega_s = \sqrt{\frac{2\alpha}{M + m}} \cdot \frac{s\pi}{2n + 1} = \sqrt{\frac{2\alpha d^2}{M + m}} \frac{s\pi}{l} = \frac{s\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

¹ [См. 29-ю лекцию.]

Таким образом, значения начальных частот дебаевского спектра, получающиеся из дискретной теории, совпадают с теми, какие известны из теории континуума. Но *продолжение* акустического спектра, даваемое теорией континуума, неправильно. Теория континуума дает прямую, которая идет выше, чем нужно (рис. 122).

Итак, акустическая ветвь спектра, даваемого дискретной теорией, практически (до определенного числа s) совпадает с тем, что дает „сплошная“ теория. Не удивительно, что во всех акустических вопросах (λ значительно больше d) для кристаллической решетки оказывается справедливым обычное континуальное рассмотрение. Но для более частых колебаний теория континуума приводит к неправильному результату.

В борновском спектре имеется предельная частота, определяемая второй формулой (12). Она не зависит от длины стержня. Можно доказать, что она не зависит также от способа закрепления концов. Таким образом, существует некоторая предельная частота, к которой близки частоты очень большого числа колебаний, характеризующая свойства самой решетки. В первом приближении, если $M \gg m$, можно считать, что все частоты борновского спектра одинаковы и равны предельной частоте.

Вспомним, что Дебай, для того чтобы получить спектр дискретной решетки, оборвал спектр континуума на $s = 2n$. Мы видим теперь, что это неверно: частоты решетки не совпадают с частотами континуума. Отличие не очень велико в тех случаях, которые были количественно просчитаны Дебаем (массы M и m близки между собой), и поэтому он получил хороший результат. Но если бы Дебай взял случай, когда $M \gg m$, он получил бы сильное расхождение между своей теорией и тем, что дает дискретное рассмотрение.

Как уже было сказано, частоты второй ветви сгущаются в конце и приближаются к определенной предельной частоте, не зависящей от n и характерной для решетки. С другой стороны, уже давно известны так называемые остаточные лучи. Если на кристалл падает инфракрасный свет, то определенные частоты очень сильно поглощаются и очень сильно отражаются, тогда как остальные частоты почти нацело проходят. Те лучи, которые сильно отражаются и поглощаются, и называются остаточными (это название связано с тем, что после многих отражений остаются только эти лучи). Их частоты совпадают с предельными частотами кристаллов:

вследствие резонанса на этих частотах получается сильное поглощение и селективное отражение.

Пусть кристалл состоит не из двух, а из трех различных сортов атомов (рис. 123). Тогда спектр состоит из *трех* ветвей (рис. 124). Правая часть спектра — дебаевская, вторая и третья — борновские. Здесь имеется два сорта остаточных лучей. Если бы

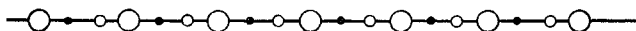


Рис. 123.

было четыре сорта частиц, то было бы три сорта остаточных лучей, и т. д.

Исследуя на опыте частоты остаточных лучей, мы получаем для них значения, очень близкие к тем значениям предельных частот, которые можно вычислить по Борну. Таким образом, экспериментальное исследование динамики кристалла чрезвычайно

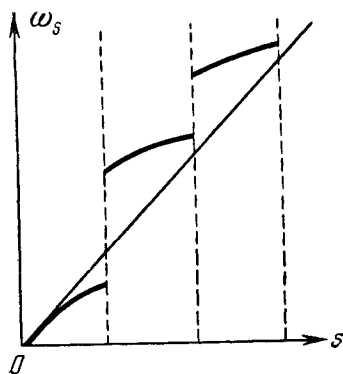


Рис. 124.

хорошо оправдывает представление о его дискретном строении. Рентгеновы лучи подтвердили дискретное представление о *статике* кристалла. Мы получили теперь подтверждение этих представлений из *динамического* рассмотрения: те свойства, о которых мы здесь говорили, специфичны для *колебаний* дискретной структуры. Но я не хотел бы, чтобы вы это понимали упрощенно.

Экспериментальные факты решают спор между дискретным представлением о строении кристалла и тем „сплошным“ представлением, которое принимается в теории упругости. Рассмотрение кристалла как *однородного* стержня приводит к некоторым результатам, находящимся в противоречии с опытом. Но представим себе другую сплошную модель кристалла. Пусть масса „размазана“ с *переменной* плотностью. Пусть распределение массы обладает *периодичностью*, причем период — молекулярного размера и на каждый период приходится два максимума плотности различной высоты (рис. 125). Я думаю, что если построить теорию колебаний в такой среде, получится практически то же самое, что дает дискретная модель с двумя сортами

частиц. (Такое динамическое рассмотрение еще не проведено, хотя уже имеются некоторые работы о сплошной среде с периодической структурой.)

Опыты, о которых здесь шла речь, опровергают не *всякое* представление о кристалле, как о сплошной среде, а представление о кристалле, как о сплошной *однородной* среде (лишенной периодичности молекулярных размеров).



Рис. 125.

Изучение динамики связанных систем привело нас к вопросам строения вещества. Мы встречаем здесь те же идеи, что и в теории „технических“ связанных систем, но только иначе примененные. Динамика кристаллической решетки интересует нас еще и в связи с тем, что мы старались с ее помощью оптически уловить строение вещества¹.

Вернемся к техническим системам. Рассмотрим фильтр (рис. 126) — электрический аналог одномерной кристаллической решетки с одинаковыми массами. Двум различным массам M и m соответствовал бы фильтр с двумя различными чередующимися индуктивностями. На практике применяют фильтры, состоящие из одинаковых ячеек, но фильтры с чередующимися ячейками двух сортов также могут пригодиться.

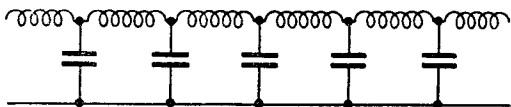


Рис. 126.

Однако, прежде чем приступить к задаче о фильтре, разберем переход к случаю равных масс в задаче о кристаллической решетке. Переход этот довольно интересен.

При $M=m$ формула (10) сильно упрощается и дает:

$$\omega_{s1}^2 = \frac{4\alpha}{m} \sin^2 \frac{\beta_s}{2}, \quad \omega_{s2}^2 = \frac{4\alpha}{m} \cos^2 \frac{\beta_s}{2}. \quad (17)$$

Вместо того, чтобы исходить из теории, построенной для двух сортов масс, мы можем поступить иначе: считать с самого начала,

¹ [Ср. том I, стр. 320, 327.]

что все массы одинаковы, и написать и решать уравнения одного типа для всех масс от $k=1$ до $k=2n$. Тогда вместо двух выражений для частоты получается *одно* и ее номер s изменяется от 1 до $2n$. При этом нет никакого деления на спектры Дебая и Борна, каждой длине волны соответствует одна частота. А именно, если с самого начала решать задачу для $M=m$, то все частоты выражаются формулой

$$\omega_s^2 = \frac{4\alpha}{m} \sin^2 \frac{\beta_s}{2} \quad (s=1, 2, \dots, 2n), \quad (18)$$

а распределения амплитуд — формулой

$$A_s^{(k)} = a_s \sin k\beta_s \quad (k=0, 1, 2, \dots, 2n), \quad (19)$$

причем

$$\beta_s = \frac{s\pi}{2n+1} \quad (s=1, 2, \dots, 2n). \quad (20)$$

Легко убедиться, что формулы (17) и (18) дают один и тот же спектр частот для $s=1, 2, \dots, n$. Формула (18) совпадает с первой формулой (17), а для $s=n+1, n+2, \dots, 2n$ из формулы (18) получается то же, что и из второй формулы (17) для $s=n, n-1, \dots, 2, 1$.

Несколько сложнее обстоит дело с типом колебаний. Когда в формуле (20) s меняется от 1 до $2n$, длины волн становятся все короче и короче. Для первого типа колебаний все в порядке: синусоиды, определяемые формулами (19) и (20) для $s=1, 2, \dots, n$, совпадают с синусоидами, которые дают при $M=m$ формулы (3), (6) и (9) (здесь $a=b$). Но для второго типа колебаний на первый взгляд получается противоречие. Когда мы исходим из нашего *первого* способа рассмотрения, полагая затем $M=m$, то мы получаем *две* синусоиды одинаковой амплитуды, но противоположной фазы ($b=-a$). На одной синусоиде лежат все четные массы, на другой — все нечетные. Если же мы пользуемся *вторым* способом рассмотрения, с самого начала полагая $M=m$, то массы оказываются расположенными на *одной* синусоиде (19). Противоречие разрешается следующим образом. Физический смысл имеют не все ординаты синусоид, а только те, которые соответствуют точкам, где расположены атомы. Но для этих точек формулы (3) и (19) дают одно и то же, т. е. соответствующие им ординаты синусоид (3) являются вместе с тем ординатами синусоиды (19). Покажем это.

Колебанию $\omega_{s_2}(s=1, 2, \dots, n)$, получаемому при первом способе рассмотрения, соответствует при втором способе рассмотрения колебание $\omega_{s'}$, где $s'=2n, 2n-1, \dots, n+1$, т. е.

$$s' = 2n + 1 - s.$$

Оно имеет согласно (19) и (20) распределение вида

$$A_{s'}^{(k)} = a \sin k \beta_{s'} = a \sin \frac{ks'\pi}{2n+1} = (-1)^k \left(-a \sin \frac{k s \pi}{2n+1} \right)$$

$$(k=0, 1, 2, \dots, 2n),$$

или, если ввести для нечетных k обозначение j ,

$$A_{s'}^{(j)} = a \sin \frac{j s \pi}{2n+1} \quad (j=1, 3, \dots, 2n+1),$$

$$A_{s'}^{(k)} = -a \sin \frac{k s \pi}{2n+1} \quad (k=0, 2, 4, \dots, 2n).$$

Эти выражения совпадают с теми, которые получаются из (3) при $b=-a$.

Итак, частицы одновременно лежат на двух синусоидах (3) и на одной, более частой, синусоиде (19) (рис. 127). Вопрос пол-

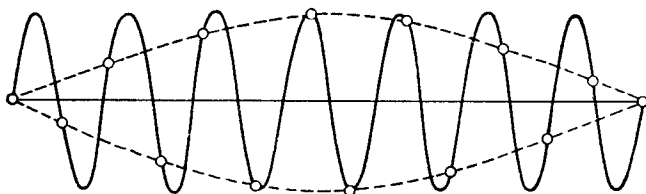


Рис. 127.

ностью разъяснен. При обоих способах рассмотрения получаются лишь различные выражения одинаковых результатов.

В случае фильтра с равными ячейками магнитная и электрическая энергия определяются выражениями:

$$2T = \sum_k L (\dot{q}^{(k)})^2, \quad 2U = \sum_k \frac{(q^{(k)} - q^{(k+1)})^2}{C}.$$

Из них получаются, в качестве уравнений Лагранжа, такие же уравнения, как для решетки, с заменой α на $1/C$, $m=M$ на L и x на q :

$$L\ddot{q}^{(k)} + \frac{1}{C}(2q^{(k)} - q^{(k+1)} - q^{(k-1)}) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (21)$$

Само собой разумеется, уравнения (21) являются для соответствующих обходов ячеек обыкновенными кирхгофовскими уравнениями.

Итак, мы получаем тот же самый вид уравнений, что для цепочки из одинаковых масс.

Однако здесь нас интересуют главным образом другие вопросы. В отличие от кристаллической решетки, основной интерес здесь представляют не собственные колебания системы, а то, как она ведет себя в качестве линии передачи.

Отметим еще и другое отличие. В случае электрического фильтра число звеньев обычно не очень велико: не более 20—30. В случае кристаллической решетки мы пренебрегаем единицей по сравнению с числом звеньев. Здесь нужно быть осторожнее.

В электротехнике представляет интерес не только фильтр сам по себе, но также фильтр как модель кабеля. Здесь положение в некотором смысле противоположно тому, какое было с кристаллами. В теории кристаллов мы начали с континуума. Потом, чтобы быть ближе к природе, пришлось перейти к решетке. Кабель можно считать континуумом: здесь нас интересуют волны, не имеющие отношения к молекулярным размерам. Но все-таки и для кабеля имеет смысл рассматривать дискретную модель, и вот почему. Пусть, например, кабель имеет длину 200—300 км. Такой кабель очень трудно исследовать в натуре. Поэтому часто требуется создать лабораторную модель кабеля. Электрические свойства кабеля определяются его емкостью, индуктивностью, сопротивлением. При воссоздании кабеля в лаборатории нельзя заменить его одним контуром с емкостью и индуктивностью, равными емкости и индуктивности кабеля. Это ничего не даст: в кабеле возможен ряд явлений, чуждых цепи с одной степенью свободы. Но можно сделать искусственный кабель из ряда дискретных сосредоточенных емкостей и индуктивностей, общая емкость и индуктивность которых такие же, как у настоящего кабеля. Подобный искусственный кабель легко построить. Возникает вопрос: насколько он может воспроизводить свойства настоящего кабеля? Оказывается, что достаточно небольшого числа ячеек, чтобы получить очень хорошую аппроксимацию. Если мы берем модель кабеля из 30—40 ячеек, имеющих такую же общую емкость и такую же общую индуктивность, как кабель, то

$$\omega / \omega_{40} = 0,9997$$

(ω — основная частота кабеля; ω_{40} — основная частота цепочки из сорока звеньев). Следующие частоты, по крайней мере ближайшие, тоже при этом хорошо аппроксимируются.

ТРИДЦАТЬ ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ

(8/V 1931 г.)

Фильтры (продолжение). Задача о собственных колебаниях; граничные условия. Аппроксимация кабеля одной ячейкой и многими ячейками. Фильтр как передающая система. Критическая частота; условия пропускания. „Обратный“ фильтр. Физическое объяснение действия фильтров. Вычисление напряжений на конце фильтра в области пропускания. Резонанс.

Продолжим исследование фильтра с одинаковыми ячейками. Он описывается уравнениями

$$L\ddot{q}^{(k)} + \frac{1}{C} (2q^{(k)} - q^{(k+1)} - q^{(k-1)}) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Для определенности задачи нужно указать условия на концах. Закрепленным концам механической цепочки здесь соответствуют открытые концы:

$$q^{(0)} = 0, \quad q^{(n+1)} = 0.$$

Совершенно так же, как для цепочки, имеем:

$$\begin{aligned} q^{(k)} &= A^{(k)} \cos(\omega t + \varphi); \\ \left(\frac{2}{C} - L\omega^2\right) A^{(k)} - \frac{1}{C} (A^{(k+1)} + A^{(k-1)}) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть

$$A^{(k)} = a \sin k\beta. \quad (3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} q_s^{(k)} &= a \sin k\beta_s \cos(\omega_s t + \varphi_s), \\ \omega_s &= \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{s\pi}{2(n+1)} \quad (s=1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (4)$$

(ω — основная частота кабеля; ω_{40} — основная частота цепочки из сорока звеньев). Следующие частоты, по крайней мере ближайшие, тоже при этом хорошо аппроксимируются.

ТРИДЦАТЬ ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ

(8/V 1931 г.)

Фильтры (продолжение). Задача о собственных колебаниях; граничные условия. Аппроксимация кабеля одной ячейкой и многими ячейками. Фильтр как передающая система. Критическая частота; условия пропускания. „Обратный“ фильтр. Физическое объяснение действия фильтров. Вычисление напряжений на конце фильтра в области пропускания. Резонанс.

Продолжим исследование фильтра с одинаковыми ячейками. Он описывается уравнениями

$$L\ddot{q}^{(k)} + \frac{1}{C} (2q^{(k)} - q^{(k+1)} - q^{(k-1)}) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Для определенности задачи нужно указать условия на концах. Закрепленным концам механической цепочки здесь соответствуют открытые концы:

$$q^{(0)} = 0, \quad q^{(n+1)} = 0.$$

Совершенно так же, как для цепочки, имеем:

$$\begin{aligned} q^{(k)} &= A^{(k)} \cos(\omega t + \varphi); \\ \left(\frac{2}{C} - L\omega^2\right) A^{(k)} - \frac{1}{C} (A^{(k+1)} + A^{(k-1)}) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть

$$A^{(k)} = a \sin k\beta. \quad (3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} q_s^{(k)} &= a \sin k\beta_s \cos(\omega_s t + \varphi_s), \\ \omega_s &= \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{s\pi}{2(n+1)} \quad (s=1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (4)$$

Эти формулы получаются из формул для цепочки из одинаковых масс, если сделать замены

$$\alpha = \frac{1}{C}, \quad m = L.$$

Задача о собственных колебаниях полностью решена.

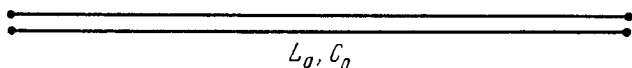


Рис. 128.

Если вместо (3) взять $A^{(k)} = b \cos k\beta$ (с тем же самым β), мы также получим решение уравнений (2). Сумма решений

$$A^{(k)} = a \sin k\beta + b \cos k\beta \quad (5)$$

— тоже решение. Здесь неизвестны β и отношению b/a . Их нужно определить из двух краевых условий. Мы сразу взяли $b=0$, так как заранее было известно, каким краевым условиям придется удовлетворять (мы имеем право угадывать решение, потому что знаем, что оно единственное). При других, более сложных, краевых условиях понадобилось бы использовать решение (5).

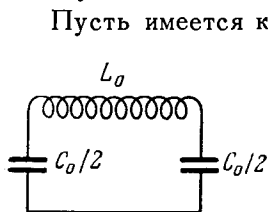


Рис. 129.

Пусть имеется кабель с равномерно распределенными емкостью и индуктивностью и с открытыми концами (рис. 128). Как аппроксимировать его одной ячейкой (первое самое грубое приближение)? Сделаем, например, так, как показано на рис. 129: индуктивность, равная всей индуктивности кабеля L_0 , сосредоточена в одном месте, а емкость, равная всей емкости кабеля C_0 , разделена на две части.

Здесь — одна собственная частота. Ее можно сравнивать только с основной частотой кабеля $\tilde{\omega}_1$.

Если L_1 и C_1 — индуктивность и емкость на единицу длины кабеля, то скорость распространения волн в нем равна $1/\sqrt{L_1 C_1}$ ¹. Так как кабель открыт на обоих концах, то на его длине l укладывается полволны и

$$\tilde{\omega}_1 = 2\pi \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \cdot \frac{1}{2l} = \frac{\pi}{l \sqrt{L_1 C_1}} = \frac{\pi}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

¹ [См. 3-ю лекцию части II.]

Контур рис. 129 имеет собственную частоту

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{L_0 C_0}},$$

сильно отличающуюся от $\tilde{\omega}_1$. Но и при одной ячейке можно получить лучшее приближение, если иначе распределить параметры. Прежде чем это показать, рассмотрим аппроксимацию кабеля фильтром из n ячеек. Чем больше n , тем лучшее приближение можно получить.

Повидимому, наилучший способ распределения индуктивности и емкости кабеля между n ячейками состоит в следующем. Разобьем кабель на $n+1$ участок. Поместим в середине каждого участка

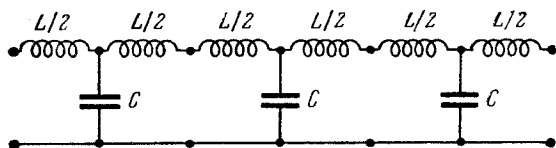


Рис. 130.

сосредоточенную емкость C , равную емкости участка, а слева и справа от нее две индуктивности $L/2$, равные в сумме распределенной индуктивности участка (рис. 130). Из $n+1$ участка получается n ячеек. Сумма емкостей всех ячеек равна емкости всего кабеля. С индуктивностью дело обстоит иначе: половинки $L/2$ на концах остаются „мертвыми“. Емкость C_0 и индуктивность L_0 всего кабеля связаны с C и L соотношениями:

$$C(n+1) = C_0, \quad L(n+1) = L_0.$$

Собственные частоты нашего ячеечного кабеля (фильтра) суть

$$\omega_s = \frac{2(n+1)}{\sqrt{L_0 C_0}} \sin \frac{s\pi}{2(n+1)},$$

собственные же частоты сплошного кабеля —

$$\tilde{\omega}_s = \frac{s\pi}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\omega_s}{\tilde{\omega}_s} = \frac{2(n+1)}{s\pi} \sin \frac{s\pi}{2(n+1)},$$

или

$$\frac{\omega_g}{\omega_s} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\xi}, \quad \xi = \frac{s\pi}{2(n+1)}$$

(функция $\sin \xi/\xi$ часто встречается в теоретической физике).

Для ячеечных кабелей, подобранных только что указанным способом, имеются таблицы собственных частот.

В случае аппроксимации *одной* ячейкой ($n=1$) наш общий способ приводит к схеме рис. 131. Здесь, в отличие от рис. 129, в выражение для собственной частоты входит не вся индуктивность кабеля, а ее половина. Получается собственная частота

$$\omega = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

Она отличается от основной частоты сплошного кабеля только на $10^0/0$.

Мы говорили выше об индуктивности и емкости *на единицу длины кабеля*. Эти понятия нуждаются в обосновании, и в свое время мы к этому вернемся¹. Теперь же мы перейдем к рассмотрению другой физической задачи, практически чрезвычайно важной.

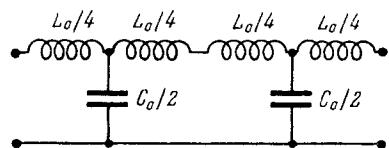


Рис. 131.

Пусть через звеньевой проводник передается напряжение от источника к потребляющему аппарату. Практически дело часто

обстоит так: источник создает не синусоидальное напряжение, а набор синусоидальных слагаемых разнообразных частот. Желательно, чтобы некоторые из этих слагаемых проходили, а другие задерживались. Иначе говоря, нужно *профильтровать* напряжение, создаваемое источником. Так как мы рассматриваем линейную систему, то для того, чтобы овладеть проблемой, достаточно рассмотреть, как ведет себя эта система под действием синусоидальной силы

$$\mathcal{E} = \cos pt,$$

где p — заданная частота.

Ответ будет различным, в зависимости от того, каков потребляющий аппарат. Оставим конец фильтра открытым и будем интересоваться напряжением на этом открытом конце. Если на конце

¹ [См. 3-ю лекцию части II.]

включен какой-нибудь аппарат, то, вообще говоря, вся картина искажается. Но если этот аппарат имеет большое внутреннее сопротивление, то решение, которое мы получим для открытого конца, даст практически правильный ответ.

Вернемся к общей постановке задачи. Это — задача не о собственных, а о *вынужденных* колебаниях.

Реальный фильтр обладает потерями. Вследствие потерь собственные колебания затухают, и под действием периодической силы устанавливаются колебания с периодом силы. Их мы и хотим найти. Наличие затухания мы учтем с самого начала тем, что будем рассматривать периодическое решение. Но, не вводя затухания в уравнение, мы не получим зависимости амплитуды вынужденных колебаний от затухания. Так можно поступать только в том случае, когда затухание мало.

Будем искать периодическое решение с частотой p . Прибегнем к тому

же приему, что и при изучении собственных колебаний¹. В случае, когда включен источник внешней силы (рис. 132), первое уравнение (1) должно быть заменено уравнением

$$L\ddot{q}^{(1)} + \frac{1}{C}(q^{(1)} - q^{(2)}) = \mathcal{E} \cos pt.$$

Остальные уравнения (1) сохраняют такой же вид, как в задаче о собственных колебаниях. Получаются несимметричные уравнения, и это нежелательно. Но как сохранить для всех k , включая $k=1$, одинаковый вид уравнений? Выход заключается в следующем: нужно написать для $k=1$ уравнение

$$L\ddot{q}^{(1)} + \frac{1}{C}(q^{(1)} - q^{(2)}) + \frac{1}{C}(q^{(1)} - q^{(0)}) = 0$$

и потребовать в решении, чтобы было

$$-\frac{1}{C}(q^{(1)} - q^{(0)}) = \mathcal{E} \cos pt. \quad (6)$$

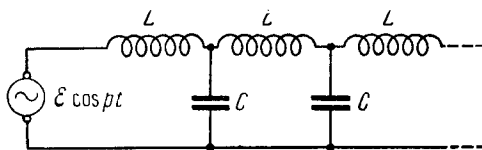


Рис. 132.

¹ [См. 29-ю и 30-ю лекции.]

Такой прием обычен в вопросах распространения волн при точечных источниках.

Итак, мы требуем, чтобы удовлетворялись все прежние симметричные уравнения, но дополнительно требуем, чтобы выполнялось условие (6) на одном конце и условие

$$q^{(n+1)} = 0 \quad (7)$$

на другом конце. Решать уравнения (1) мы будем при этом обычным способом, полагая

$$q^{(k)} = A^{(k)} \cos pt.$$

Формально мы получим такие же уравнения, как и раньше:

$$\left(\frac{2}{C} - Lp^2\right) A^{(k)} - \frac{1}{C} (A^{(k+1)} + A^{(k-1)}) = 0. \quad (8)$$

Разница по отношению к разысканию собственных колебаний состоит в том, что здесь частота p задана и надо искать только $A^{(k)}$. Если мы сделаем, как прежде, подстановку $\sin k\beta$, то неизвестно, сможем ли мы удовлетворить уравнениям (8). Попробуем выражение типа $e^{k\gamma}$, которое более гибко.

Итак, подставим в (8)

$$A^{(k)} = ae^{k\gamma}.$$

Как легко видеть, мы получим для определения γ уравнение

$$\left(\frac{2}{C} - Lp^2\right) - \frac{1}{C} (e^{\gamma} + e^{-\gamma}) = 0, \quad (9)$$

которое является квадратным уравнением по отношению к e^{γ} . Интересно то, что в зависимости от величины p значение γ , которое получается из (9), будет либо чисто мнимым, либо комплексным. В этих двух случаях фильтр ведет себя совершенно различно.

Если p таково, что

$$|2 - LCp^2| < 2, \quad (10)$$

то мы удовлетворим (9), взяв

$$\gamma = i\beta,$$

где β — действительная величина. Действительно,

$$e^{i\beta} + e^{-i\beta} = 2 \cos \beta \leq 2.$$

Если $\gamma = i\beta$ удовлетворяет уравнению (19), то $\gamma = -i\beta$ тоже удовлетворяет ему, так что уравнения (8) имеют при этом решение

$$A^{(k)} = ae^{ik\beta} + be^{-ik\beta}.$$

Так как амплитуды $A^{(k)}$ действительны, то нужно взять a и b комплексно сопряженными:

$$2ia = Ae^{-i\psi}, \quad -2ib = Ae^{i\psi}$$

(A и ψ — произвольные действительные величины), и мы получаем:

$$A^{(k)} = A \sin(k\beta - \psi). \quad (11)$$

Это решение означает, что фильтр *пропускает* частоту p .

Условие (10) может быть представлено в таком виде:

$$p < \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

Если условие (10) не выполняется, т. е. частота внешней э.д.с. $p > 2/\sqrt{LC}$, то величина γ при этом не является чисто мнимой; как мы увидим, таких частот фильтр *не пропускает*.

Таким образом, фильтр пропускает только частоты, лежащие ниже определенной *критической частоты*, равной

$$p = \frac{2}{\sqrt{LC}}. \quad (12)$$

Эффективность фильтра зависит от числа ячеек, но критическая частота от него не зависит; она определяется только структурой ячейки. Обычный (сплошной) кабель критической частоты не имеет, он пропускает все частоты.

Однако здесь нужно заметить следующее. Критическая частота отсутствует у *однородного* сплошного кабеля. Сплошной кабель с периодически меняющимися (в функции расстояния) L и C будет обладать фильтрующей способностью. Такой кабель будет пропускать низкие частоты и задерживать высокие.

Наряду с фильтрами рассматриваемого типа, нужны также фильтры обратного типа, пропускающие высокие частоты и задерживающие низкие. (Эти два типа фильтров составляют основу „фильтровальной“ техники.) В „обратном“ фильтре емкости расположены последовательно, а индуктивности — параллельно (рис. 133), т. е. емкости шунтируются индуктивностями.

Можно избежать нового математического исследования, сведя задачу о фильтре второго типа на задачу о фильтре первого типа. Составляя уравнения по Кирхгофу или по Лагранжу, получаем:

$$\frac{q^{(k)}}{C} + L(2\ddot{q}^{(k)} - \ddot{q}^{(k+1)} - \ddot{q}^{(k-1)}) = 0,$$

где $q^{(k)}$ — заряд на k -ом конденсаторе. Подстановка

$$q^{(k)} = A^{(k)} \cos pt$$

дает уравнения

$$\left(2L - \frac{1}{Cp^2}\right) A^{(k)} - L(A^{(k+1)} + A^{(k-1)}) = 0. \quad (13)$$

Сравним уравнения (13) и (8). Достаточно заменить $1/C$ на L , а L на $1/C$ и написать p вместо $1/p$, чтобы перейти от уравнений (8) к уравнениям (13). Следовала такую же замену в формуле (12), мы получим для фильтра второго типа следующее условие пропускания:

$$p > \frac{1}{2\sqrt{LC}}.$$

Частоты, лежащие ниже $1/2\sqrt{LC}$, он не пропускает. Для фильтра второго типа критическая частота (при тех же L и C) меньше, чем для первого.

Имея два фильтра, один — первого, другой — второго типа, можно составить из них фильтр, пропускающий лишь некоторый интервал частот. Первый фильтр задержит частоты *выше* некоторой определенной величины, второй задержит частоты *ниже* некоторой другой определенной величины. Разность этих величин и даст полосу пропускания.

То, что было сказано о пропускании и непропускании, нам еще предстоит доказать. Кроме того, нужно будет получить количественные выражения для амплитуды на выходе фильтра. Но я хотел бы сначала показать наглядно, в чем здесь „колдовство“.

Возьмем фильтр первого типа (рис. 132). Почему он пропускает медленные колебания? Если приложить к одному концу постоянное напряжение от батареи, то на другом конце будет такое же напряжение, как на батарее. С другой стороны, для очень быстрых колебаний емкости представляют собой очень малые сопротивления

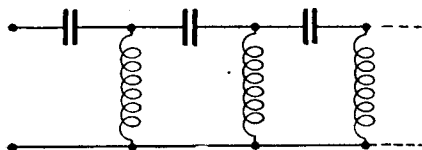


Рис. 133.

ния, они образуют почти короткие замыкания. При очень большой частоте каждый конденсатор шунтирует предыдущую часть линии малым (и уменьшающимся с увеличением частоты) сопротивлением.

Возьмем фильтр второго типа (рис. 133). Приключенная к его концу батарея зарядит первый конденсатор, но дальше ток не пойдет, напряжение на конце будет равно нулю. Если же частота источника велика, каждая ячейка шунтируется большим сопротивлением (индуктивное сопротивление растет с увеличением p) и напряжение на конце линии велико.

Нам нужно теперь вычислить амплитуды колебаний в фильтре.

При частоте ниже критической в фильтре первого типа мы получаем, подставляя $q^{(k)} = A^{(k)} \cos pt$, где $A^{(k)}$ дается формулой (11), в граничное условие (6):

$$-A \sin \psi + A \sin(\beta - \psi) = C\varepsilon. \quad (14)$$

Второе уравнение для определения A и ψ мы получим, подставляя (11) в граничное условие (7):

$$A \sin[(n+1)\beta - \psi] = 0.$$

Отсюда

$$\psi = (n+1)\beta. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), имеем

$$A = -\frac{C\varepsilon}{2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta}.$$

Пользуясь этой формулой, найдем амплитуду X напряжения $q^{(n)}/C$ на конце фильтра:

$$X = \frac{A^{(n)}}{C} = -\frac{A \sin(\psi - n\beta)}{C} = \frac{A \sin \beta}{C} = \frac{C\varepsilon \sin \beta}{C \cdot 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta},$$

или

$$X = \varepsilon \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta}. \quad (16)$$

Для очень малых p величина β также очень мала, и можно считать приближенно:

$$\cos \frac{\beta}{2} = 1, \quad \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta = 1.$$

Напряжение на конце равно напряжению, подводимому к первой ячейке.

Формула (16) показывает также, что для некоторых участков частот напряжение на конце фильтра может быть значительно больше, чем $\mathcal{E}$. Фильтр пропускает все низкие частоты ($p < 2/\sqrt{LC}$), но пропускает их неравномерно. В частности, если p таково, что

$$\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta = 0,$$

то имеет место резонанс, $X = \infty$, т. е. напряжение на конце кабеля (в отсутствие затухания) растет неограниченно.

Затухание скрадывает эти различия. При больших затуханиях фильтр более или менее одинаково пропускает все частоты ниже критической.

Остается доказать вторую часть нашего утверждения — то, что фильтр практически не пропускает частот выше критической.

ТРИДЦАТЬ ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ

(12/V 1931 г.)

Фильтры (окончание). Исследование „прямого“ фильтра при частоте выше критической. Распределение напряжения по ячейкам. Напряжение на конце. Поведение реальных фильтров при очень высоких частотах. Акустический резонатор и акустический фильтр. Механический фильтр В. Ф. Миткевича. Общие замечания о теории колебаний. Переход к распределенным системам. Разложимость произвольной функции по собственным функциям сплошной колебательной системы.

Закончим вопрос о фильтрах.

Мы искали решение дифференциальных уравнений фильтра в виде:

$$q^{(k)} = A^{(k)} \cos pt.$$

Для определения $A^{(k)}$ получаются уравнения

$$\left(\frac{2}{C} - Lp^2\right)A^{(k)} - \frac{1}{C}(A^{(k+1)} + A^{(k-1)}) = 0. \quad (1)$$

Напряжение на конце равно напряжению, подводимому к первой ячейке.

Формула (16) показывает также, что для некоторых участков частот напряжение на конце фильтра может быть значительно больше, чем $\mathcal{E}$. Фильтр пропускает все низкие частоты ($p < 2/\sqrt{LC}$), но пропускает их неравномерно. В частности, если p таково, что

$$\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta = 0,$$

то имеет место резонанс, $X = \infty$, т. е. напряжение на конце кабеля (в отсутствие затухания) растет неограниченно.

Затухание скрадывает эти различия. При больших затуханиях фильтр более или менее одинаково пропускает все частоты ниже критической.

Остается доказать вторую часть нашего утверждения — то, что фильтр практически не пропускает частот выше критической.

ТРИДЦАТЬ ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ

(12/V 1931 г.)

Фильтры (окончание). Исследование „прямого“ фильтра при частоте выше критической. Распределение напряжения по ячейкам. Напряжение на конце. Поведение реальных фильтров при очень высоких частотах. Акустический резонатор и акустический фильтр. Механический фильтр В. Ф. Миткевича. Общие замечания о теории колебаний. Переход к распределенным системам. Разложимость произвольной функции по собственным функциям сплошной колебательной системы.

Закончим вопрос о фильтрах.

Мы искали решение дифференциальных уравнений фильтра в виде:

$$q^{(k)} = A^{(k)} \cos pt.$$

Для определения $A^{(k)}$ получаются уравнения

$$\left(\frac{2}{C} - Lp^2\right)A^{(k)} - \frac{1}{C}(A^{(k+1)} + A^{(k-1)}) = 0. \quad (1)$$

Их можно решить подстановкой

$$A^{(k)} = ae^{k\gamma},$$

приводящей к уравнению

$$\left(\frac{2}{C} - Lp^2\right) - \frac{1}{C}(e^{\gamma} - e^{-\gamma}) = 0,$$

или

$$\operatorname{ch} \gamma = 1 - \frac{LC}{2} p^2. \quad (2)$$

Если γ — решение уравнения (2), то $-\gamma$ тоже является решением. В силу линейности системы (1) ее решением будет также

$$A^{(k)} = ae^{k\gamma} + be^{-k\gamma}. \quad (3)$$

Это решение содержит две произвольные постоянные a и b , нужные для того, чтобы удовлетворить обоим условиям на концах.

Если внешняя частота p удовлетворяет условию

$$|2 - CLp^2| < 2,$$

т. е. $LCp^2 < 4$, или

$$p < \frac{2}{\sqrt{LC}}, \quad (4)$$

то $\gamma = \pm i\beta$, где β — действительная величина.

Используя краевые условия

$$q^{(0)} - q^{(1)} = C\varepsilon \cos pt \quad \text{или} \quad A^{(0)} - A^{(1)} = C\varepsilon \quad (5)$$

и

$$q^{(n+1)} = 0 \quad \text{или} \quad A^{(n+1)} = 0, \quad (6)$$

мы получили для амплитуды X напряжения $q^{(n)}/C$ на конце фильтра выражение

$$X = \varepsilon \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta}. \quad (7)$$

Пусть теперь частота p больше критической, т. е.

$$|2 - CLp^2| > 2, \quad (8)$$

или

$$p > \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

Для таких p величина $1 - L Cp^2/2$ отрицательна, и на основании (2) γ не может быть действительным (если γ действительно, то $\operatorname{ch} \gamma$ положителен). В случае (8) γ не может быть и чисто мнимой величиной. Таким образом, теперь γ — существенно комплексная величина.

Пусть

$$\gamma = \xi + i\eta \quad (9)$$

(ξ, η — действительны). Тогда

$$\left. \begin{aligned} e^{\gamma} &= e^{\xi} (\cos \eta + i \sin \eta), \\ e^{-\gamma} &= e^{-\xi} (\cos \eta - i \sin \eta). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Подставив (10) в (2) и учитывая, что правая часть действительная, мы получаем:

$$\sin \eta = 0, \text{ т. е. } \eta = m\pi,$$

где m — целое число. Но четные m ($m=0, 2, 4, \dots$) непригодны: они не исправят знак в левой части уравнения (2), так как $\cos \eta$ при этом равен $+1$. Пригодны лишь нечетные m .

Возьмем, например, $m=1$, т. е. положим:

$$\gamma = \xi + i\pi. \quad (11)$$

Тогда $e^{\gamma} = -e^{\xi}$, $e^{-\gamma} = -e^{-\xi}$ и левая часть уравнения (2) обращается в

$$-(e^{\xi} + e^{-\xi})$$

(с минусом! Добавок $i\pi$ понадобился именно для того, чтобы обернуть знак).

Теперь можно удовлетворить уравнению (2), определив ξ из условия

$$\operatorname{ch} \xi = \left| 1 - \frac{LC}{2} p^2 \right|. \quad (12)$$

Оно дает действительное ξ , так как в рассматриваемом случае

$$\left| 1 - \frac{LC}{2} p^2 \right| > 1.$$

При этом ξ тем больше, чем больше p .

Таким образом, для случая (8) мы получаем решение уравнений (1) в следующем виде:

$$A^{(k)} = ae^{k\xi + ik\pi} + be^{-(k\xi + ik\pi)}.$$

Принимая во внимание, что $e^{\pm i k \pi} = (-1)^k$, можно освободиться от мнимостей и написать:

$$A^{(k)} = (-1)^k (ae^{k\xi} + be^{-k\xi}). \quad (13)$$

Получился интересный результат: напряжения на последовательных конденсаторах имеют чередующиеся знаки.

Величины a и b определяются и здесь из краевых условий (5) и (6). Подставляя (13) в (5) и (6), имеем:

$$\left. \begin{aligned} a + b + ae^{\xi} + be^{-\xi} &= \mathcal{E}, \\ ae^{(n+1)\xi} + be^{-(n+1)\xi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Не решая системы (14), сделаем следующее замечание. Из второго уравнения (14) имеем:

$$a = -be^{-2(n+1)\xi}.$$

Отсюда видно, что если ξ не очень мало и если взять достаточно большое число звеньев, то a чрезвычайно мало по отношению к b .

Если k не очень велико, второй член в выражении (13) преобладает и решение практически имеет вид

$$A^{(k)} = (-1)^k be^{-k\xi}.$$

Таким образом, если частота превышает критическую, то (при указанном условии) напряжение монотонно падает с увеличением номера ячейки по экспоненциальному закону.

Для того, чтобы получить общее выражение для X , воспользуемся уже найденным нами решением (7), относящимся к первому случаю, когда γ чисто мнимое. Запишем его в виде

$$X = \mathcal{E} \frac{e^{i\frac{\beta}{2}} + e^{-i\frac{\beta}{2}}}{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta} + e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}} = \mathcal{E} \frac{e^{\frac{\gamma}{2}} + e^{-\frac{\gamma}{2}}}{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma} + e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma}}. \quad (15)$$

Решение для второго случая получится, если подставить в (15), вместо γ , выражение (11). Это дает:

$$X = \mathcal{E} \frac{e^{\frac{\xi+i\pi}{2}} + e^{-\frac{\xi+i\pi}{2}}}{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)(\xi+i\pi)} + e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)(\xi+i\pi)}},$$

или, поскольку $e^{\pm i\pi/2} = \pm i$, $e^{\pm in\pi} = (-1)^n$,

$$X = \mathcal{E}(-1)^n \frac{e^{\frac{\xi}{2}} - e^{-\frac{\xi}{2}}}{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\delta}{2}} - e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\delta}{2}}} \quad (16)$$

Заметим прежде всего, что в зависимости от того, является ли число звеньев четным или нечетным, амплитуда напряжения на конце положительна или отрицательна. При сколько-нибудь большом n второй член в знаменателе можно откинуть, и тогда

$$X = \mathcal{E}(-1)^n \left(e^{\frac{\delta}{2}} - e^{-\frac{\delta}{2}} \right) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\delta}{2}} \quad (17)$$

Следовательно, при достаточно большом числе звеньев $|X|$ очень мало по сравнению с $\mathcal{E}$. Это и означает, что фильтр не пропускает частоты выше критической.

Пусть $\xi=2$, $n=10$. Получается ослабление в e^{20} раз. Такого большого ослабления на практике никогда не нужно. Не трудно иметь $\xi=1,5$. Тогда для целей практики вполне достаточно 5—6 звеньев.

Возьмем крайний случай. Если p очень велико по сравнению с критической частотой, то, как легко видеть, уже первое звено фильтра — почти короткое замыкание. Общий принцип работы фильтров, таким образом, ясен.

Большей частью они работают на какие-нибудь нагрузочные устройства. Открытый конец получается в том случае, если фильтр подключен к сетке катодной лампы (если нет сеточного тока). Если же фильтр замкнут на некоторое конечное сопротивление, то нужно изменить граничные условия. Но пусть на открытом конце фильтра напряжение равно нулю. Тогда оно останется равным нулю, что бы к нему ни приключили. Так будет, в частности, если замкнуть конец накоротко.

Часто делают следующую ошибку.

Согласно теории, если $p \gg 2\sqrt{LC}$, то фильтр первого типа (рис. 132) практически не пропускает. Но возьмем ультравысокую частоту. На опыте окажется, что фильтр очень хорошо ее пропускает. Мне приходилось слышать, как на этом основании говорили, что теория никуда не годится. Но никогда нельзя забывать о предпосылках теории. Мы считали, что в последовательных ветвях нет емкости, а в параллельных — нет индуктивности. В дей-

ствительности всякая катушка имеет емкость, а всякие подводящие провода имеют индуктивность. Мы имеем право схематизировать фильтр так, как мы это делали, только если частота не слишком высока.

При достаточно быстрых колебаниях „индуктивность“ может оказаться емкостью, а для фильтра это чрезвычайно существенно: вместо ожидаемого эффекта может получиться эффект фильтра противоположного типа. Нельзя экстраполировать результат, полученный в предположении, что емкость катушки мала, на сколь угодно высокие частоты.

Еще большее значение имеют эти соображения в случае акустических фильтров. Акустики строят фильтр в виде комбинации акустических резонаторов.

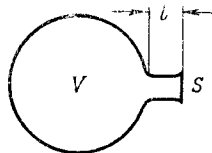


Рис. 134.

Начнем с разбора акустического резонатора (рис. 134). Пусть V — объем сосуда, S — сечение цилиндра. Предположим сначала, что цилиндр закрыт поршнем. Вычислим период собственных колебаний.

Здесь изменяются давление p и плотность ρ , причем

$$\Delta p = a^2 \Delta \rho, \quad (18)$$

где a — скорость звука¹. На поршень действует сила

$$F = S \Delta p. \quad (19)$$

Для определения F мы должны вычислить Δp . Имеем: $\rho V = \text{const}$, откуда

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = - \frac{\Delta V}{V}. \quad (20)$$

Но

$$\Delta V = Sx, \quad (21)$$

где x — смещение поршня. Подставляя $\Delta \rho$ из (20) в выражение (18) и воспользовавшись (19) и (21), получаем для силы выражение

$$F = - \frac{a^2 \rho S^2}{V} x.$$

Мы можем теперь написать уравнение движения поршня:

$$M \ddot{x} + \frac{a^2 \rho S^2}{V} x = 0, \quad (22)$$

где M — масса поршня.

¹ [Ср. 2-ю лекцию части II.]

Давление во всем сосуде мы считали одинаковым. Поэтому уравнение (22) справедливо лишь для достаточно медленных колебаний, у которых длина акустической волны много больше размеров сосуда.

Акустики имеют дело с резонаторами *без поршня*. При этом они делают довольно смелую гипотезу, которая при некоторых условиях хорошо оправдывается на опыте. Они применяют для резонатора без поршня уравнение (22), понимая под M массу воздуха в цилиндрическом горлышке. Масса всего остального воздуха не принимается во внимание. На первый взгляд это странно, ибо остальной объем гораздо больше, но эту гипотезу можно подтвердить более точным расчетом, а именно для достаточно медленных колебаний. В этом случае воздух имеет заметную скорость только в горлышке. Нужно сравнивать не *массы* воздуха в горлышке и сосуде, а соответствующие энергии. Оправдание гипотезы в том, что кинетическая энергия воздуха в горлышке гораздо больше, чем в сосуде. Так как

$$M = \rho l S,$$

где l — длина горлышка, уравнение резонатора принимает вид

$$\rho l S \ddot{x} + \frac{a^2 \rho S^2}{V} x = 0. \quad (23)$$

Итак, в теории акустических резонаторов предполагается, что давление воздуха в сосуде постоянно и что воздух *внутри* сосуда не имеет кинетической энергии. Если эти допущения справедливы, то, исходя из них, можно построить акустический фильтр. Его можно сделать в виде трубы с перегородками, через которые проходят узкие трубки (рис. 135). В трубках сосредоточена кинетическая энергия, в камерах — потенциальная.

Если написать дифференциальные уравнения движения для такой цепочки из камер и трубок, то получится то же, что и для струны с грузами или для электрического фильтра. Камеры играют роль пружин или емкостей, а трубки — масс или индуктивностей. Сравнивая дифференциальное уравнение (23) с соответствующими уравнениями для электрической и механической систем, не трудно видеть, что

$$\begin{aligned} \rho l S & \text{аналогично } L \text{ или } m, \\ a^2 \rho S^2 / V & \text{аналогично } 1/C \text{ или } \alpha. \end{aligned}$$

Отсюда можно заключить, что система пропускает тогда, когда

$$p < 2a\sqrt{\frac{S}{iV}}.$$

Она является акустическим фильтром для пропускания низких частот.

Для того, чтобы можно было пользоваться этой теорией, длина волны должна быть велика по отношению к линейным размерам камер. При очень высоких частотах эта теория совершенно непригодна.

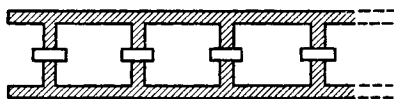


Рис. 135.

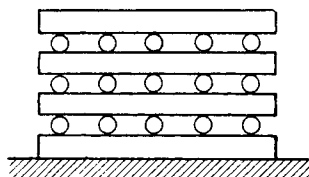


Рис. 136.

Укажем еще на механический фильтр В. Ф. Миткевича. Для того, чтобы обезопасить приборы от сотрясений, он делает „слоеный пирог“ из тяжелых плит, между которыми проложены резиновые трубки или стержни (рис. 136). Это, в сущности, механический фильтр. В сейсмографии берут для той же цели одну систему с очень медленным периодом; для высокочастотных колебаний такой механический фильтр гораздо эффективнее. А. И. Данилевский применял аналогичные устройства для записи граммофонных пластинок (при передаче акустических колебаний на резец).

Рассмотрением фильтров мы закончим наш курс в этом году. Сделаем несколько заключительных замечаний.

Колебания — очень важная и специфичная область.

Одна из характерных черт колебательных систем — та, что они несут в себе свой масштаб времени. Он определяется собственным периодом колебаний, или, если говорить более общо, динамическими свойствами системы. Именно этот временной масштаб является решающим в вопросах резонанса, а также в вопросе о связи, о взаимодействии между колебательными системами. Если колебательные системы расстроены, то даже на „близком“ расстоянии они почти не действуют друг на друга; если они настроены, то они сильно взаимодействуют даже на „большом“

расстоянии¹. Таким образом, какое расстояние между колебательными системами следует считать близким, а какое — далеким, зависит от их колебательных свойств.

Эти представления особенно важны в волновой механике. Она в каком-то смысле рассматривает всякое тело как колебательную систему. В частности, молекулы являются колебательными системами. Их взаимодействие коренным образом зависит от соотношений их колебательных свойств. Поэтому пространственное расстояние двух молекул само по себе не дает еще указаний на то, действуют они друг на друга заметно или нет.

Итак, законы взаимодействия колебательных систем очень специфичны. Вместе с тем они являются общими для самых различных явлений, происходящих в электрических контурах, маятниках, кристаллах. Это — совершенно разные вещи, но колебательные закономерности их объединяют.

Из-за недостатка времени мы очень бегло коснулись теории нелинейных колебаний и совсем не затронули колебаний распределенных (сплошных) систем. Между тем потребность в этих разделах теории колебаний — насущная.

Струна, кабель — это сплошные системы. Как происходит переход от дискретной системы к сплошной? Мы можем это выяснить на примере фильтра.

Для дискретной системы (фильтра) мы имели:

$$u^{(k)} = a_s \sin \frac{ks\pi}{n+1} \cos(\omega_s t + \varphi_s), \quad (24)$$

$$\omega_s = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{s\pi}{2(n+1)} \quad (25)$$

(через $u^{(k)}$ здесь обозначено напряжение на k -том звене). У нас было n ячеек и n соответствующих им величин $u^{(k)}$. Каждая из них — функция времени.

Пусть каждая ячейка делается все меньше, а число ячеек — все больше. Тогда неудобно характеризовать ячейку ее номером. Введем расстояние x от начала системы до рассматриваемой ячейки. Пусть расстояние между ячейками будет d . Тогда

$$x = kd, \quad l = (n+1)d. \quad (26)$$

¹ [См. 25-ю лекцию.]

Подставляя (26) в (24), получаем:

$$u(x) = a_s \sin \frac{s\pi x}{l} \cos(\omega_s t + \varphi_s). \quad (27)$$

В этой формуле дискретность исчезла, но это пока только видимость, так как u имеет смысл лишь для дискретных значений x .

Пусть теперь число ячеек растет неограниченно, т. е. $n \rightarrow \infty$. В пределе u становится непрерывной функцией *двух* величин: t и x . Легко убедиться, что эта функция удовлетворяет одному дифференциальному уравнению, но в частных производных, а именно уравнению

$$\frac{1}{L_1 C_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (28)$$

где L_1 и C_1 — индуктивность и емкость на единицу длины. Этому дифференциальному уравнению в частных производных удовлетворяет вся совокупность функций (27), соответствующих различным значениям s .

Задачи о колебаниях сплошных систем приводят к составлению и решению дифференциальных уравнений в частных производных с добавлением краевых условий (краевые условия играют в математике чрезвычайно важную роль). Этот метод гораздо более могуч, чем методы, применяемые при рассмотрении дискретных систем со многими степенями свободы. Там мы умеем решать некоторые задачи только потому, что они обладают определенной симметрией, например в случае одинаковых звеньев. Заметим также, что методы, применяемые для решения задач о сплошных системах, охватывают и системы, имеющие больше одного измерения.

Таким образом, открывается целая новая область исследования, интересная и физически и математически, — колебания *сплошных* систем.

Мы знаем, что общим решением в случае дискретной системы (s принимает только конечное число значений: $s=1, 2, \dots, n$) является

$$u = \sum_{s=1}^n a_s \sin \frac{k s \pi}{n+1} \cos(\omega_s t + \varphi_s). \quad (29)$$

Можно ожидать, что и в случае сплошной системы, когда s

принимает бесконечный ряд значений, общее решение может быть построено по аналогии с (29), т. е. имеет вид

$$u = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \sin \frac{s\pi x}{l} \cos (\omega_s t + \varphi_s). \quad (30)$$

Правильность этого предположения можно доказать. То, что решение (30) является общим, означает, что оно должно изображать — при соответствующем подборе величин a_s и φ_s — любой начальный вид функции u и ее производной по времени:

$$\left. \begin{aligned} u(0, x) &= \sum_{s=1}^{\infty} a_s \cos \varphi_s \sin \frac{s\pi x}{l}, \\ \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} &= \sum_{s=1}^{\infty} a_s \omega_s \sin \varphi_s \sin \frac{s\pi x}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Мы говорили о кабеле. Но выражением, аналогичным (29), может быть описано также любое колебание однородной струны с закрепленными концами. Это нашел Бернулли, и он сделал отсюда такой вывод: можно задать начальную форму струны как угодно — изогнуть ее произвольным образом и отпустить. Но тогда формула (31) должна представлять *любую* функцию. Итак, если правильно, что любое колебание струны можно выразить как сумму колебаний вида (30), то любую функцию можно представить в виде ряда синусов. Здесь на основании физических соображений высказывается глубокое математическое утверждение.

Если емкость на единицу длины не постоянна, а изменяется с x , то решениями будут не синусы, а какие-то другие функции. Но все соображения о разложении произвольной функции на систему функций, являющихся решением задачи о колебаниях сплошной системы, остаются в силе. Для различных неоднородных систем получаются различные системы таких „собственных функций“. Учение о разложении заданной функции в ряд по собственным функциям рассматриваемой колебательной задачи имеет очень существенное значение и в математике и в физике.