

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

И. Н. МЕШКОВ Б. В. ЧИРИКОВ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Часть

I

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Ответственный редактор
акад. А. Н. Скринский



НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1987

Мешков И. Н., Чириков Б. В. Электромагнитное поле.
Часть 1. Электричество и магнетизм.— Новосибирск: Наука, 1987.

В монографии последовательно изложены основные положения классической электромагнитной теории, включая движение заряженных частиц в поле и структуру электромагнитной волны. Дана наглядная картина физических явлений в сочетании с упрощенным теоретическим анализом. Описаны важнейшие эксперименты и интересные с точки зрения физики практические приложения.

Книга предназначена для специалистов в различных областях физики и техники, преподавателей, аспирантов и студентов вузов.

Рецензенты *Б. А. Луговцов, Д. Д. Рютов*

Игорь Николаевич Мешков
Борис Валерианович Чириков

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ
ПОЛЕ
Часть 1**

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Утверждено к печати
Институтом ядерной физики СО АН СССР

Редакторы издательства **л. А. Боярский, Т. Д. Семченко**
Художественный редактор **Т. Ф. Каминия**
Художник **А. И. Смирнов**
Технический редактор **А. В. Сурганова**
Корректоры **Е. Н. Зиминая, С. В. Блинова**

ИБ № 30196

Сдано в набор 31.07.86. Подписано к печати 19.02.87. МН-02614. Формат 60×90/16. Бумага книжно-журнальная. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 17. Усл. кр.-отт. 17. Уч.-изд. л. 17,6. Тираж 3350 экз. Заказ № 286. Цена 3 руб.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука». Сибирское отделение.
630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

Интернет версия подготовлена для сервера Физического факультета НГУ, <http://www.phys.nsu.ru>

Предисловие	6
Глава I. Электростатика	8
§ 1. Закон Кулона	—
§ 2. Электрическое поле	9
§ 3. Принцип суперпозиции	—
§ 4. Геометрия поля	10
§ 5. Электрические мультиполи	11
§ 6. Закон сохранения потока электрического поля	13
§ 7. Основное уравнение электростатики (уравнение Пуассона)	16
§ 8. Общее решение уравнения Пуассона. Понятие о δ -функции	19
§ 9. Энергия электрического поля	20
§ 10. Проводник в электрическом поле	22
§ 11. Уравнение Лапласа	23
§ 12. Электрическая емкость	26
§ 13. Экспериментальная проверка закона Кулона	29
Глава II. Диэлектрики	32
§ 14. Поляризация диэлектрика	—
§ 15. Электрическое поле в диэлектрике	34
§ 16. Граничные условия	38
§ 17. Энергия поля в среде	40
§ 18. Давление поля	42
§ 19. Электростатические силы в среде	44
Глава III. Электрический ток	46
§ 20. Электрический ток. Уравнение непрерывности	—
§ 21. Ток в металлах. Закон Ома	49
§ 22. Ток в изоляторах. Граничные условия при наличии тока	51
§ 23. Релаксация зарядов в среде	54
§ 24. Электрические цепи. Законы Кирхгофа	56
§ 25. Электрические цепи с емкостью	59
§ 26. Электрический разряд	62
§ 27. Пучки заряженных частиц	65
Глава IV. Магнитное поле в вакууме	70
§ 28. Магнитное поле тока	—
§ 29. Магнитное поле и теория относительности	73
§ 30. Самофокусировка пучка заряженных частиц: пинч-эффект	76
§ 31. Вектор-потенциал	77
§ 32. Основные уравнения магнитного поля	80
§ 33. Закон сохранения циркуляции магнитного поля	81
§ 34. Магнитный диполь	84
§ 35. Взаимодействие диполя с магнитным полем	87
§ 36. Прецессия магнитного момента. Магнитный резонанс	89

Глава V. Магнитное поле в среде	92
§ 37. Намагничивание	—
§ 38. Магнитная индукция	95
§ 39. Ток смещения в среде	98
§ 40. Граничные условия для магнитного поля	99
§ 41. Магнитные цепи	102
§ 42. Понятие о ферромагнетизме	106
§ 43. Постоянные магниты	109
§ 44. Плазма как диамагнетик	112
Глава VI. Электромагнитная индукция	114
§ 45. Закон электромагнитной индукции. Уравнения Максвелла	—
§ 46. Энергия магнитного поля. Индуктивность	119
§ 47. Давление магнитного поля	121
§ 48. Сохранение магнитного потока. Электрические цепи	122
§ 49. Индуктивность и масса	124
§ 50. Сверхсильные магнитные поля	126
§ 51. Взаимоиндукция	127
§ 52. Цепи переменного тока	130
§ 53. Технические применения электромагнитной индукции	132
§ 54. Сверхпроводимость	138
§ 55. Поток энергии в электромагнитном поле	142
Глава VII. Движение заряженных частиц в электромагнитном поле	145
§ 56. Частица в однородном и постоянном поле	—
§ 57. Частица в неоднородном поле. Закон сохранения обобщенного момента	147
§ 58. Закон сохранения фазового объема пучка заряженных частиц	157
Глава VIII. Электромагнитные волны	160
§ 59. Радиоволны	—
§ 60. Оптический диапазон. Источники света	162
§ 61. Глаз	164
§ 62. Измерение цвета, или колориметрия	168
§ 63. Искусственные приемники света	172
§ 64. Гамма-излучение	174
Глава IX. Структура электромагнитной волны	175
§ 65. Свободное электромагнитное поле	—
§ 66. Волновое уравнение для полей	177
§ 67. Волновое уравнение для потенциалов	178
§ 68. Плоские волны	179
§ 69. Монохроматическая волна. Поляризация волны	181
§ 70. Волновой вектор. Эффект Доплера	185
§ 71. Аномальный эффект Доплера. Черенковское излучение	189
Глава X. Отражение и преломление электромагнитной волны	192
§ 72. Зеркало	193
§ 73. Преломление волны	196
§ 74. Полное внутреннее отражение. Туннельный эффект	200
§ 75. Стоячая волна	204
§ 76. Резонаторы	205
Глава XI. Спектральный анализ	209
§ 77. Спектральное разложение. Периодическое поле	—
§ 78. Спектральное разложение. Импульсное поле	214

§ 79. Соотношение неопределенности	218
§ 80. Спектральное разложение. Стохастическое поле	222
§ 81. Экскурс в теорию информации. Количество информации	231
§ 82. Экскурс в теорию информации. Поток информации	234
§ 83. Экскурс в теорию информации. Принцип Сциларда — Бриллюэна	241
Глава XII. Дисперсия	243
§ 84. Фазовая и групповая скорости волны	—
§ 85. Расплывание волнового пакета	248
§ 86. Волноводы	251
§ 87. Скин-эффект	258
Приложение. Единицы физических величин	268
Литература	270
Предметный указатель	271

Предлагаемая вниманию читателей книга представляет собой попытку единого изложения классических (неквантовых) электромагнитных явлений, начиная от электростатики и кончая излучением электромагнитных волн. Она состоит из двух частей. Часть 1 посвящена фундаментальным законам электромагнетизма, приводящим к системе уравнений Максвелла. В части 2 рассматриваются волновые и оптические процессы, а также излучение электромагнитных волн.

Особенность настоящей монографии — попытка объединения традиционного изложения на языке общей физики с упрощенным анализом методами теоретической физики. Преимуществом такого построения является возможность всестороннего рассмотрения основных физических явлений как с точки зрения эксперимента и наглядных качественных представлений, так и теоретически. Подобный подход способствует более глубокому пониманию физических законов. Главный недостаток принятого построения книги связан со значительным упрощением теоретического материала, что вызвано желанием снять математические трудности при первом знакомстве с предметом. Поэтому приходится отказываться от целого ряда специальных методов теоретической физики. Содержание книги значительно отличается от традиционного, особенно это касается части 2. Так, все изложение базируется на широком использовании теории относительности и фурье-анализа.

Авторы выражают искреннюю благодарность своим товарищам по физическому факультету Новосибирского государственного университета и Институту ядерной физики Сибирского отделения АН СССР, многочисленные полезные дискуссии с которыми способствовали написанию этой монографии, — Л. М. Баркову, Б. Н. Брейзману, Р. Д. Гайнутдинову, М. С. Золотареву, Г. Н. Кулипанову, Г. Л. Коткину, В. В. Пархомчуку, Д. В. Пестрикову, А. Н. Скринскому, Д. Д. Рютову, Ю. Б. Хриповичу и многим другим. Авторы благодарны Л. А. Боярскому, Е. А. Переведенцеву, внимательно прочитавшим рукопись книги и сделавшим множество полезных замечаний и добавлений, а также Л. И. Бейбулатовой, А. В. Гинзбург, А. Ф. Кулаковой, Н. А. Савельевой и Б. М. Смирнову, оказавшим большую помощь в подготовке монографии к печати.

Основное физическое содержание книги, подход к изложению ряда физических явлений следуют традициям курса общей физики, поставленного в НГУ покойным академиком Г. И. Будкером и читавшегося им совместно с одним из авторов. На протяжении ряда лет авторы имели неоценимую возможность обсуждать с ним наиболее острые и запутанные проблемы современной физики, в том числе и по материалу этой книги.

Авторы будут весьма признательны читателям за критические замечания и пожелания, которые следует направлять по адресу: 630090, г. Новосибирск, ИЯФ СО АН СССР.

13 мая 1985 года
Академгородок

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

§ 1. ЗАКОН КУЛОНА

Изучение электромагнитных процессов (явлений) проще всего начать с рассмотрения электростатического взаимодействия «заряженных» тел, или электростатики. Основой электростатики считается открытый в 1785 г. Кулоном закон взаимодействия двух «точечных» (т. е. достаточно малых) заряженных тел:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}. \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{F}_{12}$ — электростатическая (электрическая) сила, действующая со стороны первого тела на второе; $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$; $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — радиус-векторы тел; q_1, q_2 — их электрические заряды. Последние определяют и измеряются с помощью этого же закона.

Закон Кулона формально совпадает с законом тяготения Ньютона. Совпадение, по-видимому, не случайно, а имеет глубокий физический смысл, связанный с тем, что масса покоя как фотона, так и гипотетического гравитона равна нулю (см. § 13). Особенностью электрического взаимодействия является существование зарядов обоих знаков, тогда как «антигравитация» до сих пор не обнаружена.

Естественная единица заряда — так называемый *квант* заряда, или элементарный заряд, являющийся одной из фундаментальных постоянных современной физики. С высокой степенью точности он одинаков для всех заряженных элементарных частиц (см. § 13). В гауссовой системе единиц (г) и СИ этот заряд равен $e = (4,803242 \pm 0,000014) \cdot 10^{-10}$ (г) $= (1,6021892 \pm 0,0000046) \cdot 10^{-19}$ Кл.

Кулоновское взаимодействие (1.1) потенциально, и для него всегда можно ввести потенциальную энергию:

$$U_{12}(\mathbf{r}) = -q_1 q_2 \int \frac{(\mathbf{r} d\mathbf{r})}{r^3} = -q_1 q_2 \int \frac{r d\mathbf{r}}{r^3} = \frac{q_1 q_2}{r} + C. \quad (1.2)$$

Сила взаимодействия определяется через $U(\mathbf{r})$ с помощью выражения

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U(\mathbf{r}) \equiv -\nabla U(\mathbf{r}), \quad (1.3)$$

где ∇ (набла) обозначает дифференциальный оператор

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (1.4)$$

Например,

$$\nabla U(|\mathbf{r}|) = \frac{dU}{dr} \nabla r = \frac{dU}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

§ 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Закону Кулона можно придать совершенно иной физический смысл:

$$\mathbf{F}_{12} = q_2 \left[\frac{q_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \equiv q_2 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}). \quad (2.1)$$

Этим соотношением вводится принципиально новое понятие — *электрическое поле*, создаваемое зарядом q_1 во всем окружающем пространстве, а также определяется закон действия данного поля на любой заряд.

Соответственно, вместо потенциальной энергии взаимодействия двух зарядов $U(\mathbf{r})$ вводится новое понятие потенциала электрического поля $\varphi(\mathbf{r})$:

$$U_{12}(\mathbf{r}) = \frac{q_1 q_2}{r} \equiv q_2 \varphi_1(\mathbf{r}), \quad (2.2)$$

который связан с напряженностью поля выражением

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi. \quad (2.3)$$

Потенциальность электрического поля означает, что интеграл по замкнутому контуру $\oint (\mathbf{E}, d\mathbf{r}) = 0$. Единицей потенциала в СИ является вольт, а единицей напряженности — вольт на метр, их связь с гауссовыми единицами: $1 \text{ (г)} = 300 \text{ В}$, $1 \text{ (г)} = 3 \cdot 10^4 \text{ В/м}$.

Описания электрических явлений с помощью прямого силового взаимодействия (теория дальнего действия) и с помощью промежуточного электрического поля (теория ближнего действия) эквивалентны в пределах электростатики. Только в электродинамике, где существуют свободные электромагнитные волны, независимые от зарядов, была доказана реальность электромагнитного поля.

§ 3. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

Для поля системы зарядов справедлив принцип суперпозиции:

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i; \quad \varphi = \sum_i \varphi_i, \quad (3.1)$$

который так же, как и закон Кулона, является экспериментальным фактом. Замечательно, что оба закона остаются до сих пор «абсо-

лотно» точными в том смысле, что пока не обнаружены никакие отклонения от них (см. § 13, 15).

Принцип суперпозиции имеет место и в ряде других физических явлений, например при сложении упругих деформаций от нескольких сил. В последнем случае, однако, этот принцип является приближенным и нарушается при больших деформациях, что физически вполне понятно. Отсутствие аналогичных нарушений в электромагнитном поле придает здесь принципу суперпозиции фундаментальный характер. Не исключено, впрочем, что мы еще просто не дошли до таких значений напряженности поля, когда данный принцип перестанет выполняться.

§ 4. ГЕОМЕТРИЯ ПОЛЯ

Конфигурация поля может быть наглядно выражена с помощью картины силовых линий. Силовая линия представляет собой пространственную кривую, вектор касательной к которой совпадает в каждой точке с вектором $\mathbf{E}$ (с точностью до произвольного масштабного множителя). Уравнение силовой линии можно записать в декартовых координатах в виде

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (4.1)$$

или в произвольной ортогональной системе координат (α_i) с коэффициентами Ламэ h_i :

$$\frac{h_1 d\alpha_1}{E_1} = \frac{h_2 d\alpha_2}{E_2} = \frac{h_3 d\alpha_3}{E_3}. \quad (4.2)$$

Силовые линии поля точечного заряда представляют собой семейство радиально расходящихся прямых ($\theta, \varphi = \text{const}$, где r, θ, φ — сферические координаты). Из этого примера следует, что напряженность поля пропорциональна плотности силовых линий. Ниже мы увидим, что данное правило сохраняется и в общем случае.

Силовые линии:

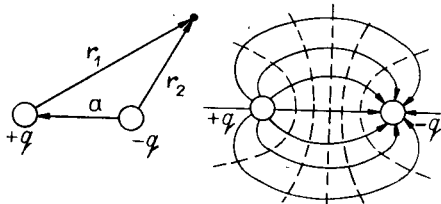
1) начинаются и кончаются на зарядах,
2) не замкнуты, так как $\oint \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0$ в силу потенциальности электрического поля,

3) не пересекаются ввиду однозначности поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, за исключением точек, где $\mathbf{E} = 0$.

Несколько сложнее выглядит поле двух точечных зарядов. Такое поле для случая одинаковых по величине, но противоположных по знаку зарядов изображено на рис. 1.1. Такая система называется (электрическим) диполем (см. § 5). Потенциал поля диполя равен сумме кулоновских потенциалов:

$$\varphi_d = q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \approx \frac{(\mathbf{r} \mathbf{a} q)}{r^3}, \quad (4.3)$$

Рис. 1.1. Электрический диполь и его поле.



где a — расстояние между зарядами. Последнее приближенное выражение справедливо при $r > a$.

Картину электрического поля можно также наглядно представить с помощью семейства эквипотенциалей — поверхностей равного потенциала (см. рис. 1.1). Для одного точечного заряда эквипотенциалами является семейство концентрических сфер. Из соотношения $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ следует, что силовые линии везде нормальны к эквипотенциалам.

§ 5. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МУЛЬТИПОЛИ

Принцип суперпозиции позволяет вычислять потенциал и поле произвольной системы зарядов. Однако при большом числе зарядов в общем случае получаются громоздкие выражения, пригодные лишь для численных расчетов с помощью ЭВМ. Только иногда эти выражения удается упростить так, что их можно использовать в аналитической теории, имеющей дело с формулами, а не с конкретными числовыми значениями физических величин. Одним из таких важных частных случаев является поле системы зарядов на расстояниях R , много больших размеров системы a . При этом в задаче появляется малый параметр a/R , по которому можно произвести разложение (в ряд Тейлора).

Выбрав начало координат где-нибудь внутри системы зарядов, запишем общее выражение для потенциала в виде

$$\varphi(\mathbf{R}) = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|}, \quad (5.1)$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор заряда q_i (рис. 1.2). Конечно, вначале следует найти потенциал поля, поскольку это — скалярная величина, и формула для нее значительно проще, чем для вектора напряженности $\mathbf{E}$. Разлагая выражение

$$\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{R} - \left(\mathbf{r}_i, \nabla \frac{1}{R} \right) + O\left(\frac{r_i^2}{R^3}\right)$$

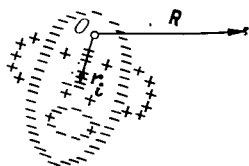


Рис. 1.2. Система зарядов.

вблизи $r_i = 0$ и ограничиваясь двумя первыми членами, получим приближенную формулу

$$\varphi \approx \frac{Q}{R} + \frac{(\mathbf{R}, \mathbf{d})}{R^3} \equiv \varphi_0 + \varphi_1, \quad (5.2)$$

где $Q = \sum q_i$ — полный заряд системы, а

$$\mathbf{d} = \sum_i \mathbf{r}_i q_i \quad (5.3)$$

называется ее *дипольным моментом*. Первое слагаемое (φ_0) в (5.2) совпадает с полем точечного заряда Q , а второе (φ_1) — с полем диполя (4.3), в соответствии с чем φ_0 называют кулоновским, а φ_1 — дипольным потенциалами.

Дипольный потенциал является малой поправкой к кулоновскому: $\varphi_1 \sim \varphi_0 a/R$. Однако, если полный заряд $Q = 0$ (или близок к нулю), дипольный член может играть основную роль.

Разложение (5.2) можно продолжить дальше и получить квадрупольный (φ_2), октупольный (φ_3), ..., (φ_l) потенциалы, порядок которых можно оценить так:

$$\varphi_l \sim \varphi_0 \left(\frac{a}{R} \right)^l \sim \frac{Q}{R} \left(\frac{a}{R} \right)^l. \quad (5.4)$$

Отметим, что дипольный момент системы не является однозначным и зависит от произвольного выбора начала отсчета. При смещении последнего ($\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$) имеет место преобразование $\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{d} + \mathbf{r}_0 Q$. Отсюда ясно, что если $Q \neq 0$, всегда можно выбрать такое $\mathbf{r}_0$, чтобы $\mathbf{d} = 0$. Это показывает, что дипольный момент характеризует смещение «центра» заряда. Если же $Q = 0$, то $\mathbf{d}$ однозначно описывает пространственное разделение разноименных зарядов. Примером такой системы может служить заряженный плоский конденсатор.

Высшие мультипольные моменты характеризуют различные деформации системы зарядов относительно сферически-симметричного случая. В частности, квадрупольный момент описывает сплюснутость или вытянутость системы.

Мультиполи изображены на рис. 1.3. Один из них — заряженный плоский конденсатор (конечных размеров!), дипольный момент которого $d = qh = EV/4\pi$.

Задача 1. Найти напряженность дипольного поля.

Используя общую формулу $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$, получаем

$$\mathbf{E} = -\nabla \frac{(\mathbf{R}, \mathbf{d})}{R^3} = -\frac{\mathbf{d}}{R^3} + \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{R}, \mathbf{d})}{R^5}. \quad (5.5)$$

Задача 2. Найти силу, действующую на диполь в слабонеоднородном электрическом поле.

Разлагая точное выражение для силы, получим

$$\mathbf{F} = \sum q_i \mathbf{E}(\mathbf{r}_i) \approx Q \cdot \mathbf{E}(0) - \sum q_i (\mathbf{r}_i, \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=0} = (\mathbf{d}, \nabla) \mathbf{E} = \nabla (\mathbf{d}, \mathbf{E}). \quad (5.6)$$

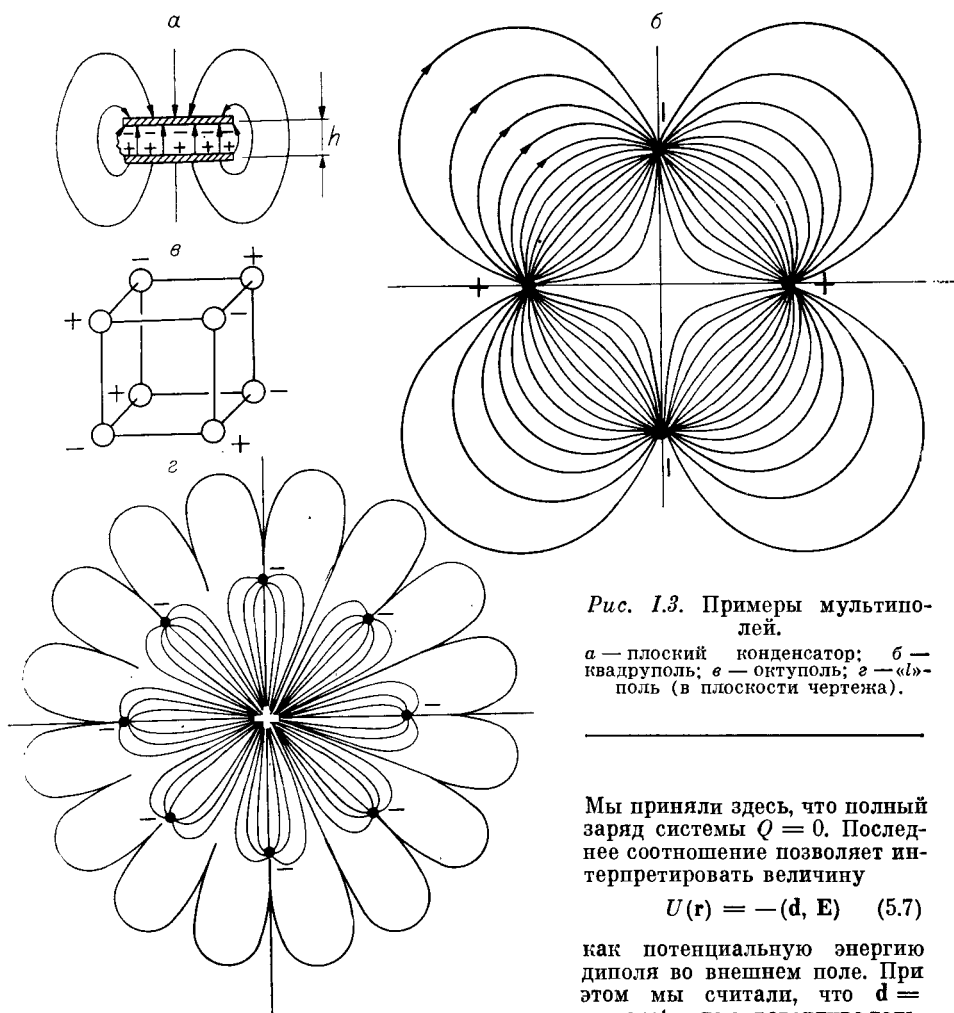


Рис. 1.3. Примеры мультиполей.

a — плоский конденсатор; *б* — квадруполь; *е* — октауполь; *з* — «*l*»-поль (в плоскости чертежа).

Мы приняли здесь, что полный заряд системы $Q = 0$. Последнее соотношение позволяет интерпретировать величину

$$U(\mathbf{r}) = -(\mathbf{d}, \mathbf{E}) \quad (5.7)$$

как потенциальную энергию диполя во внешнем поле. При этом мы считали, что $\mathbf{d} = \text{const}$, что справедливо толь-

ко для «твердых» диполей ($\mathbf{d}$ не зависит от $\mathbf{E}$). Для квазиупругих диполей $\mathbf{d} \propto \mathbf{E}$ (подробнее см. § 14) и поэтому

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{(\mathbf{d}, \mathbf{E})}{2}. \quad (5.8)$$

§ 6. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ПОТОКА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Пользуясь понятием силовых линий, можно провести аналогию между электрическим полем и ламинарным течением несжимаемой жидкости. В последнем случае вводятся линии тока — кривые, вектор касательной к которым совпадает в каждой точке с вектором скорости жидкости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Подобно силовым линиям, линии тока дают

геометрическую картину поля скоростей жидкости. Другим полезным и наглядным понятием является понятие трубки тока, боковая поверхность которой образована линиями тока (рис. 1.4). Аналогично можно говорить о трубке поля. Наконец, введем понятие потока:

$$Q = \int_S (\mathbf{v}, d\mathbf{S}), \quad (6.1)$$

который пропорционален количеству жидкости, протекающей через поверхность S в единицу времени. Точно так же можно определить поток электрического поля:

$$N = \int (\mathbf{E}, d\mathbf{S}), \quad (6.2)$$

хотя он и не имеет такого наглядного физического смысла, как поток жидкости.

Легко видеть, что поток постоянен вдоль трубки поля, поскольку вектор $\mathbf{E}$ не пересекает ее боковой поверхности (т. е. $(\mathbf{E}, d\mathbf{S}) \equiv 0$). С другой стороны, по определению (см. рис. 1.4), линии поля также не пересекают трубки, а значит, внутри нее число линий остается постоянным. Отсюда можно заключить, что поток через некоторую поверхность пропорционален числу силовых линий, пересекающих ее, а напряженность $\mathbf{E}$ оказывается, в свою очередь, пропорциональной плотности линий поля.

Рассмотрим теперь поток через замкнутую поверхность, считая, что силовые линии, выходящие наружу (вектор $d\mathbf{S}$ направлен по внешней нормали), образуют положительный поток, а входящие — отрицательный. Если линии непрерывны, то входит и выходит их одинаковое число, и, следовательно, полный поток через замкнутую поверхность равен нулю. С другой стороны, на основании общей теоремы Остроградского — Гаусса можно написать

$$\oint (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = 0. \quad (6.3)$$

Это справедливо для произвольного объема, если всюду

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (6.4)$$

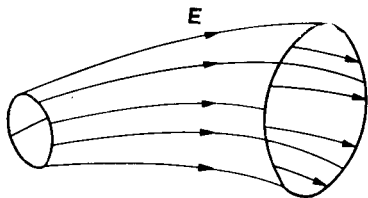


Рис. 1.4. Трубка поля.

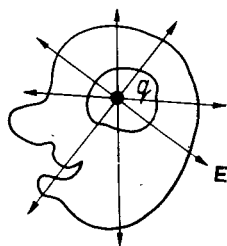


Рис. 1.5. Закон сохранения потока электрического поля.

. С геометрической точки зрения это есть условие непрерывности силовых линий.

Найдем поток поля точечного заряда q через произвольную замкнутую поверхность S . Если последняя не охватывает заряда, то силовые линии внутри нее непрерывны и, как мы видели выше, поток равен нулю. Если же q находится внутри, то предыдущее рассмотрение неприменимо, так как силовые линии расходятся от заряда. Для вычисления потока в этом случае заметим, что он не зависит от формы S (рис. 1.5), поскольку любую поверхность пересекает одно и то же число силовых линий. Выбрав в качестве S сферу, центр которой совпадает с q , получим

$$N = \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi q. \quad (6.5)$$

В силу принципа суперпозиции равенство остается справедливым и для произвольной системы зарядов, причем под q в (6.5) следует теперь понимать сумму зарядов, расположенных внутри замкнутой поверхности:

$$N = \oint (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 4\pi q. \quad (6.6)$$

Это соотношение называют обычно теоремой Гаусса. С физической точки зрения равенство (6.6) можно рассматривать как некоторый закон сохранения в том смысле, что поток не зависит от поверхности, а также и от времени при условии, что заряды не пересекают поверхность.

Хотя электрический заряд дискретен, число его носителей в макроскопических телах столь велико, что можно ввести понятие плотности заряда, используя представление о непрерывном распределении последнего в пространстве

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}. \quad (6.7)$$

Здесь объем ΔV физически бесконечно мал, т. е. он мал по сравнению с характерными размерами макроскопической системы, но велик по сравнению с микроструктурой тела (межатомными расстояниями).

С помощью плотности заряда закон сохранения потока можно записать в виде:

$$4\pi \int \rho dV = \oint (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = \langle E_n \rangle S, \quad (6.8)$$

где $\langle E_n \rangle$ — среднее значение нормальной составляющей поля по поверхности S . В отдельных случаях симметричных систем поверхность удастся выбрать таким образом, что E_n остается постоянной на всей поверхности. Тогда закон сохранения потока позволяет вычислить все поле, а не только его среднее значение.

Задача. Найти поле равномерно заряженных шара, цилиндра и плоского слоя.

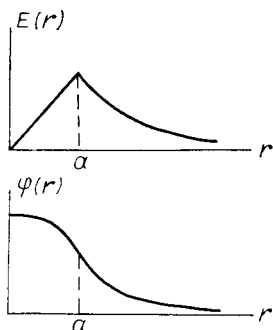


Рис. 1.6. Поле и потенциал равномерно заряженного шара.

В первом случае

$$\rho = \begin{cases} 3q/4\pi a^3; & r \leq a, \\ 0; & r > a. \end{cases} \quad (6.9)$$

В силу симметрии электрическое поле имеет только радиальную составляющую E_r , и в качестве поверхности можно выбрать сферу радиуса r , концентрическую с шаром. Согласно (6.8) получаем

$$E_r = \begin{cases} qr/a^3; \\ q/r^2; \end{cases} \quad \varphi(r) = \begin{cases} \frac{q}{2a} \left(3 - \frac{r^2}{a^2} \right); & r \leq a; \\ q/r; & r \geq a, \end{cases} \quad (6.10)$$

где q , a — полный заряд и радиус шара. Графики поля и потенциала (6.10) изображены на рис. 1.6. Аналогично для цилиндра

$$E_r = \begin{cases} 2q_1 r/a^2; & r \leq a; \\ 2q_1/r; & r \geq a, \end{cases} \quad (6.11)$$

q_1 — заряд на единицу длины цилиндра радиуса a . Наконец, для плоского слоя

$$E_x = \begin{cases} -2\pi\sigma; & x \leq -a; \\ 2\pi\sigma x/a; & |x| \leq a; \\ 2\pi\sigma; & x \geq a, \end{cases} \quad (6.12)$$

σ — заряд на единицу площади слоя толщиной $2a$, x — координата вдоль нормали к слою.

§ 7. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ (УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА)

С помощью теоремы Остроградского — Гаусса запишем закон сохранения потока в виде

$$\oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \int 4\pi\rho dV. \quad (7.1)$$

Поскольку это соотношение справедливо для любой поверхности S , должно выполняться равенство

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (7.2)$$

Учитывая, что $E = -\nabla\varphi$, можно написать

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad (7.3)$$

где символ Δ обозначает оператор Лапласа:

$$\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (7.4)$$

На этом примере видно, что с дифференциальным оператором ∇ можно обращаться как с вектором, значительно упрощая анализ. В частности, оператор Δ есть просто скалярный квадрат ∇ , а $\operatorname{div} E = (\nabla, E) = \partial E_i / \partial x_i$ (здесь и дальше мы опускаем знак суммы, подразумевая суммирование по повторяющимся индексам).

Соотношение (7.3), или эквивалентное ему (7.2), называют *основным уравнением электростатики*, так как оно дает возможность находить электрическое поле произвольной системы покоящихся зарядов. Уравнение (7.3) носит название *уравнения Пуассона*, а его частный случай: $\Delta\varphi = 0$ — *уравнения Лапласа*.

В качестве примера применения уравнения Пуассона рассмотрим разобранные в § 6 три случая. Потенциал однородно заряженного слоя зависит в силу симметрии только от x , поэтому

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \begin{cases} 2\pi\sigma/a; & |x| \leq a; \\ 0; & |x| \geq a. \end{cases} \quad (7.5)$$

Фактически имеются три различные области поля: $x \leq -a$; $|x| \leq a$; $x \geq a$. Проинтегрируем уравнение (7.5) в каждой из этих областей:

$$\varphi = \begin{cases} Ax + B; & x \leq -a; \\ -\frac{\pi\sigma x^2}{a} + Cx + D; & |x| \leq a; \\ Fx + G; & x \geq a, \end{cases} \quad (7.6)$$

где A, B, C, D, F, G — постоянные интегрирования. Одна из постоянных B, D, G может быть выбрана произвольно в силу неоднозначности потенциала. Положим, например, $\varphi(0) = 0$, откуда $D = 0$. Далее, вследствие симметрии поля относительно плоскости $x = 0$, имеем $F = -A$; $G = B$; $C = 0$. Оставшиеся две постоянные, например A, B , можно найти, «сшивая» решения в разных областях на границе между ними. На границе должны выполняться как раз два условия:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}. \quad (7.7)$$

Первое означает непрерывность потенциала (в противном случае на границе возникали бы бесконечные поля), второе — непрерывность поля, что в силу уравнения (7.2) эквивалентно конечной плотности заряда. В рассматриваемом примере эти условия записываются в таком виде (при $x = -a$): $-Aa + B = -\pi\sigma a$; $A = 2\pi\sigma$.

Окончательно получаем:

$$\varphi = \begin{cases} \pi\sigma(2x + a); & x \leq -a; \\ -\pi\sigma x^2/a; & |x| \leq a; \\ -\pi\sigma(2x - a); & x \geq a, \end{cases} \quad (7.8)$$

что совпадает с (6.12).

Задача. Найти поле слоя зарядов при $x = 0$ в плотной квазинейтральной плазме на больших расстояниях от слоя.

В соответствии с распределением Больцмана плотность зарядов разного знака в плазме, находящейся в электрическом поле, дается выражением $n_{\pm} = n_0 e^{\mp e\varphi/T}$, где T , n_0 — температура и плотность невозмущенной плазмы ($|x| \rightarrow \infty$). Тогда уравнение Пуассона принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi e(n_+ - n_-) \approx \frac{8\pi n_0 e^2 \varphi}{T} \quad (7.9)$$

при условии, что $e\varphi \ll T$. Отсюда

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(0) e^{-|x|/l_D}, \\ E(x) &= E(0) e^{-|x|/l_D}, \quad l_D = \sqrt{\frac{T}{8\pi n_0 e^2}}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

т. е. потенциал и электрическое поле затухают экспоненциально на характерной длине l_D , называемой *радиусом Дебая*.

Если не ограничиваться случаем $e\varphi \ll T$, то решение уравнения (7.9) для бесконечной плотности заряда при $x = 0$ имеет такой вид:

$$eE(x) = \frac{2T}{l_D \operatorname{sh}(x/l_D)} \rightarrow \begin{cases} \frac{4T}{l_D} e^{-x/l_D}; & x \gg l_D; \\ \frac{2T}{x}; & x \ll l_D. \end{cases}$$

Если ввести локальный радиус Дебая $l^2(x) = T/8\pi e^2 n_-(x)$, то при $x \ll l_D$ получим $x l(x) = 1/2$.

В общем случае уравнение Пуассона невозможно проинтегрировать аналитически. Это значит, что его решение не выражается через известные функции. То же самое имеет место и для обыкновенных дифференциальных уравнений (например, в механике). Это связано с тем, что при интегрировании в отличие, например, от дифференцирования класс функций расширяется. Поэтому существуют лишь отдельные приемы интегрирования, применение которых ограничено определенным классом задач. Практически всегда нужно в какой-то степени угадать решение. Отсюда традиционная фраза теоретика: «Будем искать решение этого уравнения в виде...» Обычно такое «угадывание» производится из физических соображений. В частности, очень важное значение имеет выбор системы координат. Так, в рассмотренных выше примерах выбор координат диктовался симметрией системы. В результате сложное уравнение в частных производных свелось к обыкновенному дифференциальному уравнению. Заметим, что последнее удалось проинтегрировать благодаря тому, что плотность заряда в каждой из областей

постоянна; при произвольном, хотя бы и симметричном, распределении заряда это уравнение, конечно, тоже интегрируется аналитически. В таком случае остается только численное интегрирование на ЭВМ, что всегда выполнимо.

§ 8. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА. ПОНЯТИЕ О δ -ФУНКЦИИ

Используя принцип суперпозиции и выражение для кулоновского потенциала, можно выразить потенциал зарядов, произвольно распределенных в ограниченном объеме, в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (8.1)$$

где интеграл берется по всему пространству. Это выражение называют иногда общим решением уравнения Пуассона, однако оно записано здесь в неявной форме, так как в общем случае интеграл не берется. Тем не менее такая форма решения очень удобна для получения различных приближенных выражений и оценок, например для мультипольного разложения (см. § 5). Отметим, что мы положили $\varphi(\infty) = 0$.

Можно ли применять выражение (8.1) в случае дискретного распределения заряда, например для одного точечного заряда? Оказывается, что это возможно с помощью специальной функции, изобретенной английским физиком Дираком, так называемой δ -функции. Для одного заряда q , расположенного в точке $\mathbf{r}_0$, положим

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (8.2)$$

Ясно, что введенная таким образом δ -функция должна обладать следующими необычными свойствами *):

1. $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ всюду, кроме $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, так как заряд точечный.
2. Плотность заряда в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ бесконечна, т. е. $\delta(0) = \infty$.
3. $\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = 1$, так как полный заряд равен q .
4. $\int f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = f(\mathbf{r}_0)$, где $f(\mathbf{r})$ — любая непрерывная функция.

С физической точки зрения распределение заряда в виде δ -функции можно представить как очень узкое распределение, ширина которого много меньше характерных размеров задачи (рис. 1.7). Например,

$$\delta(\mathbf{r}) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^{-r^2/2a^2}}{(2\pi a^2)^{3/2}}. \quad (8.3)$$

*) Введение δ -функции вызвало отчаянное сопротивление некоторых математиков. Например, И. фон Нейман в 1932 г. писал: «Дирак лицемерно (!) допустил существование функций такого рода» (Математические основания квантовой механики. — М.: Наука, 1964, с. 27).

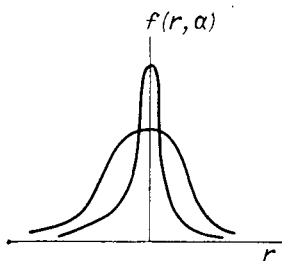


Рис. 1.7. Поведение функции (8.3) при $a \rightarrow 0$; $\lim_{a \rightarrow 0} f(r, a) \equiv \delta(r)$.

Подставляя выражение (8.2) в (8.1), найдем

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int q \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}. \quad (8.4)$$

Интегрирование здесь производится фактически по бесконечно малому объему вокруг точки $\mathbf{r}_0$, где все функции, кроме $\delta(\mathbf{r})$, можно считать постоянными. Отсюда и из соотношений (7.3) и (8.2) находим еще одно представление δ -функции:

$$\delta(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \Delta \left(\frac{1}{r} \right). \quad (8.5)$$

Теперь можно проверить непосредственно, что общее решение (8.1) действительно удовлетворяет уравнению Пуассона. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(\mathbf{r}) &= \int \rho(\mathbf{r}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \int \rho(\mathbf{r}') (-4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) dV' = \\ &= -4\pi \rho(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

§ 9. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Энергия кулоновского взаимодействия системы дискретных зарядов

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N q_i \varphi_{ij}, \quad (9.1)$$

где r_{ij} — расстояние между зарядами q_i , q_j , а φ_{ij} — потенциал поля q_j в точке, где находится q_i . Множитель $1/2$ связан с тем, что при суммировании каждая пара встречается дважды. При переходе к непрерывному распределению зарядов выражение (9.1) превращается в

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV = -\frac{1}{8\pi} \int \varphi \Delta \varphi dV. \quad (9.2)$$

Интересно отметить, что физический смысл последнего соотношения теперь уже несколько иной. В то время как (9.1) описывает только энергию взаимодействия разных зарядов ($i \neq j$), формула

(9.2) включает также и собственную энергию каждого из них (т. е. взаимодействие их элементов, взаимодействие «внутри» каждого из зарядов). В терминах поля можно сказать, что (9.2) описывает полную энергию электрического поля системы, тогда как (9.1) — только часть этой энергии.

Преобразуем (9.2), используя тождество $\nabla(\varphi \nabla \varphi) = (\nabla \varphi)^2 + \varphi \Delta \varphi$:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{8\pi} \int (\operatorname{div}(\varphi \nabla \varphi) - (\nabla \varphi)^2) dV = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_S \varphi (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) + \int \frac{E^2}{8\pi} dV. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Для любой ограниченной системы зарядов первый интеграл стремится к нулю при $S \rightarrow \infty$, так как потенциал такой системы убывает на больших расстояниях, по крайней мере как $1/r$, а E — как $1/r^2$ (см. § 5).

Величину $E^2/8\pi$ можно интерпретировать теперь как плотность энергии электрического поля:

$$w = E^2/8\pi. \quad (9.4)$$

Проделанный вывод справедлив только для электростатического поля (в общем случае возможен поток энергии излучения на бесконечности), тем не менее полученный результат оказывается общим (см. § 55).

Для примера вычислим энергию поля равномерно заряженного шара радиуса a . С помощью выражения (6.10) найдем

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_0^a \frac{q^2 r^2}{a^6} 4\pi r^2 dr + \frac{1}{8\pi} \int_a^\infty \frac{q^2}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{3}{5} \cdot \frac{q^2}{a}. \quad (9.5)$$

Согласно теории относительности, такое поле имеет массу $m = W/c^2$. Отсюда вытекает, в частности, что любая частица с массой m и зарядом e не может иметь размер, меньший

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2}, \quad (9.6)$$

так как масса частицы не может быть меньше массы ее поля. Этот результат справедлив, конечно, только в пределах применимости классической механики. Поэтому величина (9.6) называется классическим «радиусом» частицы. На расстояниях такого порядка классическая электродинамика становится неприменимой. Фактически она нарушается уже на расстояниях $\sim \hbar/mc$ из-за квантовых эффектов. Для электрона классический радиус $r_e \approx 2,8 \cdot 10^{-13}$ см, а квантовый радиус $\hbar/mc \approx 4 \cdot 10^{-11}$ см. Отметим, что квантовый «размер» электрона проявляется только в некоторых низкочастотных процессах (например, в атомах), тогда как при столкновении электрона высокой энергии с другими частицами он ведет себя как «точечный». Результаты экспериментов свидетельствуют о том, что в последнем случае «размер» электрона не превышает $5 \cdot 10^{-16}$ см (см. § 13).

§ 10. ПРОВОДНИК В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Вещество, в котором имеются свободные заряды (обычно электроны), называется проводником (электрического тока). Примерами проводников являются металлы (свободные электроны), электролиты (ионы), плазма (ионизированный газ — электроны и ионы). Для электростатических явлений поле внутри проводника равно нулю по определению ($E_i = 0$). Действительно, если $E_i \neq 0$, то возникает электрический ток, и мы выходим за рамки электростатики (см. § 20). Механизм исчезновения поля в проводнике связан со смещением свободных зарядов под действием внешнего поля как раз настолько, чтобы компенсировать внешнее поле^{*)}. Пример такой компенсации внутри проводящей пластинки изображен на рис. 1.8.

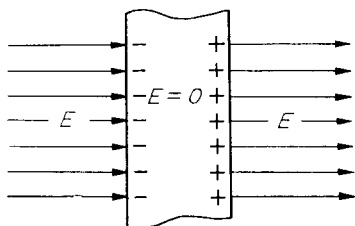


Рис. 1.8. Проводящая пластинка в однородном электрическом поле.

Поскольку $E_i = 0$, то и плотность заряда внутри проводника $\rho_i = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} E_i = 0$. Говорят, что проводник квазинейтрален. Избыточные заряды в проводнике могут поэтому размещаться только на его поверхности. Введем поверхностную плотность заряда

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}. \quad (10.1)$$

Все точки проводника имеют один и тот же потенциал ($E_i = 0$), в частности, поверхность проводника эквипотенциальна, а внешнее электрическое поле перпендикулярно к ней. Применяя теорему Гаусса к элементу поверхности проводника, получим

$$E_n = 4\pi\sigma. \quad (10.2)$$

Как распределяется заряд по поверхности? Поскольку одноименные заряды отталкиваются друг от друга, они стремятся разойтись в проводнике как можно дальше. Это приводит к накоплению заряда на наиболее удаленных частях, например на остриях. Поле вблизи острия можно приближенно представить как поле заряженной сферы того же радиуса кривизны. Отсюда напряженность поля и плотность заряда: $E \sim 4\pi\sigma \sim \phi/r$, где ϕ — потенциал проводника относительно соседних тел.

^{*)} Это справедливо только при нулевой температуре свободных зарядов. В противном случае поле сохраняется на размере порядка радиуса Дебая l_D (7.10). Хотя в пределах дебаевского слоя и существует электрическое поле, его сила компенсируется градиентом давления, так что ток равен нулю.

§ 11. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

При наличии проводников потенциал электрического поля системы зарядов можно представить так:

$$\varphi = \int \frac{\rho dV}{r} + \int_S \frac{\sigma dS}{r}. \quad (11.1)$$

Это выражение явным образом учитывает заряды на всей поверхности проводников S (σdS — элемент поверхностного заряда). Формула (11.1) вытекает также из общего решения (8.1), если плотность заряда в проводнике записать в виде $\rho_s(z) = \sigma \delta(z - z_0)$, где z — координата по нормали к поверхности, которая пересекает ось Z в точке z_0 .

Однако σ в (11.1) обычно не задана как ρ в (8.1), а сама зависит от поля. Поэтому (11.1) не является решением уравнения Пуассона в обычном смысле, а представляет собой так называемое интегральное уравнение (неизвестное поле входит под знак определенного интеграла через $\sigma = E_n/4\pi$).

Чтобы избежать этих осложнений, можно в уравнении Пуассона учитывать только плотность зарядов вне проводников, а вместо σ задать потенциалы на них. Иными словами, мы должны решать уравнение Пуассона при дополнительных граничных условиях:

$$\varphi(\mathbf{r})|_{S_i} = \varphi_i. \quad (11.2)$$

Простейшим является случай полного отсутствия внешних зарядов ($\rho = 0$), когда нужно решать уравнение Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0 \quad (11.3)$$

с граничными условиями (11.2).

Задача 1. Найти поле между двумя коаксиальными цилиндрами радиусов r_1, r_2 , разность потенциалов между которыми равна V .

В цилиндрических координатах с учетом аксиальной симметрии уравнение Лапласа $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0$ имеет решение $\varphi = -A \ln r_2 + B$. Выбирая нулевой потенциал на наружном цилиндре, найдем $B = -A \ln r_2$, $A = -V/\ln(r_2/r_1)$. По теореме Гаусса, заряд на внутреннем цилиндре (на единицу длины) $q_1 = -\frac{1}{4\pi} \times \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_1} 2\pi r_1 = \frac{V}{2 \ln r_2/r_1}$. Заряд на внутренней поверхности внешнего цилиндра равен $-q_1$.

Если потенциалы на проводниках не заданы (так называемый проводник с «плавающим» потенциалом), но, конечно, по-прежнему постоянны, то неизвестные константы φ_i в граничных условиях находятся из дополнительных требований:

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{S_i} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = q_i, \quad (11.4)$$

где q_i — заданные заряды на проводниках.

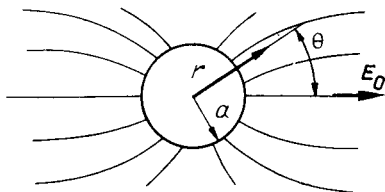


Рис. 1.9. Металлический шар в однородном электрическом поле.

Задача 2. Найти потенциалы двух концентрических сфер радиусов r_1, r_2 с зарядами q_1, q_2 .

Решая уравнения Лапласа в сферических координатах

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0, \text{ найдем}$$

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}, \quad \varphi_2 = \frac{q_1 + q_2}{r_2}. \quad (11.5)$$

Рассмотрим возмущение однородного поля незаряженным металлическим шаром (рис. 1.9). Это типичная задача на уравнение Лапласа, которое нужно решать с граничным условием

$$\varphi|_{r=a} = 0. \quad (11.6)$$

Как же решить это уравнение? Попробуем применить довольно общий метод, называемый разделением переменных. Из соображений симметрии будем решать задачу в сферических координатах. Говорят, что переменные разделяются, если решение можно представить в виде

$$\varphi(r, \theta, \Phi) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\Phi). \quad (11.7)$$

Если выбрать полярную ось вдоль вектора E_0 однородного поля, то потенциал не будет зависеть от Φ , т. е. можно положить $\Phi = 1$. Подставив (11.7) в уравнение Лапласа и поделив на φ , найдем

$$\frac{(r^2 R')'}{R} = - \frac{(\Theta' \sin \theta)'}{\Theta \sin \theta} = A, \quad (11.8)$$

где штрих означает дифференцирование по своему аргументу. Так как обе части (11.8) — функции разных аргументов, они могут быть равны друг другу, только если они константы, т. е. не зависят от своих аргументов.

При $r \rightarrow \infty$ поле становится однородным, т. е. $\varphi \rightarrow -E_0 r \cos \theta$ (при $\varphi(a) = 0$). Отсюда находим угловую часть потенциала

$$\Theta(\theta) = \cos \theta, \quad (11.9)$$

и $A = 2$. Уравнение для радиальной части потенциала принимает вид: $(r^2 R')' = 2R$. Попробуем искать его решение в виде $R \propto r^k$. Получим: $k(k+1) = 2$ или $k = 1; -2$, т. е. решение для радиальной части выглядит так:

$$R(r) = br + \frac{d}{r^2}. \quad (11.10)$$

Существенно, что это полное решение, так как уравнение второго

порядка для $R(r)$ допускает только две произвольные постоянные. Последние определяются из граничных условий на бесконечности ($b = -E_0$) и на поверхности шара (11.6):

$$d = E_0 a^3. \quad (11.11)$$

Окончательно получаем

$$\varphi(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{d \cos \theta}{r^2}. \quad (11.12)$$

Полное поле оказывается суперпозицией внешнего однородного поля E_0 и чисто дипольного поля наведенных на шаре зарядов (дипольный момент равен d).

Успех метода разделения переменных для данной задачи связан с тем, что уравнение Лапласа распалось на сумму слагаемых, зависящих только от одной из координат, т. е. уравнение в частных производных распалось на два обыкновенных дифференциальных уравнения, причем их решения оказались совместимыми с граничными условиями. Подчеркнем, что возможность разделения переменных зависит от удачного выбора системы координат, который, в свою очередь, диктуется граничными условиями.

Задача 3. Исследовать устойчивость равновесия заряженной частицы в электрическом поле (теорема Ирришоу).

Вблизи положения равновесия, в которое мы поместим начало координат, потенциал можно приближенно представить в виде

$$\varphi(x, y, z) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} y^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} z^2 \right),$$

где все производные берутся в точке равновесия. Для устойчивости (положительного) заряда необходимо, чтобы потенциальная энергия возрастала по любому направлению, т. е. $\partial^2 \varphi / \partial x^2 > 0$; $\partial^2 \varphi / \partial y^2 > 0$; $\partial^2 \varphi / \partial z^2 > 0$. Но это противоречит уравнению Лапласа $\Delta \varphi = 0$. Если $\partial^2 \varphi / \partial x^2 = \partial^2 \varphi / \partial y^2 = \partial^2 \varphi / \partial z^2 = 0$, нужно учесть следующие члены разложения φ . Можно показать, что и в этом случае устойчивое равновесие невозможно.

Задача 4. Доказать однозначность решения уравнения Пуассона при заданных граничных условиях (11.2).

Предположим, что существуют два различных решения, и составим их разность $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$. Последняя удовлетворяет уравнению Лапласа и нулевым граничным условиям: $\psi|_s = 0$, т. е. в данном случае заряды отсутствуют во всем пространстве, а значит, $\psi = 0$ (8.1).

Задача 5. Найти поле внутри замкнутой непроводящей поверхности S_0 , если заданы распределения потенциала и поля на этой поверхности, а также плотность заряда внутри нее.

Поскольку заданная поверхность не эквипотенциальна, поле внутри нее (и на самой поверхности) будет зависеть от внешних зарядов. Чтобы избавиться от этой зависимости, окружим S_0 эквипотенциальной поверхностью S_1 ($\varphi = 0$), отстоящей от S_0 на бесконечно малое расстояние $h \rightarrow 0$. При условии неизменности потенциала на S_0 поле внутри нее не изменится (однозначность решения, см. предыдущую задачу). Действие внешних зарядов теперь заменено эквивалентным действием зарядов, наведенных на S_1 , а также зарядов, которые нужно поместить дополнительно на S_0 , чтобы сохранить граничные условия. Плотность заряда на S_0 представим в виде двух слагаемых: $\sigma_{01} = \frac{1}{4\pi h} \varphi|_S$ (и такая же по величине, но обратная по знаку плотность заряда на S_1 — обе поверхности образуют «конденсатор с переменным напряжением»)

и $\sigma_{02} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_S$, где $\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_S$ — заданная нормальная составляющая внутреннего поля. Таким образом, искомое поле складывается из трех составляющих: объемного заряда ρ , поверхностного заряда σ_{02} и «поверхностного диполя» $d = h\sigma_{01}n = \frac{n}{4\pi} \Phi \Big|_S$ (n — единичный вектор внутренней нормали). В результате получаем

$$\Phi = \int \rho \frac{dV}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left(\frac{\nabla \Phi}{r} + \Phi \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dS. \quad (11.13)$$

§ 12. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ

Начнем с простейшего случая одного уединенного проводника, т. е. проводника, удаленного от других проводников (и зарядов) на расстояние, много большее его максимального размера. Емкость такого проводника равна отношению заряда q к потенциалу Φ , создаваемому этим зарядом:

$$C = q/\Phi. \quad (12.1)$$

В гауссовой системе емкость имеет размерность длины и измеряется в сантиметрах. В СИ единицей емкости является фарад, $1 \text{ Ф} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см}$.

Емкость сферы, например, равна ее радиусу. Считая земной шар проводником, получим для его емкости: $C_3 \approx 6,37 \cdot 10^8 \text{ см} \approx \approx 700 \text{ мкФ}$.

Задача 1. Оценить емкость металлической пластины с размерами $l \gg a \gg h$.

На расстояниях $x \gg l$ $\Phi_1(x) \approx \frac{q}{x}$; в области $a \ll x \ll l$ можно положить $\Phi_2 \approx -2(q/l) \ln \frac{x}{a} + A$; наконец, при $x \ll a$ $\Phi_3 \approx -2\pi(q/al)x + B$. Сшивая эти выражения при $x \sim a$, l , найдем $B \sim \frac{q}{l} \left(1 + 2\pi + 2 \ln \frac{l}{a} \right)$. Отсюда $C \sim \frac{q}{\Phi_3(0)} \sim \frac{l}{1 + 2\pi + 2 \ln(l/a)} \sim \frac{l}{2(\pi + \ln(l/a))}$. Для цилиндра радиуса $a \ll l$ аналогичным образом можно получить $C \sim \frac{l}{1 + 2 \ln(l/a)} \approx \frac{l}{2 \ln(l/a)}$.

Рассмотрим теперь систему из нескольких проводников с произвольными зарядами. Потенциал каждого из проводников зависит от всех зарядов, причем в силу принципа суперпозиции зависимость эта должна быть линейной:

$$\Phi_i = S_{ik} q_k, \quad (12.2)$$

где S_{ik} — некие коэффициенты, зависящие от геометрии системы. Разрешая уравнения (12.2) относительно q_k , найдем

$$q_i = C_{ik} \Phi_k. \quad (12.3)$$

Новые постоянные C_{ik} называются емкостными коэффициентами или коэффициентами электростатической индукции. Матрицы C_{ik} , S_{ik} взаимно обратны: $C_{il}S_{lk} = \delta_{ik}$. Для уединенного проводника $SC = 1$.

Для примера рассмотрим две концентрические сферы (см. задачу 2, § 11):

$$S_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} \\ \frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_2} \end{pmatrix}; \quad C_{ik} = \begin{pmatrix} C & -C \\ -C & C + C_2 \end{pmatrix}. \quad (12.4)$$

Здесь величина $C = r_1 r_2 / (r_2 - r_1)$ характеризует взаимную емкость двух проводников, а $C_2 = r_2$ — емкость наружной сферы. В общем случае аналогичная добавка появляется и у коэффициента $C_{11} = C + C_1$. Тогда

$$q_1 = C(\varphi_1 - \varphi_2) + C_1 \varphi_1, \quad q_2 = -C(\varphi_1 - \varphi_2) + C_2 \varphi_2. \quad (12.5)$$

Заряд каждого из проводников можно разбить на две части: связанный $q_0 = \pm C(\varphi_1 - \varphi_2)$ и свободный заряд $q_i = C_i \varphi_i$.

Система из двух проводников называется конденсатором, а его емкость определяется по связанному заряду:

$$C_0 = \frac{q_0}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (12.6)$$

Емкости проводников (обкладок) конденсатора «на бесконечность» (C_1, C_2) называются обычно «паразитными» емкостями.

Вычислим энергию системы заряженных проводников. При малом изменении зарядов приращение энергии $dW = dA = \varphi_i dq_i = S_{ik} q_k dq_i = S_{ki} q_i dq_k = \frac{1}{2} (S_{ik} q_k dq_i + S_{ki} q_i dq_k)$. Так как энергия системы определяется только конечным значением зарядов и не зависит от способа зарядки, последнее выражение должно свернуться в полный дифференциал. Для этого в свою очередь, необходимо, чтобы матрица S_{ik} была симметричной: $S_{ik} = S_{ki}$. Тогда $dW = \frac{1}{2} S_{ik} d(q_i q_k)$ и

$$W = \int \varphi_i dq_i = \frac{S_{ik} q_i q_k}{2} = \frac{C_{ik} \varphi_i \varphi_k}{2}. \quad (12.7)$$

В частности, для изолированного проводника $W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}$. Для конденсатора $W_0 = q_0^2 / 2C_0 = C_0 V^2 / 2$, где $V = \varphi_1 - \varphi_2$, причем это выражение характеризует только энергию поля «внутри» конденсатора.

Вследствие емкостной связи ($C_{ik} \neq 0, i \neq k$) один заряженный проводник «наводит» потенциал (или заряд) на другой. В некоторых случаях, например при точных электрических измерениях, необходима защита от таких «наводок». Другой пример — защита людей от электрического поля проводников, находящихся при высоком потенциале. Для этой цели применяется электростатическое экра-

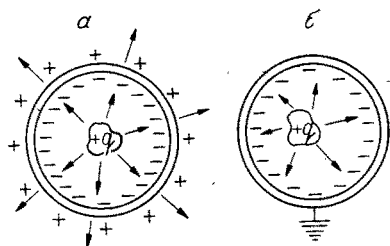


Рис. 1.10. Электростатическое экранирование.

a — экран не заземлен; *б* — экран заземлен.

нирование. Идеальным оно будет в том случае, если защищаемые проводники (например, всю измерительную аппаратуру вместе с источниками питания) окружить дополнительным замкнутым проводником, внутри которого электростатическое поле всегда равно нулю. Для этой цели в лабораториях сооружаются иногда целые экранированные комнаты.

Часто удобнее экранировать сам источник наводки. Но если просто окружить его замкнутым проводником, находящимся под «плавающим» потенциалом, то экранирования не получится. Действительно, заряд экрана можно считать равным нулю, а тогда, согласно закону сохранения потока (см. § 6), среднее поле наводки остается тем же самым, изменится лишь его конфигурация (рис. 1.10). В частности, для сферического экрана поле вне его будет всегда сферически-симметричным. Правда, если полный заряд экранируемой системы равен нулю (полностью изолированная система), то экранирование все же возможно, так как среднее поле наводки равно нулю. Плавающий потенциал экрана при этом также будет равен нулю, а значит, не будет и внешнего поля. Это совсем очевидно в случае сферического экрана. Но даже тогда осуществить таким способом экранирование практически невозможно, так как всегда существующие небольшие внешние токи будут быстро заряжать экран до значительных потенциалов. Поэтому экран необходимо «заземлить», т. е. соединить его с Землей, которую можно рассматривать как единый гигантский проводник. Действие заземления связано с тем, что при любых «земных» электрических процессах происходит лишь перераспределение электрических зарядов. Поэтому полный заряд всей системы (включая Землю) можно считать равным нулю или, по крайней мере, постоянным, а все токи — внутренними. Локальные измерения электрического поля вблизи Земли до высот порядка 200 км дают значения E от 100 до единиц вольт на метр. Основным фактором, нарушающим экранирование в рассматриваемом случае, является нестационарность наводки.

Если, как это обычно происходит на практике, экран не удается сделать полностью замкнутым, то всегда остается некоторая наводка, уменьшение которой зависит от изобретательности экспериментатора.

§ 13. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ЗАКОНА КУЛОНА

Первые опыты самого Кулона (1785 г.) не отличались высокой точностью, и можно было думать, что найденный им простой закон выполняется лишь приближенно. Поэтому в дальнейшем были предприняты не прекращающиеся и до сих пор многочисленные попытки уточнить закон Кулона. Фактически речь идет о проверке зависимости кулоновского взаимодействия от расстояния.

Кулон непосредственно измерял силу взаимодействия зарядов с помощью крутильных весов, повторив опыт английского физика Кавэндиша по гравитационному взаимодействию. Интересно, что сам Кавэндиш еще в 1770 г. получил «закон Кулона», причем значительно более оригинальным методом и даже, по-видимому, с большей точностью. Идея Кавэндиша состояла в том, чтобы проверить, остается ли электрическое поле внутри заряженной проводящей сферы. При этом он пользовался аналогией с гравитационным взаимодействием, для которого еще Ньютон доказал, что поле внутри однородной сферической оболочки равно нулю. Поэтому отсутствие электрического поля внутри заряженной сферы означало бы, что электрические силы, как и гравитационные, обратно пропорциональны квадрату расстояния.

Опыт ставился следующим образом. На заряженный проводящий шар накладывались две полусферы, плотно пригнанные друг к другу. Затем полусферы убирались и с помощью обычного электрометра измерялся остаточный потенциал шара, который оказался равным нулю в пределах точности эксперимента. Это дает возможность оценить верхнюю границу отклонения от закона $1/r^2$.

Пусть, например, потенциал электрического поля точечного заряда описывается выражением

$$\varphi(r) = \frac{q}{r^{1-\varepsilon}} \approx \frac{q}{r} + \frac{\varepsilon q}{r} \ln r, \quad (13.1)$$

где $\varepsilon \ll 1$ — малая добавка. Рассмотрим две концентрические проводящие сферы, и пусть наружная имеет потенциал φ_0 , а внутренняя не заряжена. Тогда разность потенциалов между сферами будет определяться добавкой к кулоновскому потенциалу (рис. 1.11):

$$\begin{aligned} \varphi(R) &= \int \frac{\varepsilon \sigma dS}{r} \ln r = \frac{\varepsilon q}{4\pi R_0^2} \int_0^\pi \frac{\ln r}{r} 2\pi R_0^2 \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{\varepsilon q}{2RR_0} \int_{R_0-R}^{R_0+R} \ln r dr \approx \frac{\varepsilon q (\ln 2R_0 - 1)}{R_0} + \frac{\varepsilon q h}{2R_0^2} \ln \frac{2R_0}{h}, \end{aligned}$$

$r^2 = R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \theta$, $h = R_0 - R \ll R_0$ — зазор между сферами, который для простоты будем считать малым. Дополнительная

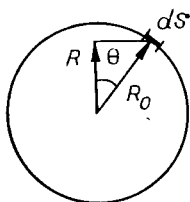


Рис. 1.11. К вычислению поправки в законе Кулона.

разность потенциалов между сферами дается вторым слагаемым

$$\Delta\varphi = \frac{\varepsilon q h}{2R_0^2} \ln \frac{2R_0}{h}. \quad (13.3)$$

В опыте Кавэндиша обе сферы были соединены, т. е. находились при одном потенциале. Это значит, что на внутренней сфере должен был появиться заряд, компенсирующий $\Delta\varphi$:

$$q_\varepsilon = \Delta\varphi C_2 = \frac{R_0^2 \Delta\varphi}{h} = \frac{\varepsilon q}{2} \ln \frac{2R_0}{h}, \quad (13.4)$$

где C_2 — емкость сферического конденсатора. Принимая $h \approx 0,1$ см, $2R_0 \approx 10$ см, чувствительность электроскопа $q_\varepsilon/q \approx 5\%$, получим $\varepsilon < 0,02$.

Сто лет спустя Максвелл понизил эту границу до $\varepsilon < 5 \cdot 10^{-5}$, применив гораздо более чувствительный квадрантный электрометр. Согласно последним экспериментам, $\varepsilon < 6 \cdot 10^{-17}$ [1]. Высокая чувствительность всех этих измерений связана с тем, что применяется так называемый нулевой метод, при котором измеряемая величина определяется только изучаемым эффектом и обращается в нуль в отсутствие эффекта. Использование высокочастотных источников высокого напряжения позволяет надежно экранировать измерительную аппаратуру от наводок, и современные методы измерения малых высокочастотных напряжений (синхронное детектирование) дают возможность достичь рекордно низкого уровня шумов ($\leq 10^{-12}$ В).

Такой интерес к точности закона Кулона не случаен. Оказывается, значение поправки ε позволяет оценить верхнюю границу массы покоя фотона; равенство последней нулю является одним из фундаментальных законов физики. Дело в том, что по некоторым современным теориям силовое поле (электромагнитное, гравитационное, ядерных сил), возникающее вокруг точечного «заряда» q , можно описывать потенциалом вида

$$\varphi(r) = \frac{q}{r} e^{-r/\lambda}, \quad \lambda = \frac{\hbar}{\mu c}, \quad (13.5)$$

где $2\pi\hbar = 6,62 \cdot 10^{-27}$ эрг·с = $4,14 \cdot 10^{-15}$ эВ·с — постоянная Планка, μ — масса покоя кванта поля. Подобный подход позволил в 1935 г. японскому физику Юкаве предсказать существование мезонов, а потенциал (13.5) носит название «потенциала Юкавы». Повторяя с потенциалом (13.5) расчеты, аналогичные (13.1) — (13.3), и срав-

нивая результат с (13.3), найдем

$$\frac{1}{\lambda} \approx \frac{3}{R_0} \sqrt{\varepsilon \ln \frac{2R_0}{h}}, \quad (13.6)$$

что для последнего эксперимента дает $\lambda > 4 \cdot 10^4 \text{ км } \mu\text{с}^2 < 5 \cdot 10^{-15} \text{ эВ}$. Напомним, что масса покоя электрона $m_e c^2 \approx 0,51 \cdot 10^6 \text{ эВ}$. На самом деле, значение μ можно считать еще меньшим на основе измерений магнитного поля Юпитера (см. § 43).

Полученные результаты позволяют сделать и другой вывод: закон Кулона справедлив на расстояниях порядка $r_{\max} < 4 \cdot 10^4 \text{ км}$.

Не меньший интерес представляет вопрос о справедливости закона Кулона на малых расстояниях. Ответ может быть получен на основании данных о рассеянии заряженных частиц. Совпадение экспериментальных результатов и предсказаний теории при заданной энергии частиц означает, что закон Кулона справедлив вплоть до расстояний, на которые «сближаются» частицы в акте рассеяния. Если в системе центра масс частицы с импульсом p рассеиваются на угол θ , то изменение импульса в результате рассеяния есть $\Delta p = 2p \sin \theta/2$, что согласно квантовой механике дает $r_{\min} \sim \hbar/\Delta p \sim \hbar/(p \sin \frac{\theta}{2})$.

В опытах Резерфорда (α -частицы с энергией 100 кэВ, $\theta \sim 20^\circ$) были достигнуты расстояния порядка $3 \cdot 10^{-12} \text{ см}$. Однако уже на расстояниях порядка 10^{-12} см появились отклонения от формулы рассеяния — начали сказываться ядерные силы. Поэтому наиболее чисто такие эксперименты можно осуществить с «неядерными» частицами — электронами. Изучение рассеяния электронов на электронах (позитронах) стало возможным после реализации метода встречных пучков в начале 60-х годов в Новосибирске, Стэнфорде (США) и позднее в других лабораториях мира. Последние измерения на энергии частиц $2 \times 20 \text{ ГэВ}$ дают $r_{\min} < 5 \cdot 10^{-16} \text{ см}$.

Одним из фундаментальных физических фактов является равенство (по абсолютной величине) зарядов электрона и протона. Точность, с которой выполняется это равенство, подлежит экспериментальной проверке, как и любой другой физический факт.

Измерялся [2] заряд нейтрального атома. Камера, наполненная аргоном и окруженная тепловым экраном, была помещена на изоляторах внутри заземленного электростатического экрана (рис. 1.12). Чувствительный гальванометр измерял полный заряд, протекающий в цепи, когда из объема в вакуум выпускается порция газа. Чтобы исключить ошибку, которая вносится ионами, присутствующими в газе, на выходе из объема была устроена ловушка для ионов, использующая поперечное электрическое поле. Измерения дали $\Delta q < 1,5 \cdot 10^{-14} \text{ Кл}$ при вытекании 81 л аргона, что в пересчете на атом дает

$$\Delta q < \frac{1,5 \cdot 10^{-14}}{81 \cdot 6 \cdot 10^{23}} 22,4 \approx 6 \cdot 10^{-39} \text{ Кл} \approx 4 \cdot 10^{-20} \cdot e.$$

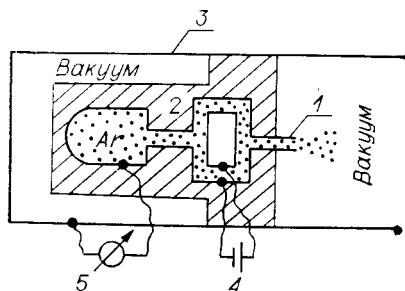


Рис. 1.12. Схема эксперимента по проверке равенства зарядов протона и электрона:

1, 3 — внутренняя и наружная металлические камеры; 2 — термо- и электроизоляция; 4 — источник напряжения для откоса ионов; 5 — гальванометр.

Таким образом, в атоме аргона ($Z = 18$, $A = 40$) суммарный заряд восемнадцати электронов, восемнадцати протонов и двадцати двух нейтронов не превышает $4 \cdot 10^{-20}$ заряда электрона.

Результаты этого эксперимента свидетельствуют также об инвариантности электрического заряда в смысле теории относительности, т. е. о независимости его от скорости движения. Действительно, скорость протонов в ядрах порядка $0,1c$, а скорость электронов в атоме аргона изменяется от $v_{\max} \sim 0,1c$ на внутренней до $v_{\min} \sim 0,01c$ на внешней оболочках.

Заметим, что релятивистская инвариантность заряда следует также из закона (6.6), если определить электрический заряд с помощью этого соотношения, т. е. по потоку его электрического поля через замкнутую, достаточно удаленную от заряда поверхность. Это связано с тем, что, в силу конечности скорости распространения электромагнитных волн, поле на этой поверхности не может мгновенно измениться, что бы ни происходило с частицами, несущими электрический заряд. Отсюда следует также закон сохранения электрического заряда.

Глава II

ДИЭЛЕКТРИКИ

§ 14. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКА

Если проводимость вещества равна нулю (отсутствуют свободные заряды), то электрическое поле внутри такого вещества не компенсируется, как в проводнике, но, тем не менее, при воздействии внешнего поля как-то изменяется. Это изменение по-прежнему связано со смещением зарядов среды, но теперь оно очень мало и определяется деформацией атомов (электронных орбит) под действием электрического поля. В результате такой деформации у атома появляется дипольный момент, который грубо можно оце-

нить как

$$d_a \sim ea \frac{E}{E_a} \sim E \cdot a^3, \quad (14.1)$$

где $a \sim 10^{-8}$ см — размер атома или молекулы, $E_a \sim 10^9$ В/см — атомное поле. Эти наведенные моменты создают дополнительное поле, ослабляющее (но не компенсирующее) внешнее поле. Появление дипольных моментов называется *поляризацией* среды. Отсюда и название такой среды — *диэлектрик*.

Возможен и другой механизм поляризации диэлектрика, молекулы которого обладают собственным дипольным моментом (в отсутствие поля). Это имеет место для несимметричных молекул, например молекул воды, которые имеют вид «углов» (рис. II.1): $d_0 \sim ea \sim 10^{-18}$ (г) (см. табл. 1). В отсутствие внешнего поля собственные моменты ориентированы случайно, так что средний (макроскопический) дипольный момент единицы объема

$$\mathbf{P} = \langle n \mathbf{d}_0 \rangle \quad (14.2)$$

равен нулю. Здесь n — плотность молекул. Величину $\mathbf{P}$ называют также *вектором поляризации*. Если мы интересуемся макроскопическими процессами, то нам нужно знать только среднее макроскопическое поле в среде, которое зависит от $\mathbf{P}$. В частности, в отсутствие внешнего поля $\mathbf{P} = 0$ и дополнительное поле молекулярных зарядов также равно нулю.

Внешнее поле ориентирует моменты d_0 , тепловое движение дезориентирует их. Средний момент направлен по вектору $\mathbf{E}$, и его значение получается усреднением по распределению Больцмана $\langle d_z \rangle = \langle e^{-U/T} d_0 \cos \theta \rangle$, где $U = -(\mathbf{d}_0, \mathbf{E}) = -d_0 E \cos \theta$ — энергия диполя во внешнем поле (см. § 5), T — температура среды в энергетических единицах. Разлагая экспоненту и усредняя по телесному углу, получим

$$\begin{aligned} \langle d_z/d_0 \rangle &= \left\langle \left(1 + \alpha \cos \theta + \frac{\alpha^2 \cos^2 \theta}{2} + \frac{\alpha^3 \cos^3 \theta}{6} + \dots \right) \cos \theta \right\rangle = \\ &= \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{30} + \dots; \quad \alpha = \frac{d_0 E}{T}. \end{aligned}$$

Отсюда вектор поляризации

$$\mathbf{P} = \frac{n d_0}{3} \left(\frac{d_0 E}{T} + \frac{1}{10} \left(\frac{d_0 E}{T} \right)^3 + \dots \right) \frac{\mathbf{E}}{E}. \quad (14.3)$$

Если $\alpha = d_0 E/T \sim W_a E/TE_a \sim 10^2 E/E_a \ll 1$, где $W_a \sim 3$ эВ — энергия валентного электрона в атоме, $T \approx 1/40$ эВ соответствует нормальной температуре, то в сумме (14.3) можно пренебречь всеми

Таблица 1. Дипольные моменты некоторых молекул

Молекула	$d \times 10^{18}$ (г)	Молекула	$d \times 10^{18}$ (г)
HF	1,91	BCl ₃	0
HCl	1,08	CCl ₄	0
KCl	10,6	NH ₃	1,46
H ₂ O	1,87		

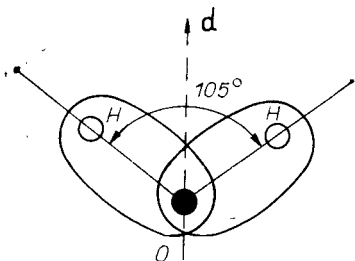


Рис. II.1. Структура молекулы воды.

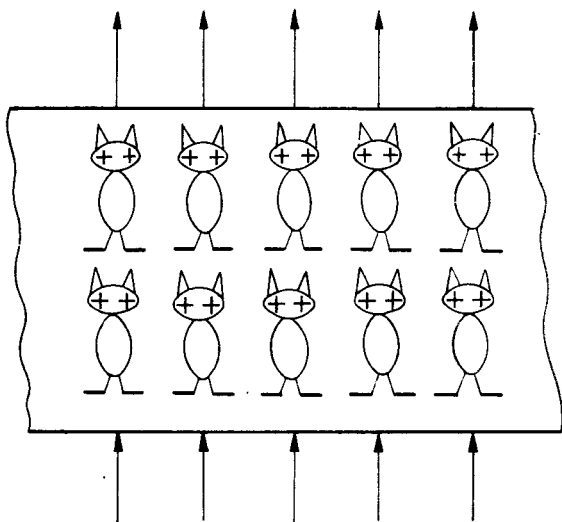


Рис. II.2. Поляризация диэлектрической пластины.

слагаемыми, кроме первого, так что поляризация линейно зависит от поля.

Поляризация диэлектрика с собственными моментами молекул называется *ориентационной*, в случае же $d_0 = 0$ говорят об *упругой* поляризации.

§ 15. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКЕ

Для вычисления поля в среде рассмотрим основное уравнение электростатики (см. § 7)

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(\rho + \rho_e), \quad (15.1)$$

где ρ — плотность свободных зарядов, а ρ_e — плотность связанных зарядов (в атомах или молекулах среды). Прежде всего усредним (15.1) по микроскопическим (молекулярным) неоднородностям: $\operatorname{div} \langle \mathbf{E} \rangle = 4\pi(\langle \rho \rangle + \langle \rho_e \rangle)$. Среднее поле будем называть просто электрическим полем (в среде), и в дальнейшем знаки усреднения опустим. Для того чтобы использовать это уравнение, необходимо найти величину ρ_e , которая должна быть как-то связана с поляризацией диэлектрика. Качественно это легко себе представить на примере поляризации диэлектрика в плоском конденсаторе (рис. II.2). Поскольку молекулы диэлектрика остаются при поляризации нейтральными, средняя плотность связанных зарядов внутри диэлектрика $\rho_e = 0$. Однако на границе диэлектрика возникает некоторый поверхностный заряд σ_e , который легко сопоставить вектору поляризации $P = \sigma_e h S / V = \sigma_e$, где V — объем диэлектрика, а S — площадь поверхности (см. рис. II.2). Поле зарядов σ_e ослабляет внешнее поле, причем оказывается, что в большинстве случаев коэффициент ослабления (ϵ) определяется только свойствами

среды и не зависит от поля; он называется *диэлектрической проницаемостью*. В рассмотренном примере поле внутри диэлектрика $E = 4\pi\sigma/\epsilon$, где σ — плотность свободных зарядов (на пластине конденсатора).

В общем случае влияние диэлектрика не сводится только к ослаблению электрического поля. Например, если диэлектрик имеет поверхность, не соприкасающуюся с проводником, то наведенные на ней заряды σ_e искажают конфигурацию поля.

Как же найти поле в общем случае?

Для этого определим вначале зависимость $\rho_e(\mathbf{P})$. Запишем потенциал, создаваемый поляризованным диэлектриком, в виде (см. § 5)

$$\varphi_e(\mathbf{r}) = - \int \left(\mathbf{P}(\mathbf{r}'), \nabla \frac{1}{R} \right) dV'. \quad (15.2)$$

Здесь $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, и градиент берется по координатам точки наблюдения $(\mathbf{r})$. Переходя к дифференцированию по $\mathbf{r}'$ $\left(\nabla \frac{1}{R} = - \nabla' \frac{1}{R} \right)$ и используя соотношение $\left(\nabla', \frac{\mathbf{P}}{R} \right) = \frac{(\nabla', \mathbf{P})}{R} + \left(\mathbf{P}, \nabla' \frac{1}{R} \right)$, получим

$$\varphi_e = \int \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{P}}{R} \right) dV' - \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{P}}{R} dV'. \quad (15.3)$$

Первый интеграл преобразуется в поверхностный и обращается в нуль для любого диэлектрика конечных размеров, а второй представляет собой потенциал зарядов с плотностью

$$\rho_e = - \operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (15.4)$$

Остается обсудить справедливость использованного выше дипольного приближения. Как вытекает из оценок представленных в § 5, полем высших мультиполей можно пренебречь на расстояниях, много больших размеров молекул. Это условие в данном случае выполняется с большим запасом, поскольку мы интересуемся лишь средним макроскопическим полем.

Задача 1. Вычислить дипольный момент системы зарядов с плотностью (15.4).

По определению дипольного момента $\mathbf{d} = \int \mathbf{r} \rho_e dV = - \int \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{P} dV$. Преобразуем подынтегральное выражение $\mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{P} = \sum_{i,k} \mathbf{e}_i x_i \frac{\partial p_k}{\partial x_k} = \mathbf{e}_i \left(\frac{\partial (P_k x_i)}{\partial x_k} - P_k \delta_{ik} \right) = \mathbf{e}_i \frac{\partial (P_k x_i)}{\partial x_k} - \mathbf{P}$, где $\mathbf{e}_i$ — орты. Интеграл от первого члена преобразуется в поверхностный и исчезает, тогда имеем $\mathbf{d} = \int \mathbf{P} dV$.

Подставим теперь выражение для ρ_e в уравнение поля (15.1) и введем новый вектор

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad (15.5)$$

который называется *вектором электрической индукции*. Получим

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho. \quad (15.6)$$

Напомним, что здесь ρ — плотность свободных зарядов, распределение которых считается обычно заданным. Поэтому мы можем в принципе решить уравнение (15.6) и найти вспомогательное поле $\mathbf{D}(\mathbf{r})$. Чтобы получить $\mathbf{E}$, необходимо знать зависимость $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ или $\mathbf{P}(\mathbf{D})$, которая определяется конкретным устройством молекул диэлектрика (см. § 14). Для большинства веществ при не слишком больших полях эту зависимость с хорошей степенью точности можно считать линейной (см. (14.3)):

$$\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}, \quad (15.7)$$

где χ — коэффициент поляризации диэлектрика. Подставляя это выражение в (15.5), получим

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}(1 + 4\pi\chi) = \epsilon\mathbf{E}, \quad (15.8)$$

где ϵ — уже знакомая нам диэлектрическая проницаемость. Действительно, в однородном диэлектрике уравнение (15.6) можно переписать в виде $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho/\epsilon$. Отсюда следует, что действие такого диэлектрика сводится к уменьшению плотности заряда (а значит, и поля) в ϵ раз. При этом индукцию можно рассматривать так же, как часть полного поля $\mathbf{E}$.

В общем случае ($\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$) $\mathbf{D}$ есть некоторое вспомогательное поле, а диэлектрик изменяет не только величину, но и конфигурацию электрического поля. Одним из важных свойств индукции является сохранение ее потока без учета связанных зарядов среды. Это вытекает непосредственно из уравнения (15.6) (ср. § 6):

$$\oint_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = 4\pi q, \quad (15.9)$$

где q — свободный заряд внутри поверхности S . Отсюда, в частности, следует связь индукции с плотностью заряда на проводнике, аналогичная (10.2):

$$D_n = 4\pi\sigma, \quad (15.10)$$

где D_n — нормальная к поверхности проводника составляющая вектора $\mathbf{D}$. В общем случае индукция $\mathbf{D}$ может иметь и тангенциальную составляющую вдоль поверхности проводника, однако последняя не дает вклада в σ , как легко проверить, используя (15.9).

С другой стороны, потенциал электрического поля в среде по-прежнему связан с вектором $\mathbf{E}$. Это получается непосредственно из усреднения уравнения $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Поэтому, в частности, вектор $\mathbf{E}$ остается перпендикулярным поверхности проводника. Из соотношения (15.8) следует параллельность векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$. Однако данное соотношение не всегда справедливо. В общем случае линейная связь векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ может быть описана тензором диэлектрической проницаемости

$$D_i = \epsilon_{ik}E_k. \quad (15.11)$$

Это имеет место, например, в анизотропных кристаллах, или замагниченной плазме (см. задачу 1, § 84), свойства которых зависят от направления. При этом векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ непараллельны.

Для вспомогательного поля $\mathbf{D}$ принцип суперпозиции выполняется по определению вектора $\mathbf{D}$ (15.6), т. е. суммарное поле $\mathbf{D}$ есть сумма полей от отдельных свободных зарядов. Для истинного поля $\mathbf{E}$ принцип суперпозиции в таком виде (т. е. с учетом только свободных зарядов) справедлив лишь в случае линейной зависимости $\mathbf{d}(\mathbf{E})$. Последняя имеет место только в слабых полях (см. (14.3)), и только приближенно. Это, однако, не означает нарушения фундаментального принципа суперпозиции (см. § 3), с учетом всех зарядов — как свободных, так и связанных. Точно так же рассеяние света на свете (фотона на фотоне), которое хотя и не наблюдалось в прямых экспериментах, но не вызывает сомнения, означает не нарушение принципа суперпозиции, а объясняется поляризацией вакуума — присутствием виртуальных электрон-позитронных пар.

В гауссовой системе индукция измеряется, естественно, в тех же единицах, что и электрическое поле. В СИ единица индукции определяется из закона сохранения потока: $1 \text{ Кл/м}^2 \approx 3,77 \cdot 10^6 \text{ (г)} = 4\pi c \cdot 10^{-5} \text{ (г)}$; а поток индукции измеряется в кулонах: $1 \text{ Кл} \approx 3,77 \cdot 10^{10} \text{ (г)} = \frac{4\pi c}{10} \text{ (г)}$, где c — скорость света. В дальнейшем мы увидим, что появление c в формулах перехода не случайно и связано с теорией относительности.

Отметим, что в СИ векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ отличаются не только по величине, но и по размерности. Это значит, что диэлектрическая проницаемость — размерная величина, в частности, в вакууме

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.} \quad (15.12)$$

С физической точки зрения такая ситуация является противостественной, поскольку поле $\mathbf{D}$ составляет, по существу, часть полного поля $\mathbf{E}$, а в вакууме оба поля просто совпадают. Поэтому СИ неадекватна физике электромагнитных явлений, и мы будем пользоваться гауссовой системой. Последняя, однако, неудобна в практических расчетах (в частности, ее единицы заряда, тока и т. д. слишком малы), здесь наиболее удобно пользоваться СИ.

В СИ закон Кулона записывается в такой форме:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (15.13)$$

откуда следует, что диэлектрическая проницаемость вакуума (точнее, величина $(4\pi\epsilon_0)^{-1}$) играет роль, аналогичную гравитационной постоянной в законе тяготения Ньютона. Причина ее появления та же самая — выбор единицы массы независим от закона взаимодействия. Опять было бы более естественно положить гравитационную постоянную равной единице и определить тем самым новую единицу массы, аналогичную гауссовой единице заряда; она оказывалась бы равной 15 тыс. кг.

Задача 2. Найти электрическое поле и емкость плоского конденсатора, заполненного диэлектриком с переменным $\epsilon = \epsilon_0(1 + \alpha x)$; пластины конденсатора расположены при $x = 0, h$.

Уравнение (15.6) принимает вид $\frac{d}{dx} E(1 + \alpha x) = 0$, откуда $E = A/(1 + \alpha x)$. Постоянная A находится по напряжению на конденсаторе. Окончательно получаем $E = \alpha V/(1 + \alpha x) \ln(1 + \alpha h)$, $C = \frac{2S}{4\pi \ln(1 + \alpha h)}$.

§ 16. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Уравнение поля в диэлектрике (15.6) решается при определенных граничных условиях. Обычно эти условия задаются на бесконечности и на границе с проводниками. В тех случаях, когда среда состоит из нескольких диэлектриков, уравнение (15.6) можно решать отдельно в каждом из них, а затем сшивать решения на границах между ними. Для этого нужны граничные условия, т. е. связь между полями в соседних диэлектриках.

Прежде всего должно выполняться условие непрерывности потенциала, так как в противном случае возникали бы бесконечно большие поля. Отсюда непосредственно следует равенство тангенциальных составляющих электрического поля:

$$E_{1t} = E_{2t}. \quad (16.1)$$

Нормальная составляющая вектора E терпит разрыв, так как на границе двух диэлектриков образуется связанный поверхностный заряд. Если на этой поверхности нет свободного заряда, то непрерывна нормальная составляющая вектора D . Это условие легко получается из закона сохранения потока (15.9) или из уравнения поля (15.6):

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (16.2)$$

Задача 1. Найти скачок нормальной составляющей E на границе двух сред.

Записав (16.2) в виде $\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$, находим $E_{2n} - E_{1n} = E_{1n}(\epsilon_1 - \epsilon_2)/\epsilon_2$. Отсюда можно определить также поверхностную плотность связанного заряда:

$$\sigma_e = (E_{2n} - E_{1n})/4\pi = E_{1n} \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1 \right) / 4\pi. \text{ Она складывается из двух частей раз-}$$

$$\begin{aligned} \text{ного знака, отдельно на каждом из диэлектриков: } \sigma_{e1} = P_{1n} = \frac{D_{1n} - E_{1n}}{4\pi} = \\ = \frac{\epsilon_1 - 1}{4\pi} E_{1n}; \quad \sigma_{e2} = -P_{2n} = \frac{1 - \epsilon_2}{4\pi} E_{2n}; \quad \sigma_e = \sigma_{e1} + \sigma_{e2}. \end{aligned}$$

Как измерить векторы E, D в среде? Для этого можно сделать в ней небольшую полость и измерить поле внутри нее. Если полость сильно вытянута вдоль поля, то находится вектор E в среде (16.1). Если же полость вытянута перпендикулярно полю, то определяется вектор D (16.2). Заметим, что такая процедура годится лишь для изотропного диэлектрика.

Метод описания среды с помощью диэлектрической проницаемости можно распространить и на среду с макроскопическими неоднородностями. Рассмотрим, например, «газ» металлических шариков радиуса r_0 с плотностью n в единице объема. Пусть нас интересует лишь среднее поле (в объемах, содержащих много шариков). Тогда вместо решения очень сложной задачи с граничными условиями на каждом из шариков можно ввести эффективную диэлектрическую проницаемость такой «среды». Для этого достаточно найти дипольный момент одного шарика. Если $nr_0^3 \ll 1$, т. е. «газ» разреженный, можно пренебречь в первом приближении взаимным влиянием шариков и рассматривать поляризацию каждого из них во внешнем однородном поле (см. § 11). Имеем $d = Er_0^3$ и момент единицы объема $P = nEr_0^3$, где E — поле вдали от шариков. Возникает вопрос: что это за поле с точки зрения нашей «среды»: E , D или какое-то третье поле? Вообще говоря, это сложный вопрос (см. § 19), однако при $nr_0^3 \ll 1$ его можно не выяснять, поскольку различие между E и D мало. В результате получаем $\epsilon = 1 + 4\pi r_0^3 n$.

Рассмотрим подробнее более простой пример неоднородной среды, состоящей из слоев диэлектрика ϵ_1 , ϵ_2 толщиной h_1 , h_2 соответственно (рис. II.3). Эта среда является анизотропным диэлектриком, главные оси которого направлены вдоль и перпендикулярно слоям. Эффективную диэлектрическую проницаемость ϵ_x , ϵ_y можно вычислять различными способами. Можно, например, найти среднее поле в среде: $\langle E_x \rangle = \frac{E_1 h_1 + E_2 h_2}{h_1 + h_2} = \frac{D_x}{h_1 + h_2} \left(\frac{h_1}{\epsilon_1} + \frac{h_2}{\epsilon_2} \right) \equiv \frac{D_x}{\epsilon_x}$. В перпендикулярном направлении сохраняется E , поэтому $\langle E_y \rangle = E_1 = E_2$, $\langle D_y \rangle = \frac{D_1 h_1 + D_2 h_2}{h_1 + h_2} = E_y \frac{\epsilon_1 h_1 + \epsilon_2 h_2}{h_1 + h_2} \equiv \epsilon_y E_y$. Мы видим, что среда действительно анизотропна ($\epsilon_x \neq \epsilon_y$, если $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$).

Найдем теперь ϵ_x , ϵ_y через средний дипольный момент среды:

$$\langle P_x \rangle = \frac{D_x}{4\pi} \left(1 - \frac{\frac{h_1}{\epsilon_1} + \frac{h_2}{\epsilon_2}}{h_1 + h_2} \right) \equiv \frac{D_x}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_x} \right),$$

$$\langle P_y \rangle = \frac{E_y}{4\pi} \left(\frac{\epsilon_1 h_1 + \epsilon_2 h_2}{h_1 + h_2} - 1 \right) \equiv \frac{E_y}{4\pi} (\epsilon_y - 1).$$

Задача 2. Найти поляризацию диэлектрического шара во внешнем однородном поле (рис. II.4).

Будем решать более общую задачу, когда шар ϵ_1 погружен в среду ϵ_2 . В каждой из двух областей (вне и внутри шара) $\epsilon = \text{const}$ и поэтому $-\Delta\varphi = \text{div } E = \text{div}(D/\epsilon) = \text{div } D/\epsilon = 0$, т. е. нужно решать уравнение Лапласа с граничными условиями (16.1), (16.2) на поверхности шара. Решение ищем методом разделения переменных, аналогично тому, как это было сделано в § 11. Правда, поле внутри шара теперь не равно нулю. Однако, поскольку поле в центре должно быть конечным, для внутренней области из общего реше-

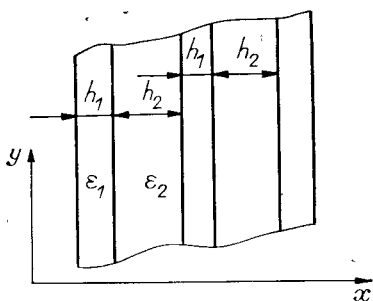


Рис. II.3. Слоистый диэлектрик.

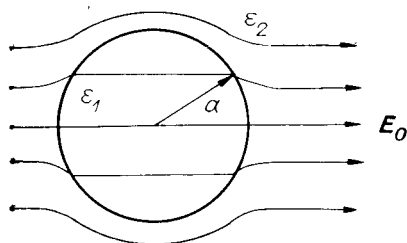


Рис. II.4. Поляризация диэлектрического шара.

$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, ср. рис. I.9.

ния (11.10) останется лишь первое слагаемое. Тогда имеем

$$\varphi_1 = -E_1 r \cos \theta, \quad \varphi_2 = -E_0 r \cos \theta + \frac{d \cos \theta}{r^2}. \quad (16.3)$$

Постоянные E_1 (поле внутри шара) и d (дипольный момент шара в среде) находим из граничных условий:

$$-E_1 a = -E_0 a + \frac{d}{a^2}, \quad \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_0 + \frac{2d\varepsilon_2}{a^3}, \quad (16.4)$$

откуда

$$d = d_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}, \quad d_0 = E_0 a^3, \quad E_1 = E_0 \varepsilon_1 \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}. \quad (16.5)$$

При $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ (проводник) решение переходит в (11.12); при $\varepsilon_1 = 1$ поле в сферической полости равно $E_1 = E_0 3\varepsilon_2 / (1 + 2\varepsilon_2)$. Поле внутри шара ослабляется, если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, и наоборот.

§ 17. ЭНЕРГИЯ ПОЛЯ В СРЕДЕ

Для вычисления энергии электрического поля в среде рассмотрим простейший пример плоского конденсатора, заполненного диэлектриком. Заряжая конденсатор, мы производим определенную работу, которая и переходит в энергию электрического поля. Вообще говоря, при этом изменяется не только энергия собственно поля, но и тепловая энергия диэлектрика, который может как нагреваться, так и охлаждаться в процессе поляризации. Примером служит диэлектрик с ориентационной поляризацией (см. § 14), диэлектрическая проницаемость которого зависит от температуры. Для упрощения вычисления принято включать изменение тепловой энергии диэлектрика в энергию поля, которая равна просто работе внешних сил. При таком определении энергии поля в среде она совпадает со свободной энергией при постоянной температуре и с внутренней энергией при постоянной энтропии.

При изменении заряда конденсатора на dQ совершается работа $dA = VdQ$, где V — напряжение на конденсаторе. Для плоского конденсатора с площадью пластин S и расстоянием между

ними d имеем $V = Ed$, $Q = \sigma S = SD_n/4\pi$, где D_n — нормальная составляющая вектора индукции, который в общем случае непараллелен E (см. § 15). В расчете на единицу объема конденсатора получим

$$dw = EdD_n/4\pi = (E, dD)/4\pi. \quad (17.1)$$

Это выражение является исходным для вычисления энергии поля в среде. Если, например, $D = \epsilon E$, плотность энергии поля

$$w = \epsilon E^2/8\pi = D^2/8\pi\epsilon = ED/8\pi. \quad (17.2)$$

При $\epsilon = 1$ получаем выражение для плотности энергии поля в вакууме (см. § 9). В анизотропном диэлектрике $D_i = \epsilon_{ik}E_k$ (см. § 15). При интегрировании (17.1) диагональные члены дают $\epsilon_{ii}E_i^2/8\pi$, а недиагональные образуют пары: $E_i\epsilon_{ik}dE_k + E_k\epsilon_{ki}dE_i$. Последнее выражение должно свертываться в полный дифференциал, так как энергия поля зависит только от конечного состояния поля, но не от способа его создания. Для поля в вакууме это вытекает уже из того факта, что оно является самостоятельным физическим объектом. В среде ситуация усложняется, так как мы условились включать в энергию поля также и энергию тепловых процессов. Поэтому необходимо дополнительно предположить, что тепловые процессы в среде обратимы, в частности отсутствует гистерезис.

Мы приходим, таким образом, к выводу, что тензор диэлектрической проницаемости должен быть симметричным: $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$. Отсюда $E_i\epsilon_{ik}dE_k + E_k\epsilon_{ki}dE_i = \epsilon_{ik}d(E_iE_k)$, причем суммирование производится только по $i < k$. Окончательно получаем

$$w = \sum_i \frac{\epsilon_{ii}E_i^2}{8\pi} + \sum_{i < k} \frac{\epsilon_{ik}E_iE_k}{4\pi} = \frac{\epsilon_{ik}E_iE_k}{8\pi} = \frac{(E, D)}{8\pi}. \quad (17.3)$$

В последней сумме мы опустили знак $\sum$, предполагая, что суммирование осуществляется по всем значениям повторяющихся индексов.

В диэлектрике с упругой поляризацией ϵ не зависит от температуры, и тепловые процессы фактически отсутствуют. В этом случае энергия (17.2) должна совпадать с энергией микрополя в среде. Последняя может быть записана следующим образом: $w_{\text{микро}} = \langle E_{\text{микро}}^2 \rangle / 8\pi$. Здесь $E_{\text{микро}} = E + \tilde{E}$ — микрополе, среднее значение которого $\langle E_{\text{микро}} \rangle = E$ есть обычное поле в среде, а $\tilde{E}$ характеризует микроскопические (молекулярные) флуктуации. Тогда $\langle E_{\text{микро}}^2 \rangle = E^2 + \langle \tilde{E}^2 \rangle = \epsilon E^2$, отсюда

$$\epsilon - 1 = \langle \tilde{E}^2 \rangle / E^2, \quad (17.4)$$

т. е. диэлектрическая проницаемость в таком веществе характеризует флуктуации микрополя. Отсюда вытекает также, что в этом случае всегда $\epsilon > 1$.

Проиллюстрируем соотношение (17.4) на примере слоистого «диэлектрика», составленного из металлических пластин толщиной

h , разделенных пустыми промежутками шириной a . (Сравни пример слоистого диэлектрика в § 16.) Среднее поле в таком диэлектрике $E = \langle E_{\text{микро}} \rangle = E_{\text{микро}} h / (a + h) = Dh / (a + h)$, откуда $\epsilon = 1 + a/h$. Энергия поля $w = \langle E_{\text{микро}}^2 \rangle / 8\pi = E_{\text{микро}}^2 h / 8\pi (a + h) = D^2 / 8\pi \epsilon$.

§ 18. ДАВЛЕНИЕ ПОЛЯ

Как мы уже знаем, в электрическом поле на проводнике появляются наведенные заряды. Поле действует на эти заряды, а значит, и на проводник с некоторой силой. Вычислим ее. Начнем с выражения для объемной силы $\mathbf{f}$, т. е. силы, действующей на единицу объема проводника. Ее можно записать в таком виде

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E}, \quad (18.1)$$

где ρ — плотность заряда. Полную силу, действующую на проводник, можно найти, интегрируя (18.1) по всему объему проводника. Но нам известно, что наведенные на проводник заряды сосредоточены лишь вблизи его поверхности. Поэтому сила действует лишь на поверхность проводника, и ее удобно характеризовать давлением. Вычислим это давление, рассматривая небольшой участок проводника как плоский. Обозначим координату вдоль внутренней нормали x и учтем, что вектор $\mathbf{E}$ параллелен этой нормали. Интегрируя (18.1) по переходному слою на поверхности проводника, найдем давление поля

$$p = \int \rho E dx = \int \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dE}{dx} \cdot E dx = - \frac{E^2}{8\pi}. \quad (18.2)$$

Мы использовали здесь уравнение Пуассона, которое в данном случае имеет вид $dE/dx = 4\pi\rho$, так как только составляющая E_x отлична от нуля. Знак минус связан с тем, что ось направлена внутрь проводника, где электрическое поле равно нулю. Давление направлено, таким образом, по внешней нормали к проводнику. При этом говорят обычно о натяжении. Иногда применяется еще более образное выражение — «натяжение силовых линий электрического поля». Согласно (18.2) это «натяжение» численно равно плотности энергии поля.

Давление поля на проводник можно выразить также через поверхностную плотность заряда:

$$-p = 2\pi\sigma^2 = \frac{\sigma E}{2}. \quad (18.3)$$

Появление множителя $1/2$ в последнем выражении связано с тем, что внешнее поле E ослабляется в переходном слое так, что среднее в слое поле равно $E/2$. Это непосредственно следует из интеграла (18.2).

Понятие объемной плотности заряда ρ в поверхностном слое проводника не очень оправдано, так как толщина такого слоя по-

рядка межатомных расстояний. Однако результат интегрирования в (18.2) не зависит от конкретного вида функции $\rho(x)$. Этот же результат можно получить и из энергетических соображений. Рассмотрим для простоты плоский конденсатор, и будем изменять расстояние между пластинами, сохраняя полный электрический заряд на конденсаторе. Последнее условие означает, что конденсатор отсоединен от источника напряжения, так что изменение его энергии происходит только за счет работы внешних сил, перемещающих пластины. Запишем уравнение баланса энергии, считая перемещение малым:

$$Fdh = dW_c, \quad (18.4)$$

где h — расстояние между пластинами, $W_c = Q^2/2C$ — энергия конденсатора емкости $C = S/4\pi h$, F — внешняя сила. Давление поля на пластину конденсатора находится из (18.4):

$$p = -\frac{F}{S} = -\frac{1}{S} \left(\frac{\partial W_c}{\partial h} \right)_Q = -\frac{E^2}{8\pi}. \quad (18.5)$$

Частная производная означает здесь, что производную нужно брать при постоянном заряде.

Если конденсатор присоединен к батарее, так что напряжение на конденсаторе остается постоянным, то в балансе энергии (18.4) нужно учесть работу батареи: $dA = VIdt = VdQ$. Баланс энергии принимает теперь вид

$$Fdh + VdQ = dW_c. \quad (18.6)$$

Учитывая, что при постоянном V можно написать

$$VdQ = V^2 dC = 2dW_c \quad (W_c = CV^2/2), \quad (18.7)$$

получим для давления поля тот же результат

$$p = -\frac{F}{S} = -\frac{1}{S} \left(\frac{\partial W_c}{\partial h} \right)_V = -\frac{E^2}{8\pi}.$$

Изложенный энергетический метод вычисления сил называется также принципом *виртуальных перемещений*. Этот термин означает в данном случае возможное, но не обязательно реально осуществляемое перемещение.

В обычных условиях давление поля очень мало. Например, при напряженности $E = 100$ кВ/см $p \approx 0,004$ бар. При больших полях, как правило, происходит электрический пробой. Однако молекулярные поля, достигающие величины $E \sim 10^9$ В/см, создают огромные натяжения ($\sim 10^8$ бар) и обеспечивают тем самым прочность твердых тел. Отметим попутно, что на практике прочность значительно ниже этого предела ($\leq 10^4$ бар), что связано с различными микронарушениями кристаллической структуры реальных материалов. Для очень чистых монокристаллов удается поднять прочность на растяжение до $\sim 10^5$ бар.

§ 19. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ СИЛЫ В СРЕДЕ

При наличии среды вычисление сил, действующих на проводники и диэлектрики, усложняется. Прежде всего выражение для объемной силы $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E}$ становится несправедливым, даже если под ρ понимать молекулярную плотность заряда. Это связано с тем, что ρ есть средняя макроскопическая плотность, которая не учитывает поляризацию отдельных молекул. Между тем в неоднородном электрическом поле на поляризованную молекулу действует сила (см. § 5). Можно было бы попробовать усреднить эту силу по объему, но такая процедура наталкивается на значительные трудности. Воспользуемся энергетическим методом вычисления сил (см. § 18).

Рассмотрим несколько типичных задач. Найдем силу, действующую на диэлектрический шар, помещенный в слабо неоднородное поле. Последнее условие означает, что поле должно мало меняться на размере шара. Тогда дипольный момент шара будет приблизительно такой же, как и в однородном поле (см. § 16, задача 2): $d = Ea^3(\epsilon - 1)/(\epsilon + 2)$, где E — внешнее поле (в отсутствие шара). Так как момент шара пропорционален полю, от он ведет себя как квазиупругий диполь и, следовательно, его энергия в поле $U = -(\mathbf{d}, \mathbf{E})/2 = -E^2 a^3(\epsilon - 1)/2(\epsilon + 2)$ (см. § 5). Произведем теперь виртуальное перемещение шара во внешнем неоднородном поле и запишем баланс энергии: $-(\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = dU$, где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на шар со стороны поля:

$$\mathbf{F} = -\nabla U = 3V \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \nabla \frac{E^2}{8\pi}, \quad (19.1)$$

т. е. диэлектрик втягивается в сильное поле. Если $\epsilon - 1 \ll 1$ (слабый диэлектрик), то выражение (19.1) справедливо для диэлектрика произвольной формы, так как в этом случае можно пренебречь взаимодействием отдельных участков диэлектрика, которые поляризуются независимо друг друга. Тогда объемная сила, действующая на диэлектрик,

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}}{V} = \nabla \frac{(\epsilon - 1) E^2}{8\pi}, \quad (19.2)$$

т. е. определяется изменением плотности энергии электрического поля при внесении диэлектрика.

Кроме силы, действующей в неоднородном электрическом поле на диэлектрик как целое, в нем возникают еще и внутренние напряжения, называемые стрикционными силами. Рассмотрим пластину диэлектрика, помещенную в плоский конденсатор (рис. II.5). Ясно, что под действием стрикционных сил пластина несколько

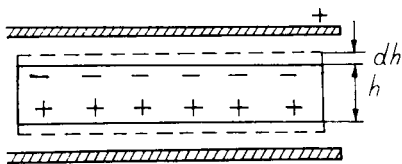


Рис. II.5. К расчету стрикционных сил.

растянется вдоль поля. Попробуем вычислить стрикционные силы в этом примере. Воспользуемся энергетическим методом. При небольшом растяжении пластины изменение энергии поля складывается из двух частей. Во-первых, в слое dh энергия поля в вакууме $E_0^2/8\pi$ заменяется на энергию поля в среде $D^2/8\pi\epsilon = E_0^2/8\pi\epsilon$. Здесь $E_0 = 4\pi\sigma$ — поле в вакуумном зазоре, которое не изменяется при деформации диэлектрика, поскольку мы принимаем заряд на конденсаторе неизменным (см. выше). Во-вторых, необходимо учесть изменение энергии во всем объеме вещества из-за изменения его плотности, от которой зависит диэлектрическая проницаемость: $(dW)_2 = -h \frac{D^2}{8\pi\epsilon} \cdot \frac{d\epsilon}{\epsilon}$, где $d\epsilon = \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\right)_T d\rho = -\rho \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\right)_T \cdot \frac{dh}{h}$. Частная производная взята здесь при постоянной температуре, чтобы исключить зависимость ϵ от температуры. Полный баланс энергии на единицу площади диэлектрика имеет вид

$$p_\epsilon dh + dW = p_\epsilon dh + \frac{E_0^2}{8\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) dh + \rho \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \right)_T \cdot \frac{dh}{h} \cdot \frac{E_0^2 h}{8\pi\epsilon^2} = 0. \quad (19.3)$$

Отсюда натяжение, действующее на диэлектрик,

$$p_\epsilon = \frac{E_0^2}{8\pi} \left(1 - \frac{1}{\epsilon} - \frac{\rho}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \right)_T \right) \quad (19.4)$$

можно рассматривать как разность натяжений снаружи ($E_0^2/8\pi$) и изнутри $\left(E_0^2 \left(\epsilon + \rho \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \right)_T \right) / 8\pi \right)$ диэлектрика, где E — электрическое поле внутри последнего.

Обычно стрикционным давлением называется величина

$$p_{ст} = - \frac{E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \right)_T \rho. \quad (19.5)$$

Это давление не дает вклада в силу, действующую на диэлектрик как целое, при условии, что он окружен вакуумом.

Рассмотрим, наконец, произвольную систему заряженных тел, погруженных в однородный жидкий диэлектрик. Как мы уже знаем (см. § 15), такая среда ослабляет поле в ϵ раз, не изменяя его конфигурации. Отсюда, в частности, следует, что энергия поля также в ϵ раз меньше, чем в вакууме. Значит, и работа по перемещению зарядов, и силы между телами тоже уменьшаются в ϵ раз. На первый взгляд этот вывод кажется тривиальным: раз поле уменьшается в ϵ раз, то во столько же раз должна уменьшиться и сила его воздействия на заряд. Однако под полем в среде понимается среднее поле, тогда как действующее на заряд локальное поле зависит от формы полости, т. е. от формы заряженного тела. Чтобы разобраться, в чем здесь дело, вернемся к предыдущему примеру. Пусть диэлектрик является теперь жидким и заполняет весь конденсатор. Тем не менее мы можем представить себе, что между диэлектриком и пластиной конденсатора существует очень

тонкая щель, в которой поле равно E_0 , так что все предыдущее рассмотрение остается в силе. В таком случае давление поля непосредственно на пластину равно $E_0^2/8\pi$, т. е. такое же, как в вакууме, вместо ожидаемого ослабления в ϵ раз. Этот пример подтверждает, что сила, действующая со стороны поля на заряженное тело, действительно зависит от формы тела.

Однако жидкий диэлектрик имеет, как правило, механический контакт с телом и тоже действует на него с некоторой силой, которая в рассматриваемом примере дается выражением (19.4). Наконец, нужно учесть еще дополнительное давление в жидкости, возникающее за счет электрического поля и равное стрикционному давлению (19.5). Таким образом, полное давление на пластину

$$P = \frac{E_0^2}{8\pi} - P_\epsilon + P_{\text{ст}} = \frac{E_0^2}{8\pi\epsilon} \quad (19.6)$$

в соответствии с энергетическими соображениями.

Подчеркнем еще раз, что такой простой результат получается только для жидкого однородного диэлектрика. Механический контакт проводников с твердым диэлектриком является, как правило, неопределенным. Кроме того, внутренние упругие напряжения зависят теперь не от локального стрикционного давления, а от сил, действующих на весь диэлектрик.

Глава III

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

§ 20. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК. УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Электрическим током называется любое упорядоченное движение электрических зарядов. Как правило, при этом имеется в виду движение зарядов в некоторой среде, именуемой проводником. С точки зрения технических приложений это, пожалуй, наиболее важный случай. Возможны, однако, и другие виды электрического тока, например пучок заряженных частиц в вакууме (см. § 27).

В отсутствие электрического поля электроны в проводнике движутся хаотически, так что их средняя скорость $\bar{v} = \langle v \rangle = 0$. Здесь черта означает усреднение по времени для одного электрона, а скобки — усреднение по многим электронам в определенный момент времени.

Интересно отметить, что в металлах скорость хаотического движения электронов весьма велика и составляет $v_e \sim 10^8$ см/с даже вблизи абсолютного нуля температуры. Это чисто квантовый эф-

фekt — той же природы, что и движение электронов в атомах и молекулах. Нагревание металла лишь незначительно увеличивает эту скорость, даже при температуре испарения металла.

Электрическое поле ускоряет электроны, так что появляется некоторое упорядоченное движение, т. е. электрический ток, который можно охарактеризовать количеством заряда, проходящим через некоторую поверхность в единицу времени. Эта величина называется силой тока и измеряется в амперах (СИ). В гауссовой системе $3 \cdot 10^9$ (г) = 1 А, что приблизительно соответствует потоку в $2 \cdot 10^9$ электронов в секунду.

Другой характеристикой является плотность тока

$$\mathbf{j} = \overline{\rho \mathbf{v}} = e n \mathbf{v}, \quad (20.1)$$

где ρ — плотность заряда, а n — плотность электронов. В дальнейшем мы опускаем знак усреднения.

В обычных условиях средняя скорость электронов v очень мала. Так, например, при плотности тока 1 А/см^2 в медном проводнике эта скорость составляет всего около 5 см в сутки (!). Подчеркнем, что сама по себе эта скорость никак не сказывается на обычных электрических процессах. Ее можно было бы, в принципе, наблюдать лишь в специальных очень тонких экспериментах типа закручивания кольца при возбуждении в нем тока. Если же напряжение подается на обычную электрическую цепь, ток возникает практически одновременно во всех участках цепи.

Полный ток через поверхность S связан с плотностью тока интегралом:

$$I_S = \int_S (\mathbf{j}, d\mathbf{S}). \quad (20.2)$$

Рассмотрим баланс электрического заряда в проводящей среде при протекании тока. Выделим мысленно некоторый объем проводника V , ограниченный замкнутой поверхностью S . Пусть в этом объеме находится заряд $Q = \int_V \rho dV$. Его изменение определяется

током через поверхность:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S (\mathbf{j}, d\mathbf{S}). \quad (20.3)$$

Знаки выбраны так, что положительный ток «вытекает» из объема и заряд уменьшается ($\dot{Q} < 0$). Частная производная $\partial \rho / \partial t$ означает, что имеется в виду локальное (в данной точке проводника) изменение плотности заряда. Правую часть равенства можно преобразовать, используя теорему Остроградского — Гаусса (см. § 6): $\oint (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = \int \text{div } \mathbf{j} dV$. Так как равенство (20.3) справедливо для любого объема, должны быть равны и подинтегральные выражения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0. \quad (20.4)$$

Это соотношение носит название *уравнения непрерывности*. Оно описывает закон сохранения электрического заряда для непрерывного распределения заряда и тока. Уравнение (20.4) называется локальным законом сохранения, а (20.3) — интегральным.

Справедливость уравнения непрерывности вытекает в конечном счете из всей совокупности современных экспериментальных данных. В обычных условиях протекания тока закон сохранения заряда сводится просто к неизменности электрического заряда каждой элементарной частицы. При этом, разумеется, число частиц также остается постоянным. В данном случае уравнение непрерывности означает баланс частиц и может быть записано с помощью чисто механических величин:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(nv) = 0. \quad (20.5)$$

В релятивистской области удобно пользоваться четырехмерным вектором (4-вектором) тока. Определим его соотношением

$$j_k = \rho_0 u_k, \quad (20.6)$$

где $u_k = dx_k/d\tau$ — компоненты 4-скорости, τ — инвариантное время ($d\tau = dt/\gamma$). Величина j_k будет 4-вектором, если ρ_0 — инвариант (скаляр). Выберем в качестве ρ_0 инвариантную плотность заряда, т. е. плотность заряда в собственной системе частиц, где их средняя скорость равна нулю. В нерелятивистском случае определение (20.6) совпадает с (20.1), причем четвертая компонента *) 4-тока ($j_4 = ic\rho_0$) оказывается пропорциональной плотности заряда. В релятивистском случае

$$j_4 = ic\gamma\rho_0 = i\rho c, \quad \mathbf{j} = \rho_0\gamma\mathbf{v} = \rho\mathbf{v}, \quad (20.7)$$

где ρ — обычная плотность заряда в системе отсчета, относительно которой частицы движутся со скоростью v ($\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$). Связь $\gamma\rho_0 = \rho$ получается по аналогии с $\gamma t = t$, поскольку ρ , как и t , является четвертой компонентой 4-вектора. Квадрат модуля 4-вектора тока равен $-c^2\rho_0^2$, так как 4-вектор тока, как и 4-скорость, является времениподобным вектором.

Соотношение (20.7) показывает, что первоначальное нерелятивистское определение плотности тока (20.1) сохраняется и в общем случае.

Подчеркнем, что все понятия и соотношения этого параграфа справедливы для любого вида электрического тока, поскольку они описывают его «кинематику».

*) Мы будем пользоваться метрикой, в которой четвертая компонента 4-вектора является мнимой. Это упрощает вычисления, поскольку выражение для скалярного произведения имеет обычный вид $A_k B_k = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + + A_4 B_4$.

Динамика движения заряженных частиц зависит от конкретных условий протекания тока. Важным частным примером является ток в металлах. Опыт показывает, что в данном случае плотность тока пропорциональна электрическому полю. Это означает, что на движущийся в металле электрон действует как бы сила трения, пропорциональная скорости электрона. Коэффициент пропорциональности между плотностью тока и полем (σ) называется *проводимостью*:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (21.1)$$

Трение вызвано взаимодействием электронов с ионами решетки. Если считать, что после столкновения средняя скорость электрона $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$ (сферически-симметричное рассеяние), то сила трения

$$\mathbf{f}_{\text{тр}} = -\nu m \mathbf{v}, \quad (21.2)$$

где ν — частота столкновений, которая зависит от длины свободного пробега l_s (от одного столкновения до другого) и от скорости электрона: $\nu \sim v_e/l_s$. Величины v_e , l_s , а значит, и ν можно приближенно считать постоянными. Отсюда и вытекает закон (21.1) с постоянной σ . Здесь существенно, что $v \ll v_e \sim 10^8$ см/с (см. § 20).

Установившаяся скорость движения электронов определяется из условия $e\mathbf{E} + \mathbf{f}_{\text{тр}} = 0$:

$$\mathbf{v} = \frac{e\mathbf{E}}{\nu m}. \quad (21.3)$$

Отсюда плотность тока $\mathbf{j} = e^2 n \mathbf{E} / \nu m$ и проводимость

$$\sigma = \frac{ne^2}{\nu m} \sim \frac{ne^2 l_s}{m v_e} = \frac{n r_e c^2 l_s}{v_e}, \quad r_e = \frac{e^2}{m c^2}. \quad (21.4)$$

Заметим, что σ имеет в гауссовой системе размерность частоты. С помощью оценки (21.4) можно определить длину свободного пробега l_s по экспериментальному значению σ . Для меди ($\sigma = 5 \cdot 10^{17}$ с⁻¹) находим $l_s \sim \frac{\sigma v_e}{n r_e c^2} \sim \frac{5 \cdot 10^{17} \cdot 10^8}{10^{23} \cdot 3 \cdot 10^{-13} \cdot 10^{21}} \sim 2 \cdot 10^{-6}$ см.

Это примерно в 100 раз больше межатомного расстояния в решетке. Такой большой пробег не объясним с точки зрения классической механики, которая предсказывает величину порядка межатомных расстояний. По квантовой механике в идеальной решетке вообще нет трения. Рассеяние возникает только за счет нерегулярных искажений структуры решетки, главным образом вследствие тепловых колебаний атомов. Ясно, что и l_s и σ должны заметным образом зависеть от температуры.

Рассмотрим протекание постоянного тока по тонкому длинному проводнику. В этом случае можно считать, что плотность тока постоянна по сечению проводника. Следовательно, полный ток $I = jS$. Пусть, далее, сечение проводника постоянно по его длине,

тогда и $j = \text{const}$, так как полный ток не изменяется вдоль проводника. С другой стороны, полное напряжение (разность потенциалов) на концах проводника равно $V = El$, где l — длина проводника. Подставляя полученные выражения в (21.1), найдем

$$V = I \frac{l}{\sigma S}. \quad (21.5)$$

Величина

$$R = \frac{l}{\sigma S} \quad (21.6)$$

называется *сопротивлением* проводника.

Закон пропорциональности тока и напряжения для металлических проводников был открыт экспериментально в 1826 г. немецким математиком и физиком Омом и носит его имя. Он ввел также понятие сопротивления и нашел его зависимость от параметров проводника (21.6). Интересно отметить, что Ом открыл свой закон, используя в качестве источника тока медно-висмутую термопару с разностью температур 100°C . Известные в то время гальванические элементы оказались, как обнаружил Ом, совершенно непригодными для таких опытов из-за неустойчивости их ЭДС и внутреннего сопротивления. Соотношение (21.1) носит название дифференциального закона Ома.

Единицей сопротивления в СИ является $1 \text{ Ом} = 1 \text{ В} / 1 \text{ А} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} (\text{г})$. В соответствии с этим единица проводимости в СИ есть $1 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1} = 9 \cdot 10^9 (\text{г}) = 9 \text{ ГГц}$.

Если сечение проводника изменяется достаточно медленно, так что в каждом сечении плотность тока однородна по сечению, то полное напряжение на проводнике

$$V = \int_0^l E dx = I \int_0^l \frac{dx}{\sigma(x) S(x)},$$

т. е. сопротивление такого проводника

$$R = \frac{V}{I} = \int_0^l \frac{dx}{\sigma S}. \quad (21.7)$$

Приведенное выражение справедливо и в общем случае произвольной проводящей среды, если под S понимать сечение достаточно тонкой трубки тока. Под последней подразумевается область проводника, ограниченная линиями тока (см. § 6).

При протекании тока по сопротивлению электрические заряды проходят разность потенциалов $V = RI$. При этом источник тока совершает работу $\Delta A = \Delta Q \cdot V = VI \Delta t$, переходящую в тепло из-за трения, механизм которого рассмотрен выше. Мощность, выделяющаяся на сопротивлении, равна (*закон Джоуля — Ленца*)

$$P = VI = RI^2 = V^2/R. \quad (21.8)$$

Задача. Пространство между бесконечно длинными коаксиальными идеально проводящими цилиндрами радиусов a, b заполнено веществом с проводимостью $\sigma(r) = \alpha r^n$. Найти распределение потенциала в пространстве между цилиндрами и сопротивление на единицу длины.

Уравнение непрерывности (20.4) совместно с законом Ома (21.1) дает

$$\operatorname{div}(\sigma \mathbf{E}) = -(\nabla, \sigma \nabla \varphi) = 0, \text{ или } \sigma \Delta \varphi + (\nabla \sigma, \nabla \varphi) = 0. \quad (21.9)$$

В цилиндрической системе координат (при условии аксиальной симметрии) имеем

$$\alpha r^n \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) + \alpha n r^{n-1} \frac{d\varphi}{dr} = 0,$$

или

$$r^n \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + (n+1) r^{n-1} \frac{d\varphi}{dr} = 0. \quad (21.10)$$

Решение ищем в виде

$$\varphi(r) = Ar^k + B. \quad (21.11)$$

Подставляя (21.11) в (21.10), находим $k_1 = -n$, $k_2 = 0$ и, удовлетворяя граничным условиям $\varphi(a) = V$, $\varphi(b) = 0$, окончательно получим

$$\varphi(r) = V \frac{(b/r)^n - 1}{(b/a)^n - 1}. \quad (21.12)$$

Сопротивление на единицу длины найдем, вычислив полный ток:

$$I = 2\pi r j(r) = -2\pi r \sigma(r) \nabla \varphi = 2\pi V \frac{\alpha b^n}{(b/a)^n - 1}, \quad (21.13)$$

$$R = \frac{(b/a)^n - 1}{2\pi \sigma_{\max}}.$$

Из уравнения (21.9) видно, что при $\sigma = \text{const}$ задача о растекании тока по объемному проводнику сводится к уравнению Лапласа. Это обстоятельство иногда используется для моделирования электрических полей на так называемых электролитических ваннах.

§ 22. ТОК В ИЗОЛЯТОРАХ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ТОКА

Между изоляторами и проводниками не существует резкой грани. Любой изолятор имеет конечную, хотя обычно и очень малую, проводимость. Хорошей иллюстрацией служит вода. С одной стороны, вода — проводник. По этой причине, например, категорически запрещается тушить водой горящую электропроводку: по струе воды пожарник немедленно оказывается под высоким напряжением, кроме того, вода вызывает дополнительные короткие замыкания, усиливая пожар. С другой стороны, вода используется в качестве изолятора в специальных конденсаторах.

Механизм проводимости в изоляторах значительно сложнее, чем в металлах. В твердом изоляторе он связан с наличием неболь-

шого количества свободных электронов или «дырок» (полупроводники), возникающих вследствие «ионизации» атомов решетки под действием теплового движения. В жидких же изоляторах (в том числе и в воде) проводимость связана с движением ионов как положительных, так и отрицательных.

Зависимость между напряжением и током в изоляторе является, вообще говоря, нелинейной, т. е. закон Ома становится несправедливым. Можно, однако, и в этом случае сохранить понятие проводимости (и сопротивления) (21.1), которая теперь уже зависит от поля. Аналогичная ситуация имеет место и в других случаях: например, в плазме, полупроводниках, электронных лампах и др. Электрические свойства таких проводящих элементов задаются их характеристикой $I = f(V)$. Например, для электронного диода при достаточно большой эмиссии катода характеристика имеет вид $I(V) = AV^{3/2}$, где A — некоторая постоянная (см. (27.4)).

Электрический ток в диэлектрике изменяет граничные условия для полей. Действительно, нормальная компонента плотности постоянного тока должна оставаться непрерывной на границе двух сред:

$$j_{n1} = j_{n2}. \quad (22.1)$$

Это приводит к новому граничному условию для вектора $\mathbf{E}$:

$$\sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2}. \quad (22.2)$$

Выполнение данного условия требует присутствия на границе свободного заряда, что дает, в свою очередь, скачок вектора индукции:

$$D_{n2} - D_{n1} = D_{n1} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1 \right). \quad (22.3)$$

Интересно отметить, что это выражение зависит только от отношения проводимостей, но не от их абсолютной величины. Отсюда, казалось бы, можно сделать вывод, что обычное граничное условие $D_{n1} = D_{n2}$ никогда не выполняется. В действительности, однако, поверхностный заряд на границе двух сред, необходимый для выполнения условия (22.3), натекает лишь через некоторое конечное время, обратно пропорциональное проводимости среды (см. § 23). Поэтому для переменного поля достаточно высокой частоты сохраняется обычное условие, а условие (22.2) справедливо для низких частот, и в частности для постоянного поля.

Граничные условия для продольных компонент поля не изменяются в присутствии тока.

Задача 1. Найти стационарное поле в плоском конденсаторе, диэлектрик которого состоит из двух слоев толщины h_1, h_2 с диэлектрическими постоянными $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и проводимостями σ_1, σ_2 .

Поскольку конденсатор имеет утечку, стационарное поле возможно только при условии, если он постоянно подключен к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$. Тогда отношение полей в слоях определится из условия равенства токов утечки: $\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$. Кроме того, $h_1 E_1 + h_2 E_2 = \mathcal{E}$. Отсюда $E_{1,2} = \sigma_2 \mathcal{E} / (h_1 \sigma_2 + h_2 \sigma_1)$.

На границе между слоями образуется заряд

$$Q = \frac{\varepsilon S}{4\pi} \cdot \frac{\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1} = C \varepsilon \frac{\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdot \frac{h_1 \varepsilon_2 + h_2 \varepsilon_1}{h_1 \sigma_2 + h_2 \sigma_1}.$$

Здесь S — площадь конденсатора, а C — его емкость.

Представим себе два электрода, погруженные в бесконечный неоднородный диэлектрик. Оказывается, что сопротивление между электродами можно связать с емкостью между ними. Действительно, полный ток в цепи можно записать в виде

$$I = \oint_S (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = \frac{\sigma}{\varepsilon} \oint_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = \frac{4\pi\sigma Q}{\varepsilon}, \quad (22.4)$$

где S — поверхность, охватывающая один из электродов, а Q — полный заряд на нем. Подставляя $Q = CV = RC I$, приходим к соотношению

$$\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} RC = 1. \quad (22.5)$$

Отметим, что величина RC имеет размерность времени и характеризует в этом примере процесс разрядки конденсатора за счет внутренних утечек. Действительно, время разрядки $\tau \sim Q/I = \frac{CV}{V/R} = RC$ (подробнее см. § 25). Интересно, что время разрядки не зависит согласно (22.5) от геометрии конденсатора:

$$\tau = RC = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}. \quad (22.6)$$

Задача 2. Оценить сопротивление заземления, которое выполнено в форме пластины с размерами $l \gg a \gg h$.

Используя результат, полученный в задаче в § 12, и соотношение (22.5), найдем $R_3 \sim \frac{\pi + \ln(l/a)}{2\pi\sigma l}$.

Типичная проводимость грунта $\sigma \sim 10^8$ (г). Если принять размеры заземления $l \sim 10$ м, $\ln(l/a) \sim 1$, то $R_3 \sim 10$ Ом. Для сравнения укажем, что сопротивление заземления через водопроводную сеть ~ 1 Ом. В этом случае большая длина сети не уменьшает существенно сопротивление, поскольку начинает играть роль сопротивление самих железных труб. Сопротивление заземления в виде свободно лежащего на земле провода длиной 50 м колеблется от 1 до 10^3 Ом в зависимости от состояния грунта, главным образом от его влажности.

Задача 3. Оценить напряженность электрического поля вокруг заземления, описанного в задаче 2.

Ограничимся областью $r \gg l$, тогда $E \sim q/r^2$, $q = CV$, $C \sim (l/2)/l/(\pi + \ln(l/a)) \sim l/\ln(l/a)$ (см. задачу в § 12), откуда $E \sim \frac{Vl}{r^2 \ln(l/a)}$. Если на заземление «попало высокое напряжение», то вокруг него создается опасная зона, так как даже на расстоянии в один шаг на поверхности земли приходится величина $V_{\text{ш}} \sim \frac{Vl\lambda}{r^2 \ln(l/a)}$, где λ — длина шага. Например, при падении на землю провода линии электропередачи на 100 кВ радиус опасной зоны $r_{\text{оп}} \sim \sqrt{\frac{Vl\lambda}{V_{\text{оп}} \ln(l/a)}} \sim 3$ м, где принято $l \sim 1$ м, $a \sim 1$ см, $\lambda \sim 0,5$ м и опасно шаговое напряжение $V_{\text{оп}} \sim 10^3$ В.

§ 23. РЕЛАКСАЦИЯ ЗАРЯДОВ В СРЕДЕ

Пусть в начальный момент в проводящей среде имеется некоторое распределение свободного заряда $\rho(\mathbf{r}, 0)$. Как будет оно изменяться с течением времени? Для однородной среды задача может быть решена в общем случае. Напишем уравнение непрерывности: $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ и исключим из него $\mathbf{j}$ с помощью закона Ома ($\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$) и уравнения поля $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$. В результате получим уравнение

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0, \quad \tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}. \quad (23.1)$$

Для решения этого уравнения используем, как и в § 11, метод разделения переменных, т. е. будем искать решение в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) T(t). \quad (23.2)$$

При подстановке полученного выражения в уравнение (23.1) $\rho(\mathbf{r})$ сокращается (тривиальный случай разделения переменных), и получаем обыкновенное дифференциальное уравнение: $dT/dt = -T/\tau$, решение которого: $T(t) = e^{-t/\tau}$. Постоянную интегрирования включаем в функцию $\rho(\mathbf{r})$, определяемую начальными условиями: $\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}, 0)$. Окончательно имеем

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, 0) e^{-t/\tau}. \quad (23.3)$$

Такой процесс называется релаксацией зарядов в среде. Распределение заряда не изменяется в процессе релаксации. Куда же уходит заряд? Очевидно, на бесконечность или, точнее, на границу среды. В этом можно убедиться и непосредственно, вычислив полный ток в среде в процессе релаксации. Вдали от зарядов $I = 4\pi\sigma Q/\varepsilon$ (см. (22.4)) не зависит от расстояния, т. е. заряд передается на бесконечность. Как подробно разобрано в § 20, это вовсе не значит, что электроны, образующие первоначальный заряд, уходят на бесконечность. В действительности происходит лишь небольшое смещение всех зарядов среды, эквивалентное передаче заряда на бесконечность.

Саморазряд конденсатора, рассмотренный в конце предыдущего параграфа, можно считать частным случаем релаксации зарядов в среде. Теперь становится понятным, почему он не зависит от геометрии конденсатора. Решение (23.3) показывает, что саморазряд происходит по экспоненциальному закону, а величина RC равна времени, за которое напряжение на конденсаторе убывает в e раз. Для лучших изоляторов (янтарь, плавленый кварц) это время достигает 10 дн ($\sigma \sim 10^{-6}$ (г)). Для обычного стекла $\tau \sim 10$ с, а для химического стекла всего $\sim 10^{-4}$ с.

Для металлов время релаксации очень мало. Например, для меди формула (23.1) дает $\tau \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ с. При таких малых τ , однако, полученное решение теряет смысл, так как уже нельзя пренебрегать массой электронов. Поэтому рассмотрим обратный случай, в котором мы будем пренебрегать трением, т. е. считать про-

водимость бесконечной. Уравнение движения электрона имеет теперь вид $m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E}$. Умножая обе части равенства на en , получим вместо закона Ома уравнение

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{e^2 n}{m} \mathbf{E}. \quad (23.4)$$

Продифференцируем уравнение непрерывности по времени:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \operatorname{div} \frac{d\mathbf{j}}{dt} = 0. \quad (23.5)$$

Частная производная (производная в данной точке) связана с полной производной (производной для данной группы частиц) соотношением

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{j}. \quad (23.6)$$

Но мы знаем (см. § 20), что в металлах скорость электронов ничтожно мала, поэтому вторым членом можно пренебречь. Подставляя (23.4) в (23.5) и используя выражение $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \omega_p^2 \rho = 0, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n}{em}. \quad (23.7)$$

Это уравнение решается точно таким же методом, как и (23.1). Для функции $T(t)$ получается уравнение колебаний:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega_p^2 T = 0.$$

Окончательное решение имеет вид

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, 0) \cos(\omega_p t + \varphi). \quad (23.8)$$

Таким образом, в этом предельном случае возникают гармонические колебания плотности заряда. Частота колебаний ω_p называется *плазменной частотой*, так как такой процесс характерен для разреженной плазмы, в которой можно пренебречь столкновениями между частицами, а значит, и сопротивлением.

Наконец, в общем случае уравнение движения электрона можно записать в форме

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} - \nu m\mathbf{v}, \quad (23.9)$$

где ν — эффективная частота столкновений (см. § 21). Переходя к плотности тока, получим

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \nu \mathbf{j} = \frac{e\omega_p^2}{4\pi} \mathbf{E}. \quad (23.10)$$

Отсюда, в частности, следует выражение для проводимости:

$$\sigma = \frac{e\omega_p^2}{4\pi\nu}. \quad (23.11)$$

Возьмем теперь уравнение непрерывности, умножим его на v и сложим с уравнением (23.5). Используя, далее, соотношения (23.10) и $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$, придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + v \frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_p^2 \rho = 0. \quad (23.12)$$

Для временной зависимости $T(t)$ получается уравнение колебаний с затуханием:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + v \frac{dT}{dt} + \omega_p^2 T = 0. \quad (23.13)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$T(t) = e^{-vt/2} \cos(\omega t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{\omega_p^2 - \frac{v^2}{4}}. \quad (23.14)$$

Окончательно получим

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, 0) e^{-vt/2} \cos(\omega t + \varphi). \quad (23.15)$$

Время релаксации зарядов

$$\tau = \frac{2}{v} = \frac{8\pi\sigma}{\varepsilon\omega_p^2}. \quad (23.16)$$

Для меди $\omega_p \sim 10^{16}$; $\sigma \approx 5 \cdot 10^{17}$; $\varepsilon \sim 1$ и $\tau \sim 10^{-13}$. Эта величина значительно больше первоначальной оценки по формуле (23.1), но все еще очень мала.

Задача. Найти коэффициент ослабления переменного электрического поля в металле.

Внешнее поле E_e индуцирует на поверхности металла заряды с плотностью $E_e/4\pi$ ($E_e \gg E_i$). При изменении зарядов возникает ток $j = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dE_e}{dt}$, а значит, и электрическое поле $E_i = j/\sigma = \frac{1}{4\pi\sigma} \cdot \frac{dE_e}{dt}$. В частности, если поле изменяется по гармоническому закону с частотой ω , коэффициент ослабления поля $k = |E_e/E_i| = 4\pi\sigma/\omega$.

§ 24. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ. ЗАКОНЫ КИРХГОФА

Простейшая электрическая цепь состоит из источника напряжения и нагрузки (сопротивления). Схема такой цепи приведена на рис. III.1. Источником тока здесь служит гальванический элемент, нагрузкой является электрическая лампочка. Источник характеризуется *электродвижущей силой* $\mathcal{E}$ (сокращенно — ЭДС), которая связана с током в цепи соотношением

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\Sigma} + R_i}. \quad (24.1)$$

Здесь R_n — сопротивление нагрузки, а R_i — внутреннее сопротивление источника (см. рис. III.1). Отсюда видно, в частности, что ЭДС равна напряжению V на зажимах разомкнутого источника: $V = \mathcal{E} - IR_i \rightarrow \mathcal{E}$ при $R_n \rightarrow \infty$.

Полезная мощность, выделяющаяся на нагрузке,

$$P_n = I^2 R_n = \frac{\mathcal{E}^2 R_n}{(R_n + R_i)^2}. \quad (24.2)$$

Полная же мощность, затрачиваемая источником, складывается из полезной мощности P_n и потерь на внутреннем сопротивлении: $P_0 = I^2 (R_n + R_i) = \mathcal{E}^2 / (R_n + R_i)$. Отсюда КПД цепи $\eta = P_n / P_0 = R_n / (R_n + R_i)$. При заданном внутреннем сопротивлении источника максимальная мощность на нагрузке достигается при $R_n = R_i$ (так называемая согласованная нагрузка). При этом, однако, КПД цепи равен всего 50%.

Мы рассмотрели простейшую цепь, где источник напряжения, его внутреннее сопротивление и нагрузка пространственно разделены между собой. Это — так называемая цепь с сосредоточенными параметрами. В общем случае приходится рассматривать цепи с распределенными параметрами. В этом случае действие распределенного источника описывается с помощью так называемого стороннего поля $E_{\text{стр}}$, которое характеризует дополнительную силу, действующую на заряд внутри источника. Полная сила в этом случае

$$f = e(E + E_{\text{стр}}), \quad (24.3)$$

где E — обычное электростатическое поле в цепи.

Какова же физическая природа сторонней силы? Она зависит от конструкции источника. В гальваническом элементе — это «химические силы», связанные с внутримолекулярными электрическими полями. В динамомашине — вихревое электрическое поле (ЭДС индукции, см. § 45). Существенно, что стороннее поле непотенциально, так как источник напряжения совершает работу при обходе заряда вокруг замкнутой цепи. Вычислим эту работу для цепи с распределенными параметрами и переменным сечением проводников (см. § 24). Для этого учтем, что дифференциальный закон Ома прини-

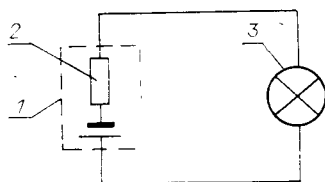


Рис. III.1. Схема простейшей электрической цепи.

1 — гальванический элемент; 2 — его внутреннее сопротивление; 3 — сопротивление лампочки.

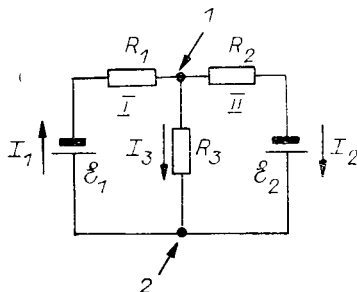


Рис. III.2. Пример разветвленной цепи.

мает теперь вид

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стр}}), \quad (24.4)$$

откуда $\oint ((\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стр}}), d\mathbf{l}) = \oint (\mathbf{E}_{\text{стр}}, d\mathbf{l}) = \oint \frac{(\mathbf{j}, d\mathbf{l})}{\sigma} = I \oint \frac{dl}{\sigma S}$. Но последнее выражение равно ЭДС источника, так как в нем учитывается полное сопротивление цепи, как внешнее, так и внутреннее:

$$I \oint \frac{dl}{\sigma S} = \mathcal{E} = \oint (\mathbf{E}_{\text{стр}}, d\mathbf{l}), \quad (24.5)$$

Таким образом, ЭДС характеризует работу источника тока при обходе единичного заряда вокруг замкнутой цепи.

Вернемся теперь к цепям с сосредоточенными параметрами и рассмотрим так называемые разветвленные цепи (рис. III.2).

Такие цепи рассчитываются с помощью законов Кирхгофа, установленных им в 1877 г.

Первый закон Кирхгофа относится к точкам разветвления цепи, называемым узлами (точки 1, 2 на рис. III.2). В каждом узле

$$\sum I_k = 0, \quad (24.6)$$

где притекающий к узлу ток берется с одним знаком, а оттекающий — с противоположным. Для постоянного тока это соотношение непосредственно следует из закона сохранения заряда. Заметим, что в непрерывной проводящей среде, каждую точку которой можно считать узлом, соотношение (24.6) переходит в уравнение $\text{div } \mathbf{j} = 0$, являющееся частным случаем уравнения непрерывности (20.4). Законы Кирхгофа для переменного тока будут рассмотрены в следующем параграфе, а также в § 52.

Второй закон Кирхгофа относится к любому контуру, который можно выделить в разветвленной цепи:

$$\sum_k R_k I_k = \sum_l \mathcal{E}_l. \quad (24.7)$$

Суммирование производится здесь по всем элементам выделенного контура. Соотношение (24.7) является следствием потенциальности электростатического поля. В непрерывной среде для любого контура, точнее, для трубки тока вокруг контура имеет место аналогичное соотношение (24.5), выражающее собой закон Ома.

Система уравнений (24.6), (24.7) позволяет рассчитать любую разветвленную цепь. Например, для схемы на рис. III.2 уравнения Кирхгофа принимают вид

$$I_1 = I_2 + I_3, \quad \mathcal{E}_1 = I_1 R_1 + I_3 R_3, \quad \mathcal{E}_2 = I_2 R_2 - I_3 R_3, \quad (24.8)$$

откуда

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1(R_2 + R_3) + \mathcal{E}_2 R_3}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 R_3 + \mathcal{E}_2(R_1 + R_3)}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3},$$

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}. \quad (24.9)$$

§ 25. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ЕМКОСТЬЮ

Рассмотрим цепи, содержащие электрические емкости. Такие цепи, например, изображены на рис. III.3. В этом случае, так же как и в предыдущем параграфе, можно использовать уравнения Кирхгофа. Единственное отличие состоит в том, что связь между напряжением на емкости и током через нее I_C задается теперь дифференциальным соотношением

$$I_C = \frac{dQ_C}{dt} = C \frac{dV}{dt} \quad (25.1)$$

вместо закона Ома для сопротивления $I = V/R$. В непрерывной проводящей среде это соотношение соответствует уравнению непрерывности (20.4). Законы Кирхгофа приводят, таким образом, к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений вместо линейных алгебраических для цепей с сопротивлениями.

Рассмотрим в качестве примера саморазряд конденсатора вследствие утечки тока по его диэлектрику (ср. § 22). Эквивалентная схема такого конденсатора изображена на рис. III.3, а. Первое уравнение Кирхгофа сводится в этом случае к соотношению (25.1), а второе дает $V_C + RI = 0$, или

$$RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = 0. \quad (25.2)$$

Решение линейного однородного дифференциального уравнения всегда ищется в виде

$$V_C = Ae^{\lambda t}, \quad (25.3)$$

где λ — неизвестный параметр решения, а A — постоянная интегрирования, которая определяется из начальных условий. Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение, получим алгебраическое уравнение для λ : $RC\lambda + 1 = 0$, откуда $\lambda = -1/RC$. Постоянную A найдем из условия, что при $t = 0$ напряжение на емкости было V_0 , откуда $A = V_0$. Окончательно решение имеет вид

$$V_C = V_0 e^{-t/RC}. \quad (25.4)$$

Таким образом, разряд емкости через сопротивление происходит по экспоненциальному закону и характеризуется постоянной времени $\tau = RC$ (ср. (22.6)).

Рассмотренный пример показывает, что характерной особенностью цепей с емкостью является наличие так называемого пере-

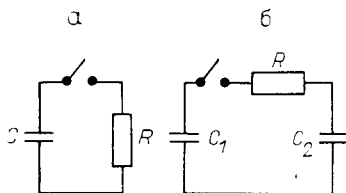


Рис. III.3. Электрические цепи с емкостью.

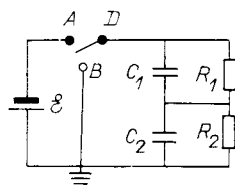


Рис. III.4. Схема цепи к задачам 2, 3 § 25.

ходного процесса, в результате которого напряжение на емкости стремится к некоторому стационарному значению. По истечении достаточно большого времени ($t \gg \tau$) емкость можно рассматривать просто как разрыв цепи (бесконечное сопротивление), и мы возвращаемся к случаю цепей с сопротивлениями и постоянным током. При расчете переходного процесса нужно учитывать, вообще говоря, не только явные емкости конденсаторов, включенных в цепь, но и так называемые «паразитные» емкости между проводами, концами сопротивления, между элементами цепи и окружающими предметами («землей») и пр. Роль этих «паразитных» емкостей тем больше, чем выше частота тока в цепи (подробнее см. § 52).

Задача 1. Рассмотреть разрядку одного конденсатора на другой (рис. III.3, б).

Уравнения Кирхгофа имеют вид

$$V_1 + V_2 + RI = 0, \quad I = C_1 \dot{V}_1 = C_2 \dot{V}_2. \quad (25.5)$$

Интегрируя последнее уравнение, получим $C_1 V_1 = C_2 V_2 + A$. Исключая, например, V_2 , найдем

$$\dot{V}_1 + \frac{V_1}{\tau} = \frac{A}{RC_1 C_2}, \quad \tau = \frac{RC_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (25.6)$$

Решение

$$V_1 = \frac{A}{C_1 + C_2} + B e^{-t/\tau}. \quad (25.7)$$

содержит две постоянных интегрирования (A, B), которые определяются начальным напряжением на емкостях: $V_1(0) = \frac{A}{C_1 + C_2} + B = V_0, \quad V_2(0) =$

$$= \frac{C_1}{C_2} V_1(0) - \frac{A}{C_2} = \frac{C_1 V_0 - A}{C_2} = 0. \text{ Окончательно получаем}$$

$$V_1(t) = V_0 \frac{C_1 + C_2 e^{-t/\tau}}{C_1 + C_2}. \quad (25.8)$$

Рассмотрим еще баланс энергии в цепи. В начальный момент $W_0 = C_1 V_0^2/2$, а в конце $W_\infty = (C_1 + C_2) V_1^2(\infty)/2 = W_0 C_1/(C_1 + C_2)$. Интересно отметить, что энергия, выделявшаяся на сопротивлении $W_R = W_0 C_2/(C_1 + C_2)$, не зависит от его величины.

Задача 2. Рассмотреть процесс зарядки плоского конденсатора из задачи 1 § 22.

Записав второе уравнение Кирхгофа в виде $E_1 h_1 + E_2 h_2 = \mathcal{E}$ и условия на границе между слоями: $\epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1 = 4\pi Q/S, \quad \sigma_2 E_2 - \sigma_1 E_1 = -\frac{4\pi}{S} \cdot \frac{dQ}{dt}$, найдем, например, уравнение для свободного заряда на границе:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{\tau} = \frac{Q_0}{\tau}, \quad \tau = \frac{\frac{\epsilon_1}{h_1} + \frac{\epsilon_2}{h_2}}{4\pi \left(\frac{\sigma_1}{h_1} + \frac{\sigma_2}{h_2} \right)}, \quad Q_0 = \frac{\mathcal{E} S}{4\pi} \cdot \frac{\sigma_1 \epsilon_2 - \sigma_2 \epsilon_1}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1}. \quad (25.9)$$

Отсюда

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/\tau}),$$

$$E_1(t) = \frac{\mathcal{E}}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1} \left(\sigma_2 + h_2 e^{-t/\tau} \frac{\sigma_1 \epsilon_2 - \sigma_2 \epsilon_1}{\epsilon_1 h_2 + \epsilon_2 h_1} \right). \quad (25.10)$$

$E_2(t)$ получим перестановкой индексов $1 \rightleftharpoons 2$. Таким образом, поля и заряды, найденные в задаче 1 § 22, устанавливаются с характерным временем τ из (25.9) (ср. с (22.6)). Эквивалентная схема такого конденсатора представлена на рис. III.4 — ключ в положении А. При этом $C_{1,2} = \frac{\varepsilon_{1,2} S}{4\pi h_{1,2}}$, $R_{1,2} = \frac{h_{1,2}}{\sigma_{1,2} S}$. Из (25.10) следует, что при $t = 0$ напряжения на «конденсаторах» определяются отношением емкостей («емкостной делитель»):

$$U_1(0) = E_1(0) h_1 = \mathcal{E} \frac{\varepsilon_1 h_2}{\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_2 h_1} = \mathcal{E} \frac{C_2}{C_1 + C_2}, \quad (25.11)$$

а при $t \rightarrow \infty$ — отношением сопротивлений («омический делитель»):

$$U_1|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \mathcal{E} \frac{\sigma_2 h_1}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1} = \mathcal{E} \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (25.12)$$

Если $\sigma_1 \varepsilon_2 = \sigma_2 \varepsilon_1$ или, что то же самое, $R_1 C_1 = R_2 C_2$, напряжения на «конденсаторах» не зависят от времени («компенсированный делитель»), и значения U_1 из (25.11), (25.12) совпадают.

Задача 3. Два конденсатора с утечками подсоединены последовательно к источнику высокого напряжения (см. рис. III.4). Затем конденсаторы отключаются от источника, заземляются на короткое время, после чего отсоединяются от «земли». Найти напряжение в точке D . Напряжения на емкостях перед заземлением равны $V_{10} = \mathcal{E} R_1 / (R_1 + R_2)$, $V_{20} = \mathcal{E} R_2 / (R_1 + R_2)$ (см. (25.12)).

После заземления полный заряд параллельно соединенных конденсаторов $Q = C_1 V_{10} - C_2 V_{20}$, а, следовательно, напряжение на них

$$V_1 = -V_2 = V_0 = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \mathcal{E} \frac{\tau_1 - \tau_2}{(C_1 + C_2)(R_1 + R_2)}, \quad (25.13)$$

где $\tau_1 = R_1 C_1$; $\tau_2 = R_2 C_2$. После размыкания конденсаторов каждый из них разряжается через свою утечку по закону (25.4). Напряжение в точке D будет равно

$$V_D(t) = V_1 + V_2 = V_0(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}). \quad (25.14)$$

Если постоянные времени конденсаторов существенно различны ($\tau_1 \gg \tau_2$), V_D может быть порядка начального напряжения $\mathcal{E}$ в течение времени $\sim \tau_1$.

Закорачивание конденсаторов является стандартной процедурой обеспечения безопасности при работе с высоким напряжением. Рассмотренная задача показывает, однако, что конденсаторы ведут себя весьма «коварно» — после закорачивания на них снова может появиться высокое напряжение, которое сохраняется иногда в течение нескольких дней. Это не раз приводило к несчастным случаям с неопытными экспериментаторами. Частичное решение состоит в том, чтобы закорачивать каждый конденсатор в отдельности. Однако и в этом случае возможно появление высокого напряжения, так как обычно высоковольтный конденсатор состоит из последовательно соединенных секций. Поэтому правила техники безопасности предписывают после выключения напряжения держать высоковольтные конденсаторы все время закороченными. При включенном напряжении доступ к установке должен быть надежно защищен специальным заземленным ограждением. Заметим попутно, что такое ограждение, призванное защитить экспериментатора, является в то же время источником дополнительной опасности именно потому, что оно заземлено, а при хорошем контакте экспериментатора с землей даже напряжение 220 В смертельно опасно.

Разобранный пример с конденсатором показывает, что обеспечение безопасности является сложной физической задачей, так как

необходимо все время учитывать самые неожиданные и сложные физические процессы. Другим примером подобной опасности при работе с высоким напряжением является так называемое шаговое напряжение (см. задачу 3 § 22).

§ 26. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ РАЗРЯД

В обычных условиях проводимость изоляторов очень мала. Однако в достаточно сильных электрических полях возникает так называемый пробой изолятора, или электрический разряд. В месте пробоя проводимость изолятора резко возрастает, причем она зависит сложным образом от напряженности поля, тока, начальных условий и многих других факторов.

Начнем с электрического разряда в газе. Проводимость газа в слабых полях связана с наличием в нем небольшого числа ионов и электронов, которые возникают вследствие ионизации молекул газа под действием космических лучей, радиоактивности земной коры и, в меньшей степени, ультрафиолетового излучения Солнца. Так, например, у поверхности моря космические лучи создают около двух пар ионов в кубическом сантиметре в секунду. У поверхности суши к этому прибавляется еще около пяти пар ионов за счет радиоактивности земной коры. Средняя концентрация всех ионов у поверхности Земли составляет $\sim 10^3 \text{ см}^{-3}$. Среднее время жизни иона до рекомбинации порядка 100 с. За такое большое время все электроны, возникшие в результате ионизации, успевают образовать отрицательные ионы, «примкнув» к молекулам кислорода. При нормальных условиях электрону требуется для этого около 10^5 столкновений, т. е. всего лишь 10^{-6} с. Отсюда видно, что при обычных условиях проводимость газа в слабых полях является ионной. Реальная картина еще сложнее: проводимость определяется в основном ионными кластерами, содержащими десятки атомов газа. Проводимость воздуха у поверхности Земли $\sim 10^{-14} \text{ с}^{-1}$, в то время как проводимость лучших твердых изоляторов (янтарь, плавленый кварц) составляет $\sim 10^{-6} \text{ с}^{-1}$, а для обычного стекла — $\sim 0,1 \text{ с}^{-1}$.

В жидкости в отличие от газа концентрация ионов определяется не внешней ионизацией, а диссоциацией молекул благодаря их взаимодействию между собой. Такая жидкость называется электролитом. Диссоциация особенно облегчается, если жидкость представляет собой раствор, поэтому последний обладает, как правило, значительной проводимостью. Так, например, проводимость 10%-ного раствора медного купороса $\approx 3 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$, что все же на семь порядков меньше, чем у меди. Это объясняется тем, что носителями заряда в электролите (так же, как и в газе) являются тяжелые ионы, а вязкость жидкости значительно больше, чем вязкость электронного газа в металле.

Вернемся теперь к газу и рассмотрим его поведение в более сильных полях. На рис. III.5 изображена схематически вольт-амперная характеристика газового промежутка. Область слабых полей со-

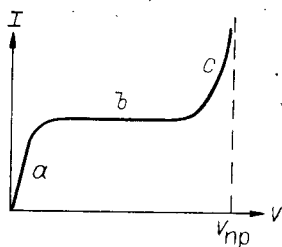


Рис. III.5. Вольт-амперная характеристика газового промежутка.

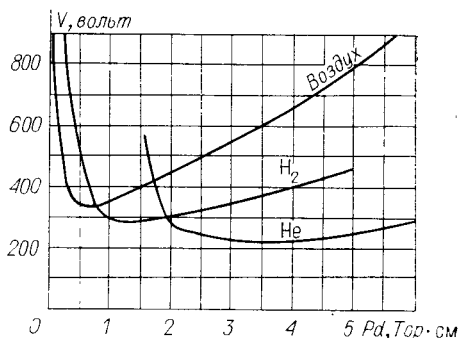


Рис. III.6. Кривые Пашена для некоторых газов.

ответствует участку *a*, где справедлив закон Ома. За ним следует так называемое плато (участок *b*), где ток практически не зависит от напряженности поля. В этой области электрическое поле вытягивает все рождающиеся (в промежутке) электроны. В еще более сильных полях (участок *c*) ток резко возрастает, и наступает пробой. Возрастание тока связано с процессами вторичной ионизации, приводящей к лавинному «размножению» электронов. Очень упрощенно этот процесс можно представить себе следующим образом. Электрон, выбитый из атома при ионизации, ускоряется внешним полем до такой энергии (~ 10 эВ), что он сам может ионизовать другие атомы.

Электронная лавина сама по себе приводит лишь к увеличению тока проводимости в газовом промежутке (участок *c*, см. рис. III.5). Для возникновения электрического, или, точнее, самоподдерживающегося разряда, необходима еще так называемая обратная связь между электродами газового промежутка. Необходимо, чтобы электронная лавина, движущаяся к аноду, вызывала бы каким-то образом новые лавины с катода. Одним из возможных механизмов такой обратной связи является фотоэффект с катода под действием фотонов, испускаемых возбужденными атомами газа или анода.

Условия зажигания разряда характеризуются так называемой кривой Пашена (рис. III.6), которая связывает между собой три основные величины: напряжение на разрядном промежутке V , длину промежутка d и давление газа p . Прежде всего, оказывается, что зажигание разряда зависит только от произведения $pd \propto d/l_s$, где l_s — длина свободного пробега электрона. Она и характеризует скорость развития электронной лавины.

Зависимость напряжения зажигания разряда от pd имеет характерный минимум. Вид кривой Пашена легко объяснить качественно, рассмотрев случай постоянного давления. При $d \gg l_s$ развитие лавины определяется напряженностью поля, поэтому напряжение зажигания растет приблизительно пропорционально длине зазора. При очень малых $d \ll l_s$, однако, развитие электронной лавины также затруднено, так как электроны не успевают столкнуться с атомами газа в зазоре. Интересно отметить, что при напряжениях, меньших

минимального ($V_{\min} \sim 200$ В), зазор не пробивается ни при каких условиях.

При очень больших давлениях (точнее, больших значениях pd) механизм развития разряда существенно изменяется. Из-за малой длины свободного пробега электронов разряд сначала локализуется в небольшой области промежутка вблизи места первичной ионизации. Распространение разряда происходит в этих условиях в основном за счет фотоионизации соседних участков газа. Такой процесс называется стримером. Примером стримерного разряда может служить молния.

Одним из интересных применений стримерного разряда является так называемая стримерная камера, в которой можно наблюдать следы заряженных частиц. В камере на очень короткое время ($\sim 10^{-9}$ с) создается сильное электрическое поле. Заряженная частица, прошедшая через камеру непосредственно перед включением поля, производит ионизацию газа вдоль своей траектории, а образующиеся при этом свободные электроны служат центрами возникновения стримеров. Свечение стримеров и позволяет наблюдать треки заряженных частиц (рис. III.7). Вследствие импульсного характера поля размеры стримеров остаются малыми, что обеспечивает высокую степень локализации траектории (порядка 0,3 мм).

При очень малых давлениях, т. е. в высоком вакууме ($l_s \gg d$), пробой промежутка определяется почти исключительно процессами на электродах. Разряд развивается за счет автоэлектронной («холодной») эмиссии электронов с микроострий на поверхности катода, когда напряженность поля на них поднимается до величины $\sim 10^7$ В/см. Эмиссионный ток, плотность которого достигает на острие огромных значений, нагревает и испаряет острие, а сильное электрическое поле отрывает и увлекает на анод небольшие кусочки катода. Последние вызывают испарение материала анода, и образующиеся при этом ионы бомбардируют, в свою очередь, катод, разогревая его и вызывая термоэлектронную эмиссию.



Рис. III.7. Фотографии треков электронов и позитронов в стримерной камере (а) и разряда (б) в жидкости (гексан). Напряженность электрического поля 700 кВ/см, время экспозиции 5нс [4].

Описанный механизм развития разряда в высоком вакууме позволяет понять важный в практическом отношении эффект «тренировки» вакуумного зазора. Тренировка производится путем многократного пробоя зазора при небольшой мощности разряда и приводит к оплавлению острий на катоде.

Вполне естественно также, что электрическая прочность зазора существенно возрастает при очень малой длительности τ высокого напряжения или при его высокой частоте. Так, например, при $\tau \sim 10^{-10}$ с вакуумный зазор выдерживает поле около 1 МВ/см, в то время как при $\tau \geq 10^{-5}$ с это значение падает до 100 кВ/см и дальше уже не зависит от τ .

§ 27. ПУЧКИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Особым видом электрического тока являются потоки свободно летящих заряженных частиц, которые обычно называются пучками. Пучки частиц существуют либо в очень высоком вакууме, когда можно пренебречь столкновениями с молекулами остаточного газа, либо при очень большой энергии частиц, когда длина свободного пробега значительно возрастает.

Чем же определяется величина тока пучка? Прежде всего — источником. Например, эмиссия электронов с накаливаемого катода существенно зависит от температуры последнего. Однако не только от этого. Рассмотрим электронный диод, состоящий из двух плоских параллельных электродов — катода и анода, достаточно больших, чтобы можно было пренебречь краевыми эффектами (рис. III.8). На диод подано напряжение V . Допустим, что мы можем неограниченно увеличивать эмиссию катода. Будет ли при этом ток через диод также неограниченно возрастать? Оказывается, что не будет, так как находящиеся между катодом и анодом электроны будут тормозить электроны, покидающие катод. Иначе говоря, напряженность поля на катоде будет уменьшаться с ростом тока i , наконец, обратится в нуль, после чего возрастание тока прекратится независимо от эмиссии катода.

Вычислим предельное значение тока. Для этого необходимо рассчитать поле диода с учетом пространственного заряда пучка ρ , т. е. нужно решить уравнение Пуассона. Плотность заряда можно найти из выражения для плотности тока $j = \rho v$. В рассматриваемой геометрии задача является одномерной, т. е. все величины

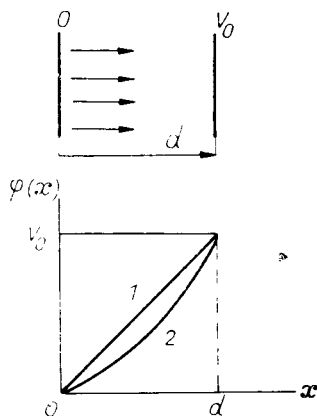


Рис. III.8. Поток электронов и распределение потенциала в плоском диоде.

1 — $j = 0$; 2 — $j \neq 0$.

зависят только от координаты x (см. рис. III.8), а векторы $\mathbf{j}$, $\mathbf{v}$ имеют только одну составляющую.

В случае постоянного тока из уравнения непрерывности следует, что $j = \text{const}$, а закон сохранения энергии для электрона дает $v = \sqrt{2(-e)\varphi/m}$. Мы приняли здесь потенциал катода равным нулю и пренебрегли тепловыми скоростями электронов на катоде.

Таким образом, необходимо решить следующее уравнение ($\varphi > 0$):

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{A}{\sqrt{\varphi}}, \quad (27.1)$$

где $A = -4\pi j\sqrt{m/2(-e)} > 0$, так как $j < 0$ (вектор плотности тока направлен к катоду).

Это уравнение внешне похоже на уравнение движения в механике с заменой t на x . Поэтому его можно проинтегрировать аналогичным образом. Умножая обе части уравнения на $d\varphi/dx$, найдем первый интеграл, аналогичный интегралу энергии в механике:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = 2A \sqrt{\varphi} + C. \quad (27.2)$$

Постоянная интегрирования $C = 0$ определяется из граничных условий на катоде $\varphi(0) = 0$, $\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = 0$. Теперь нужно проинтегрировать уравнение $d\varphi/dx = 2\sqrt{A}\varphi^{1/4}$ и использовать граничное условие на аноде $\varphi(d) = V$. В результате получим

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2} \right)^{4/3} A^{2/3} x^{4/3} = V \left(\frac{x}{d} \right)^{4/3}. \quad (27.3)$$

Последнее равенство определяет предельный ток диода, ограниченный собственным пространственным зарядом:

$$j = -\frac{1}{9\pi} \sqrt{\frac{2(-e)}{m}} \cdot \frac{V^{3/2}}{d^2}. \quad (27.4)$$

Плотность тока в диоде оказывается пропорциональной напряжению на нем в степени $3/2$, поэтому соотношение (27.4) называется обычно законом «трех вторых», или законом Чайлда — Ленгмюра — Богуславского.

Конечно, этот закон существенно отличается от закона Ома, так как динамика движения частиц здесь совершенно иная. Можно, однако, ввести эффективное интегральное сопротивление диода (см. § 21) по следующей формуле:

$$R = \frac{V}{I} = 9\pi \sqrt{\frac{m}{2(-e)V}} \cdot \frac{d^2}{S} \approx \frac{0,42}{\sqrt{V_B}} \cdot \frac{d^2}{S} \text{ МОм}, \quad (27.5)$$

где S — поперечная площадь пучка электронов (см^2), а V_B — напряжение на диоде в вольтах.

Увеличение проводимости диода с ростом напряжения имеет простой физический смысл и связано с увеличением средней скорости

электронов пропорционально $\sqrt{V}$. Отсюда следует, в частности, что в ультрарелятивистском случае мы снова придем к закону Ома, хотя природа его совершенно иная (см. ниже, задача 1):

$$R = \frac{2\pi}{c} \cdot \frac{d^2}{S} \approx 190 \frac{d^2}{S} \text{ Ом.} \quad (27.6)$$

Распределение потенциала в диоде (27.3) изображено на рис. III.8. Характерной его особенностью является так называемое «провисание» потенциала по сравнению со случаем нулевого тока ($\varphi = Vx/d$).

Задача 1. Обобщить закон «трех вторых» на область релятивистских энергий.

Изменение касается связи скорости с потенциалом. Релятивистская формула имеет вид $v = \sqrt{\varphi(\varphi + 2)}/(\varphi + 1)$. Мы используем здесь релятивистскую систему единиц: $e = m = c = 1$, в которой единица потенциала равна $mc^2/e = 0,5 \text{ МВ}$, а единица тока $mc^3/e = 17 \text{ кА}$ (численные значения даны для электронов).

Исходное уравнение для потенциала принимает теперь вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi j \frac{\varphi + 1}{\sqrt{\varphi(\varphi + 2)}}.$$

Первый интеграл с учетом условий на катоде дает

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = -4\pi j \sqrt{\varphi(\varphi + 2)}.$$

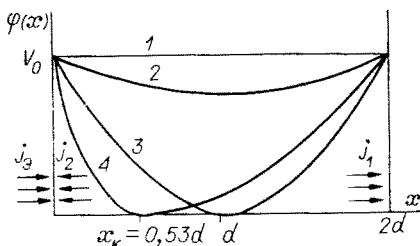
В общем случае это уравнение не интегрируется в элементарных функциях. Для ультрарелятивистской области ($\varphi \gg 1$) находим

$$\varphi = -2\pi j x^2 = Vx^2/d^2 \quad j = -V/(2\pi d^2). \quad (27.7)$$

Рассмотрим движение пучка электронов между двумя эквипотенциальными плоскостями (в так называемом дрейфовом пространстве, рис. III.9). Разумеется, электроны должны иметь теперь ненулевые начальные скорости. Примем, что скорости всех электронов одинаковы (v_0), и будем характеризовать их эффективным ускоряющим потенциалом $-eV_0 = mv_0^2/2$. Рассмотрим вначале качественную картину движения такого пучка по мере увеличения его тока. При небольшом токе поле пространственного заряда пучка мало и вызывает лишь небольшое «провисание» потенциала (см. рис. III.9, кривая 2), что, в свою очередь, приводит к некоторому торможению электронов. При достаточно большом токе торможение становится

Рис. III.9. Распределение потенциала внутри пучка в дрейфовом пространстве.

1 — $j = 0$; 2 — $j \ll j_0$; 3 — $j = j_0$; 4 — $j = 2j_0$.



настолько значительным, что электроны останавливаются, и часть их отражается назад (см. рис. III.9, кривая 3). Потенциал при этом провисает до нуля и образуется так называемый виртуальный катод. Его положение в промежутке легко найти, если заметить, что каждый из двух участков системы по обе стороны от виртуального катода можно рассматривать как плоский диод.

Пусть плотность тока, поступающего в дрейфовое пространство (тока «эмиссии»), равна j_0 (<0), прошедшего — j_1 (<0) и отраженного — j_2 (>0). Тогда по закону «трех вторых»:

$$j_1 = j_0 \left(\frac{d}{2d - x_k} \right)^2, \quad j_3 - j_2 = j_0 \left(\frac{d}{x_k} \right)^2, \quad (27.8)$$

где $2d$ — протяженность дрейфового пространства, j_0 — плотность тока через диод с зазором d при напряжении V_0 (27.4). Решая систему (27.8), найдем

$$\frac{x_k}{d} = 2 - \sqrt{\frac{j_0}{j_1}}, \quad \frac{j_1}{j_0} = p \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2p} - \frac{1 + \sqrt{1 + 8p}}{8p^2}} \right\}, \quad (27.9)$$

где $p = j_3/j_0$. При очень большом начальном токе ($p \rightarrow \infty$) $j_1 \rightarrow j_0/4$, а $x_k \rightarrow 0$. Полученный результат имеет простой физический смысл. Слева от виртуального катода плотность заряда неограниченно возрастает при $|j_3| \rightarrow \infty$, так как при этом почти все электроны отражаются назад, что приводит к запираению пучка на очень коротком участке. Справа же от виртуального катода остается диод с зазором $2d$.

Минимальное значение тока, для которого еще справедливо решение (27.9), соответствует обращению в нуль подкоренного выражения. Это происходит при $p = 1$, когда $j_3 = j_1 = j_0$ ($j_2 = 0$) и $x_k = d$ (см. рис. III.9, кривая 3). При дальнейшем уменьшении тока виртуальный катод исчезает.

Интересно отметить, что образование виртуального катода при увеличении тока происходит при $j_3 = 2j_0$, т. е. при вдвое большем токе, чем его исчезновение. Это значит, что имеет место так называемый гистерезис (т. е. запаздывание перехода), изображенный на рис. III.10. В области $|j_0| < |j_3| < 2|j_0|$ возможны два состояния электронного пучка — как с виртуальным катодом, так и без него. Такая неоднозначность решения является характерной для нелинейного уравнения Пуассона и связана с тем, что плотность заряда электронного пучка сама зависит от его потенциала (так называемое самосогласованное решение).

Задача 2. Оценить поправку к закону «трех вторых» за счет тепловых скоростей электронов на катоде (рис. III.11).

Будем характеризовать тепловые скорости эффективным ускоряющим потенциалом $V_T \ll V$. С учетом тепловых скоростей в диоде образуется нечто вроде виртуального катода, отражающего лишний ток эмиссии, при этом эффективная разность потенциалов увеличивается на величину $\sim V_T$. Максимальное смещение виртуального катода соответствует отсутствию отраженного тока. Его положение в этом случае можно оценить по закону «трех вторых», пренебрегая разбросом тепловых скоростей: $\left(\frac{x_k}{d} \right) \sim \left(\frac{V_T}{V} \right)^{3/4} \ll 1$. Поправка к току

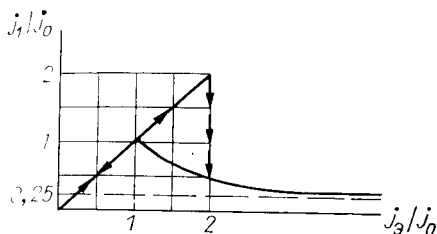


Рис. III.10. Характеристика дрейфового промежутка.

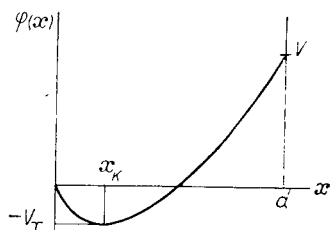


Рис. III.11. Распределение потенциала в диоде с учетом тепловых скоростей электронов.

через анод имеет порядок $\frac{\Delta j}{j_0} \sim \frac{3}{2} \cdot \frac{V_T}{V} + 2 \frac{x_k}{d} \sim \frac{V_T}{V}$. Мы видим, что основную роль играет увеличение эффективной разности потенциалов в диоде. Впрочем, эта поправка является, как правило, незначительной, так как $V_T \sim 1$ В.

Задача 3. Оценить глубину потенциальной ямы V_T (см. рис. III.11), если известны плотность тока эмиссии j_3 и плотность тока j_a , поступающего на анод, а распределение электронов по скоростям — максвелловское с температурой катода T , т.е. $\frac{dj}{dW} = \frac{j_3}{T} e^{-W/T}$, $W = \frac{mv^2}{2}$. Плотность тока, достигающего анод,

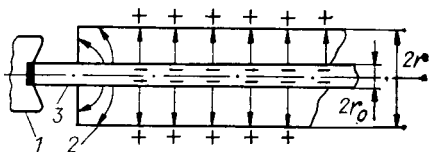
равна $j_a = \int_{eV_T}^{\infty} \frac{dj}{dW} dW = j_3 e^{eV_T/T}$. Отсюда $eV_T = T \ln(j_3/j_a)$.

Может показаться, что закон «трех вторых» запрещает транспортировку пучка заряженных частиц на большие расстояния ($j_0 \propto 1/d^2$). Однако зависимость от расстояния имеет место только для одномерной задачи. Обратный предельный случай вытянутого пучка внутри металлической трубки изображен схематически на рис. III.12. Ясно, что при этом торможение электронов может происходить только на краю трубки, на расстоянии порядка ее радиуса. На больших расстояниях отрицательный заряд пучка компенсируется положительным, наведенным на внутренней стенке трубки. Поэтому в законе «трех вторых» нужно положить $d \sim r$. Считая, что радиус пучка того же порядка ($r_0 \sim r$), получим, что полный ток, который можно пропустить через трубку, вообще не зависит от ее размеров и определяется только энергией электронов. Эффективное сопротивление трубки (27.5), (27.6) имеет порядок

$$R \sim \frac{1}{\sqrt{V_B}} (\text{Мом}) \rightarrow 200 \text{ Ом}. \quad (27.10)$$

Последнее выражение дает ультрарелятивистский предел.

Рис. III.12. Пучок электронов внутри проводящей трубы.
1 — катод; 2 — металлическая труба (анод); 3 — пучок.



Можно было бы попытаться еще больше увеличить ток пучка, компенсируя его пространственный заряд ионами. Такая компенсация будет происходить автоматически за счет ионизации остаточного газа, если не принято специальных мер по очистке пучка от ионов. Оказывается, однако, что таким методом можно увеличить предельный ток пучка лишь приблизительно в шесть раз. При дальнейшем увеличении тока возникает неустойчивость: небольшое случайное провисание потенциала экспоненциально нарастает, пока не образуется виртуальный катод, запирающий пучок.

Глава IV

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

§ 28. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКА

Магнитные свойства железной руды и, позднее, железа известны с незапамятных времен. Однако до сравнительно недавнего времени они никак не связывались с электрическими процессами. Только в 1820 г. датский физик Эрстед открыл действие тока на магнитную стрелку и установил тем самым связь между электрическими и магнитными явлениями. Продолжая исследования Эрстеда, французский физик Ампер окончательно выяснил электрическую природу магнетизма и нашел экспериментально основной закон магнитного взаимодействия токов.

К сожалению, это произошло слишком поздно. Задолго до работ Эрстеда и Ампера взаимодействие кусков намагниченного железа было подробно изучено Кулоном, который пришел к заключению, что магнитное взаимодействие аналогично электрическому и связано с особыми «магнитными зарядами». Сам Кулон прекрасно понимал, что магнитные заряды не похожи на электрические, так как невозможно изолировать магнитный заряд одного знака. Тем не менее в теории магнетизма возникла с самого начала система понятий, полностью аналогичная электростатике. Например, магнитное поле в среде $\mathbf{H}$ считалось аналогичным электрическому полю $\mathbf{E}$, а магнитная индукция $\mathbf{B}$ — электрической индукции $\mathbf{D}$. Так как на самом деле в природе не существует магнитных зарядов (см. § 116), а магнитное поле возбуждается при движении электрических зарядов, возникло несоответствие между общепринятыми понятиями теории магнетизма и действительной картиной магнитных явлений. Это противоречие до сих пор приводит к недоразумениям, так что в этой области физики нужно быть особенно «бдительным».

Подобно закону Кулона в электростатике, основой физики магнитных явлений служит закон Ампера, описывающий взаимодейст-

вие «элементов» тока. Он может быть записан в виде

$$dF_{12} = k^2 \frac{I_1 I_2 dl_2 \times (dl_1 \times r_{12})}{r_{12}^3}. \quad (28.1)$$

Здесь dF_{12} — сила магнитного взаимодействия двух элементов тока, которые можно представлять себе как очень маленькие отрезки проводников с токами I_1, I_2 длиной dl_1, dl_2 , ориентированные вдоль векторов dl_1, dl_2 соответственно; r_{12} — радиус-вектор, соединяющий эти элементы; k — постоянная, зависящая от выбора единиц (см. ниже).

Конечно, Ампер проводил свои эксперименты с замкнутыми проводниками. Поэтому получение элементарного закона (28.1) было задачей значительно более трудной, чем в случае закона Кулона. Более того, оказалось, что вообще не существует однозначного решения этой задачи. Действительно, если добавить в (28.1) любое выражение, интеграл от которого по одному из замкнутых контуров тока равен нулю, то интегральная сила между токами не изменится. Поэтому для вывода элементарного закона (28.1) нужны какие-то дополнительные предположения. Ампер считал, что магнитные силы должны подчиняться третьему закону Ньютона, т. е. действовать вдоль линии, соединяющей элементы тока. Исходя из этого, он получил для элементарного закона следующее выражение:

$$dF_{12} = k^2 I_1 I_2 r_{12} \left(\frac{3 (dl_1, r_{12}) (dl_2, r_{12})}{r_{12}^5} - \frac{2 (dl_1, dl_2)}{r_{12}^3} \right), \quad (28.2)$$

отличающееся от (28.1). Для замкнутых токов оба выражения эквивалентны.

Задача. Показать, что для замкнутых токов выражения (28.1), (28.2) дают одинаковое значение силы.

Проинтегрируем разность сил (28.1), (28.2), например, по контуру замкнутого тока 1. При этом отрезок dl_2 будем считать постоянным, обозначим $dl_2 = a$. Учтем, что $dl_1 = -dr_{12} \equiv -dr$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta F &= k^2 I_1 I_2 \oint \left\{ -\frac{a \times (dr \times r)}{r^3} + 3r \frac{(a, r) (dr, r)}{r^5} - 2r \frac{(a, dr)}{r^3} \right\} dr = \\ &= k^2 I_1 I_2 \oint \left\{ -\frac{dr (a, r)}{r^3} - \frac{r (a, dr)}{r^3} + 3r \frac{(a, r) (dr, r)}{r^5} \right\} dr = \\ &= -k^2 I_1 I_2 \oint d \left(\frac{r (a, r)}{r^3} \right) \equiv 0, \end{aligned}$$

т. е. разность сил равна нулю.

Представление об элементах тока было во времена Ампера всего лишь удобным математическим приемом. Сейчас мы знаем, что элементы тока реально существуют в природе, например, движущиеся заряженные частицы. Можно взять и просто короткий отрезок проводника и возбудить в нем ток высокой частоты, «замыкающийся» через емкость между концами проводника. Возникает вопрос, какой же из элементарных законов является истинным?

Эксперименты по взаимодействию движущихся заряженных частиц показывают, что правильным является выражение (28.1) (в нерелятивистском случае $v \ll c$, см. § 29). Но как же тогда быть с третьим законом Ньютона? Ведь сила (28.1) определенно не удовлетворяет ему ($dF_{12} \neq -dF_{21}$). А между тем с третьим законом связаны законы сохранения импульса и момента, которые всегда рассматривались как наиболее фундаментальные законы природы. Ответ заключается в том, что третий закон Ньютона действительно имеет ограниченное применение, но законы сохранения тем не менее не нарушаются, если учесть импульс и момент электромагнитного поля (см. § 118).

Как уже говорилось, множитель k в (28.1) зависит от выбора системы единиц. Можно, например, выбрать единицу тока таким образом, чтобы $k = 1$. Десятая часть такой единицы называется ампером и является одной из шести основных единиц СИ. Если же использовать электрическую единицу тока (в гауссовой системе), то $k = 1/c$, где c — скорость света. Такое совпадение отнюдь не случайно и связано, в конечном счете, с тем, что c есть скорость распространения электромагнитного поля (см. также следующий параграф).

Подобно тому, как это было сделано в электростатике, прямые взаимодействия двух элементов тока (28.1) можно рассматривать как взаимодействие одного из них с полем другого:

$$dF_{12} = \frac{I_2 dl_2 \times H(r_{12})}{c}, \quad (28.3)$$

где магнитное поле элемента I_1 дается выражением

$$dH_1(r) = \frac{I_1 dl_1 \times r}{cr^3}. \quad (28.4)$$

Последнее выражение называется *законом Био и Савара*, а первое представляет собой формулу для силы Лоренца в частном случае.

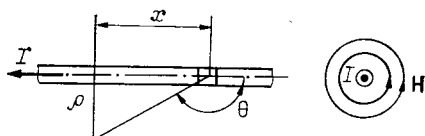
Закон Био — Савара позволяет найти магнитное поле произвольной системы токов, используя принцип суперпозиции, который для магнитного поля столь же справедлив, как и для электрического. Это вытекает уже из того факта, что разделение поля на электрическое и магнитное относительно и зависит от системы отсчета (см. § 29).

Рассмотрим, например, бесконечный тонкий прямолинейный проводник (рис. IV.1). В цилиндрической системе координат поле имеет только составляющую H_φ ,

$$H_\varphi = \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin \theta}{x^2 + \rho^2} = \frac{I}{c\rho} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{2I}{c\rho}. \quad (28.5)$$

Силовые линии поля замкнуты и представляют собой концентрические окружности. Из этого примера видна основная особенность

Рис. IV.1. Магнитное поле прямого тока.



магнитного поля — его непотенциальность:

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = 2\pi r H_{\varphi} = \frac{4\pi I}{c}. \quad (28.6)$$

В качестве замкнутого контура Γ мы выбрали здесь окружность, совпадающую с силовой линией.

В гауссовой системе единица напряженности магнитного поля называется гаусс (Гс) или эрстед (Э)*, она определяется из выражения (28.4). В СИ множитель k в законе Ампера выбирается равным $1/10$. Тогда единица напряженности $1 \text{ А/м} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ Гс} \approx 0,0126 \text{ Гс}$.

§ 29. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Закон Био — Савара имеет очень простой физический смысл с точки зрения теории относительности — он связан с преобразованием полей при переходе из одной системы отсчета в другую.

Законы преобразования проще всего получить из выражения для силы Лоренца:

$$\mathbf{f} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}, \quad (29.1)$$

найденного им как обобщение экспериментальных данных. В частности, магнитная составляющая этой силы совпадает с выражением (28.3). Действительно, для одной частицы, движущейся со скоростью v , имеем $\int I d\mathbf{l} = ev$.

Так как законы преобразования силы $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$ и скорости известны, а заряд частицы e считается инвариантом, можно найти формулы преобразований для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Прежде всего, можно проверить, что продольная составляющая силы является инвариантом:

$$f_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{dp'_x + \frac{V}{c^2} d\mathcal{E}'}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'} = \frac{dp'_x}{dt'} = f'_x, \quad (29.2)$$

так как $d\mathcal{E}/dp_x = dx/dt$. Поперечная составляющая силы изменяется

*) В материальных средах эти единицы различают (см. § 38).

обратно пропорционально полной энергии частицы $\mathcal{E} = \gamma mc^2$:

$$\gamma f_{\perp} = \frac{dp_{\perp}}{d\tau} = \frac{dp'_{\perp}}{d\tau} = \gamma' f'_{\perp}. \quad (29.3)$$

Здесь $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор частицы, движущейся со скоростью v , а τ — собственное время частицы.

Рассмотрим случай, когда в одной системе отсчета частица покоится ($v' = 0$; $\gamma' = 1$). Тогда в другой системе скорость частицы совпадает со скоростью первой системы ($v_x = V$, $\gamma = \gamma_0 = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$). Так как магнитная сила не имеет продольной составляющей, то инвариант (29.2) дает

$$E_x = E'_x. \quad (29.4)$$

Поперечный инвариант приводит к соотношению

$$E'_y = \gamma_0 \left(E_y - \frac{V}{c} H_z \right), \text{ или } E_y = \gamma_0 \left(E'_y + \frac{V}{c} H'_z \right). \quad (29.5)$$

Обратное преобразование получается здесь, как обычно, заменой знака у V . Исключая из двух соотношений (29.5), например E_y , имеем закон преобразования для магнитного поля:

$$H_z = \gamma_0 \left(H'_z + \frac{V}{c} E'_y \right). \quad (29.6)$$

Соотношения, аналогичные (29.5), (29.6), будут иметь место и для других поперечных компонент полей ввиду аксиальной симметрии относительно направления скорости V .

Остается найти соответствующий закон для продольной составляющей магнитного поля. Из формулы (29.6) видно, что H_x трансформируется независимо от других составляющих полей, т. е. только через H'_x . Значит, должно быть $H_x = \lambda H'_x$. Из симметрии прямого и обратного преобразований следует, что $\lambda = 1$. Этот результат можно вывести и непосредственно из силы Лоренца, если рассмотреть частицу со скоростью v_z . Используя выражение для f_y , получим

$$\gamma' \left(E'_y + \frac{v'_z H'_x}{c} \right) = \gamma \left(E_y + \frac{v_z H_x}{c} \right).$$

Учтем теперь, что H_x преобразуется независимо от E_y (29.5) и что, аналогично (29.3), $\gamma' v'_z = \gamma v_z$. Это дает $H_x = H'_x$.

Окончательно формулы могут быть записаны в виде

$$E_x = E'_x; \quad H_x = H'_x; \\ E_{\perp} = \gamma_0 \left(E'_{\perp} - \frac{V}{c} \times \mathbf{H}' \right); \quad \mathbf{H}_{\perp} = \gamma_0 \left(\mathbf{H}'_{\perp} + \frac{V}{c} \times \mathbf{E}' \right). \quad (29.7)$$

Индекс $\perp$ означает проекцию векторов на плоскость yz . В первом порядке по V/c можно написать

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{E}' - \frac{V}{c} \times \mathbf{H}'; \quad \mathbf{H} \approx \mathbf{H}' + \frac{V}{c} \times \mathbf{E}'. \quad (29.8)$$

Из законов преобразования поля следует, в частности, что если в какой-то системе отсчета имеется только электрическое поле ($\mathbf{H}' = 0$), то в любой другой системе $\mathbf{H} = (\mathbf{V} \times \mathbf{E})/c$.

Обратим внимание на то, что закон преобразования симметричен (точнее, антисимметричен) относительно обоих полей, т. е. формулы сохраняют свой вид, если поменять поля местами, изменив знак у одного из них

$$\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}. \quad (29.9)$$

Этот результат тем более примечателен, что он получен из явно несимметричного выражения для силы Лоренца.

Тот факт, что электрическое и магнитное поля преобразуются друг в друга при переходе из одной системы отсчета в другую, показывает, что оба они являются лишь различными составляющими единого электромагнитного поля. Ситуация здесь аналогична связи между пространством и временем или между энергией и импульсом. Однако в отличие от последних обе компоненты свободного электромагнитного поля равноправны. Существенное различие связано лишь с несимметрией зарядов: в природе наблюдается только электрический заряд и нет магнитного.

Из закона преобразования полей следует закон Био — Савара (28.4). Действительно, для одной частицы $\int I_1 d\mathbf{l}_1 = e\mathbf{v}_1$, и (28.4) дает

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{v} \times e\mathbf{r}}{cr^3} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}. \quad (29.10)$$

Это в точности соответствует преобразованию кулоновского поля покоящегося заряда ($\mathbf{E}' = e\mathbf{r}/(cr^3)$) при $v \ll c$ (29.8).

Таким образом, по теории относительности законы Кулона, Ампера и Лоренца (сила Лоренца) не являются полностью независимыми, а связаны друг с другом преобразованиями полей. Поэтому два из них, например закон Кулона и сила Лоренца, как более простые, могут быть положены в основу всех электромагнитных явлений.

Более того, теория относительности показывает, что закон Ампера справедлив только в случае малых скоростей движущихся зарядов. И это нисколько не противоречит опытам Ампера, поскольку в обычных проводниках скорость движения электронов действительно ничтожно мала (см. § 20). Как мы знаем теперь из экспериментов с быстрыми частицами, их магнитное поле не удовлетворяет закону Био — Савара, а определяется точными формулами теории относительности (29.7). Оказывается, однако, что в случае постоянного тока закон Био — Савара справедлив при любых скоростях заряженных частиц. Нарушение закона Био — Савара для отдельных частиц связано с запаздыванием поля вследствие конечной скорости его распространения. Для стационарного поля запаздывание, естественно, не играет роли.

Рассмотрим, например, магнитное поле прямолинейного однородного тонкого и бесконечно длинного пучка релятивистских элект-

ронов. В собственной системе отсчета такой пучок создает чисто электрическое поле

$$E'_\rho = -\frac{2eN'}{\rho}, \quad (29.11)$$

где N' — линейная плотность электронов в этой системе, связанная с плотностью N в лабораторной системе соотношением (см. § 20)

$$N = \gamma N'. \quad (29.12)$$

Формулы преобразования (29.7) дают

$$H_\phi = \gamma \frac{vE'_x}{c} = \frac{2eNv}{cp} = \frac{2I}{cp} \quad (29.13)$$

в полном соответствии с выражением (28.5), полученным из закона Био — Савара.

Аналогично, из выражения (29.11) и законов преобразования (29.7), (29.12) следует, что электрическое поле пучка

$$E_\rho = \frac{2eN}{\rho}, \quad (29.14)$$

т. е. определяется только плотностью заряда и не зависит от скорости частиц.

§ 30. САМОФОКУСИРОВКА ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ: ПИНЧ-ЭФФЕКТ

Рассмотрим подробнее взаимодействие электронов релятивистского пучка, описанного в конце предыдущего параграфа. Примем, что пучок представляет собой круговой цилиндр радиуса a , а плотность электронов постоянна по сечению. Найдём силу, действующую на крайние электроны пучка ($\rho = a$):

$$f_\rho = eE_\rho - e \frac{v}{c} H_\phi = eE_\rho \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (30.1)$$

Мы видим, что в ультрарелятивистском случае электрическое расталкивание почти компенсируется магнитным стягиванием, так что результирующая сила уменьшается в γ^2 раз.

Интересно отметить, что взаимодействие двух электронов подчиняется несколько иному закону. Действительно, поперечная составляющая силы образует инвариант (29.3), откуда

$$f_\perp = \frac{f'_\perp}{\gamma} = \frac{e^2}{\gamma r^2}. \quad (30.2)$$

Значит, сила расталкивания убывает только в γ раз. Это различие связано с тем, что для пучка мы считаем заданной его плотность в лабораторной системе независимо от γ . Тогда плотность пучка в собственной системе меньше в γ раз.

Представим теперь, что в пучке имеется некоторое количество равномерно распределенных положительных ионов, возникающих, например, за счет ионизации остаточного газа. Пусть их относительная концентрация $\alpha = n_+/n_-$. Тогда их электрическое поле

$$E_+ = -\alpha E_-, \quad (30.3)$$

где E_- — электрическое поле электронов (29.14), а магнитным полем ионов можно пренебречь ввиду их малой скорости. Полная сила, действующая теперь на крайний электрон,

$$f = eE_- \left(1 - \alpha - \frac{v^2}{c^2} \right) = eE_- \frac{1 - \alpha\gamma^2}{\gamma^2}. \quad (30.4)$$

При $\alpha = 1/\gamma^2$ расталкивание электронов полностью прекращается, а при $\alpha > 1/\gamma^2$ сменяется стягиванием. Что же касается ионов, то при условии $\alpha < 1$ они также стягиваются, поскольку суммарный пространственный заряд пучка остается отрицательным. Таким образом, в интервале

$$1/\gamma^2 < \alpha < 1 \quad (30.5)$$

происходит так называемая самофокусировка пучка. Неравенство (30.5) называют обычно условием самофокусировки Беннета — Будкера по имени американского и советского физиков, независимо предсказавших это явление.

Самофокусировка электронов возможна и в нерелятивистском случае, если только $\alpha \approx 1$. Такой процесс действительно наблюдается при пропускании сильного тока через плазму и называется пинч-эффектом (от английского слова pinch — сжатие). При этом происходит просто притяжение параллельных токов — эффект, который наблюдал еще Ампер. Любопытно отметить, что это был, по существу, первый релятивистский опыт, в котором наблюдался эффект второго порядка по v/c , т. е. того же порядка, что и релятивистское сокращение длины и замедление времени. Однако, чтобы понять это, потребовалось еще почти сто лет.

Задача. Плоский длинный конденсатор помещен в однородное магнитное поле, параллельное его пластинам. Найти напряжение на конденсаторе, при котором поток электронов заданной плотности проходит сквозь конденсатор параллельно его пластинам и под углом α к магнитному полю.

Из условия равенства нулю силы Лоренца (29.1) получим

$$V = Ed = \frac{Hj \sin \alpha}{cp} d, \quad (30.6)$$

где p — плотность электронов, d — расстояние между пластинами.

Полученное выражение дает значение ЭДС, которая наводится в проводниках, помещенных в магнитное поле, при протекании по ним тока (эффект Холла, 1879 г.).

§ 31. ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛ

По аналогии с электростатикой можно попытаться упростить описание магнитного поля, введя его потенциал. Однако использование обычного скалярного потенциала ψ ,

$$\mathbf{H} = -\nabla\psi, \quad (31.1)$$

вообще говоря, невозможно, так как магнитное поле непотенциально. Это видно уже из простого примера, рассмотренного в § 28.

Исходя из совершенно иных соображений, Максвелл ввел так называемый вектор-потенциал $\mathbf{A}$, связанный с магнитным полем равенством

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (31.2)$$

Операция *ротор* определяется как векторное произведение с оператором ∇ :

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (31.3)$$

Последнее выражение справедливо только в декартовых координатах, причем подразумевается разложение детерминанта по минорам первой строки, например, $(\text{rot } \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$.

Выбор такой формы потенциала не случаен, так как операция ротор всегда дает поле с замкнутыми (или уходящими на бесконечность) силовыми линиями. Это следует из того, что дивергенция ротора всегда равна нулю:

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) = (\nabla, (\nabla \times \mathbf{A})) = 0. \quad (31.4)$$

При геометрической интерпретации оператора ∇ как вектора последнее выражение соответствует объему параллелепипеда, построенного на трех векторах, два из которых совпадают.

Для того чтобы наглядно представить себе действие оператора «ротор», рассмотрим простой механический пример — после скоростей вращающегося твердого тела $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ и вычислим ротор этого поля: $\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \text{ div } \mathbf{v} - (\boldsymbol{\omega}, \nabla) \mathbf{r} = 3\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega} = \text{const}$. В данном случае линии $\text{rot } \mathbf{v}$ представляют собой прямые, уходящие на бесконечность.

Вектор-потенциал однородного магнитного поля можно, как легко проверить, записать в виде $\mathbf{A} = \mathbf{H}_0 \times \mathbf{r}/2$ или в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) $A_\varphi = H_0 \rho/2$.

Из выражения (31.2) вытекает, что силовые линии магнитного поля не имеют концов, т. е. замкнуты или уходят на бесконечность. Но можно ли утверждать, что любое магнитное поле имеет такую конфигурацию? Для положительного ответа на этот вопрос достаточно подобрать правильное значение вектор-потенциала для единственного движущегося заряда. Тогда в силу принципа суперпозиции выражение (31.2) будет справедливо для любого поля.

Необходимое выражение действительно существует:

$$\mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{cr}, \quad (31.5)$$

хотя трудно ответить на вопрос, как его получить, его нужно просто «угадать». Проверим, что такой потенциал дает правильное выраже-

ние для магнитного поля движущегося заряда. Имеем

$$\operatorname{rot} \frac{e\mathbf{v}}{cr} = \frac{e}{c} \nabla \times \frac{\mathbf{v}}{r} = \frac{e}{c} \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{v} = \frac{e\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{cr^3}, \quad (31.6)$$

что совпадает с (28.4) или (29.10).

Обратим внимание на то, что вектор-потенциал точечного заряда (31.5) очень просто связан со скалярным потенциалом его электрического поля:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{v}}{c} \varphi. \quad (31.7)$$

С помощью принципа суперпозиции можно написать теперь выражение для вектор-потенциала магнитного поля произвольной системы токов:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (31.8)$$

Отметим, что нужно четко проводить различие между координатами поля (радиус-вектор $\mathbf{r}$) и координатами источников поля — токов (радиус-вектор $\mathbf{r}'$).

Соотношение (31.7) между потенциалами выполняется и в общем случае, если под $\mathbf{v}$ понимать некоторую среднюю скорость движения заряженных частиц. Это соотношение полезно при различных оценках.

Напомним, что выражение (31.8) справедливо, вообще говоря, только для стационарного поля в нерелятивистском случае. В действительности оно справедливо также и для полей, достаточно медленно изменяющихся во времени. Такие поля называются *квазистационарными*. Как отмечалось выше (см. § 29), отклонение от стационарного выражения (31.8) связано с запаздыванием поля. Поэтому поле можно считать квазистационарным, если его запаздывание не существенно. Пусть τ — характерное время (период) изменения поля, а a — характерный размер системы токов, создающих это поле. Тогда условие квазистационарности можно записать в виде

$$\tau \gg a/c, \text{ или } a \ll \lambda, \quad (31.9)$$

где $\lambda = c\tau$ — длина волны поля.

Вектор-потенциал $\mathbf{A}$ является вспомогательной величиной, и при заданном $\mathbf{H}$ его выбор неоднозначен. Действительно, согласно (31.2) величина $\mathbf{H}$ не изменится, если произвести преобразование

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla f(\mathbf{r}), \quad (31.10)$$

где $f(\mathbf{r})$ — произвольная скалярная функция: $\operatorname{rot}(\nabla f) = (\nabla \times \nabla f) = 0$. Выбор конкретного вида $f(\mathbf{r})$, а следовательно, и $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ называется *калибровкой* потенциала, а соотношение (31.10) — *калибровочным преобразованием*. В частности, соотношение (31.8) справедливо только при определенной калибровке потенциала, которая называется лоренцевской (см. (32.7)).

§ 32. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

При вычислении магнитного поля иногда удобно пользоваться не интегральным соотношением для вектор-потенциала (31.8), а дифференциальными уравнениями для $\mathbf{A}$ или $\mathbf{H}$.

Одно такое уравнение может быть написано сразу:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (32.1)$$

Оно выражает факт отсутствия в природе магнитных зарядов. Поскольку, однако, в это уравнение не входят источники магнитного поля — токи, его недостаточно для вычисления $\mathbf{H}$. В этом состоит отличие магнитного поля от электрического, где соответствующее уравнение $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$ позволяет вычислить поле по заданному распределению зарядов.

Второе основное уравнение получим вначале для вектор-потенциала. Связь между потенциалами (31.7) наводит на мысль, что уравнение для $\mathbf{A}$ должно быть похоже на уравнение для ϕ . Вычислим поэтому $\Delta \mathbf{A}$ с помощью выражения (31.8):

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{c} \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') (-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) = \\ &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (32.2)$$

Здесь мы воспользовались следующим соотношением: $\Delta(1/r) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$ (см. § 8). Полученное уравнение для вектор-потенциала называется *основным уравнением магнитного поля*:

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (32.3)$$

Найдем теперь уравнение для напряженности магнитного поля. Для этого вычислим его ротор:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (32.4)$$

Найдем сначала $(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \operatorname{div} \mathbf{A}$. Для этого снова воспользуемся выражением (31.8):

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int dV' \operatorname{div} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{c} \int dV' \left(-\operatorname{div}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\operatorname{div}' \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right). \quad (32.5)$$

Мы заменили здесь div на div' , т. е. дифференцирование по $\mathbf{r}$ на дифференцирование по $\mathbf{r}'$, чтобы выделить полную дивергенцию, интеграл от которой по объему преобразуется в поверхностный и стремится к нулю на достаточно далекой поверхности (ср. § 9). Оставшийся интеграл преобразуем, используя уравнение непрерывности: $\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}')$. В результате получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \frac{dV'}{r} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (32.6)$$

Обратим внимание на то, что это уравнение для потенциалов вытекает фактически из закона сохранения заряда — уравнения непрерывности и очень похоже на него по форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (32.7)$$

Подставляя его в (32.4), с помощью уравнения (32.2), а также соотношения $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ запишем уравнение для магнитного поля в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (32.8)$$

Это уравнение также называется *основным уравнением магнитного поля*.

Неожиданно мы достигли большего, чем искали. Мы хотели найти связь между магнитным полем и током, а получили связь между магнитным и электрическим полями. Оказалось, что источником магнитного поля является не только электрический ток, но и изменение электрического поля. Последний эффект был предсказан Максвеллом (1864 г.), правда, из совсем других соображений. К тому же связь магнитного поля с током настолько укоренилась в сознании физиков, что Максвелл назвал этот дополнительный член «*током смещения*»:

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (32.9)$$

Напомним, что полученные уравнения справедливы только в квазистационарном приближении. Интересно отметить, однако, что уравнения (32.8), так же как и (32.7), оказываются *точными* (см. § 45). Это связано с компенсацией двух приближений: дополнительного слагаемого в уравнении для вектор-потенциала (32.3) и дополнительного члена в уравнении для электрического поля $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ (см. § 45). Обе поправки порядка $(v/c)^2$, т. е. выходят за рамки квазистационарного приближения.

§ 33. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЦИРКУЛЯЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Поскольку силовые линии магнитного поля замкнуты, важной характеристикой поля является так называемая циркуляция

$$\Gamma = \oint_{\Gamma} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}), \quad (33.1)$$

где интеграл берется по некоторому замкнутому контуру Γ . Циркуляция магнитного поля формально аналогична электродвижущей силе для электрического поля.

Воспользуемся теперь теоремой Стокса

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{H}, d\mathbf{S}), \quad (33.2)$$

где S — любая поверхность, ограниченная контуром Γ . Подставляя сюда выражение для $\text{rot } \mathbf{H}$ из уравнения (32.8), найдем

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c} I_S, \quad (33.3)$$

причем полный ток через поверхность

$$I_S = \int_S (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}}, d\mathbf{S}) \quad (33.4)$$

включает в себя как обычный ток с плотностью $\mathbf{j}$, так и «ток смещения» (32.9).

Название «закон сохранения» для (33.3) несколько условно и не является общепринятым; оно подчеркивает независимость циркуляции от выбора контура Γ при условии, что он охватывает один и тот же полный ток.

Выражение (33.3) дает среднее поле по замкнутому контуру:

$$\langle H \rangle_{\Gamma} \equiv \frac{1}{l} \oint_{\Gamma} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \frac{4\pi I_S}{cl}. \quad (33.5)$$

В случае симметрии системы это позволяет полностью вычислить поле (см. задачи 1, 2 ниже).

Циркуляция магнитного поля измеряется в гаусс-сантиметрах (система Гаусса) или в ампер-витках (СИ): $1 \text{ А} \cdot \text{в} = 0,4\pi \text{ Э} \cdot \text{см} \approx 1,26 \text{ Э} \cdot \text{см}$.

Задача 1. Найти поле прямого тока.

Выбирая в качестве замкнутого контура окружность, центр которой лежит на оси проводника (силовая линия), получим из (33.5) $H_{\phi}(\rho) = \langle H_{\phi} \rangle = 2I/c\rho$. Это полностью совпадает с (28.5), но вычисления здесь значительно проще.

Задача 2. Найти поле тороидального соленоида.

В качестве контура выберем окружность, лежащую внутри тора, с центром на оси симметрии и радиусом ρ . Полный ток через площадь контура равен IN , где I — ток в обмотке, а N — число ее витков. Предполагая аксиальную симметрию поля, получим $H_{\phi} = 4\pi NI/(cl) = 2NI/c\rho$, где $l = 2\pi\rho$ — длина силовой линии. Для аксиальной симметрии поля необходимо выполнение двух условий. Во-первых, катушка тора должна быть равномерной; во-вторых, шаг намотки должен быть много меньше малого радиуса тора r (см. следующую задачу).

Первое из выражений применимо приближенно также к прямому соленоиду длины $l \gg r$. В этом случае поле быстро спадает на концах соленоида (на расстоянии $\sim r$), так что циркуляция определяется с точностью $\sim r/l$ внутренней областью соленоида.

Задача 3. Найти поле вдали от плоской периодической решетки параллельных проводников (рис. IV.2).

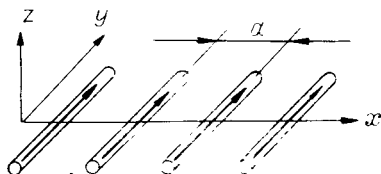


Рис. IV.2. Периодическая одномерная решетка.

На расстояниях, значительно превышающих период решетки, поле можно считать однородным (см. ниже). Тогда с помощью (33.5) находим $H_0 = 2\pi I / (ca)$. Это выражение определяет постоянную составляющую поля. Для нахождения переменной составляющей воспользуемся уравнением Лапласа (32.3) (вне токов). Так как все токи имеют одно и то же направление, у вектора $\mathbf{A}$ есть только одна компонента $A_y(x, z)$ (см. (31.8)), которая в силу симметрии

не зависит от y : $\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = 0$. Это уравнение решаем методом разделения переменных (см. § 11): $A_y(x, z) = X(x) \cdot Z(z)$. Зависимость $X(x)$ определим из условия периодичности поля, которому удовлетворяет набор функций $X(x) = \alpha_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{a} + \varphi_n\right)$, где n — любое целое число, а φ_n — некоторые фазы.

Подставляя полученное выражение в уравнение Лапласа, найдем $\frac{Z''}{Z} = -\frac{X''}{X} = -\left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2$, откуда $Z_n(z) = \beta_n \exp(-2\pi n z/a)$.

Мы оставили здесь только решение, затухающее на бесконечности. Видно, что наиболее медленно убывающее решение, определяющее поле на больших расстояниях, соответствует $n = 1$. Член с $n = 0$ дает постоянный потенциал, так что отвечающее ему поле равно нулю. Полное решение задачи, включающее определение коэффициентов α_n, β_n , требует применения фурье-анализа (см. § 77). Таким образом, переменная часть магнитного поля убывает экспоненциально на характерном расстоянии $a/2\pi$.

Понятие циркуляции полезно не только для магнитного поля, но и для его вектор-потенциала. Действительно, векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяют аналогичным уравнениям:

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (33.6)$$

Поэтому теорема Стокса дает

$$G = \oint (\mathbf{A}, d\mathbf{l}) = \int_S (\mathbf{H}, d\mathbf{S}) = \Phi_S. \quad (33.7)$$

Последняя величина называется *магнитным потоком* (через поверхность S).

Аналогия (33.6) полезна также для наглядного представления картины линий поля $\mathbf{A}$. Например, в случае аксиально-симметричного магнитного поля сразу ясно, что вектор $\mathbf{A}$ имеет только одну составляющую $A_\varphi(\rho, z)$,

$$A_\varphi = \frac{\Phi_z(\rho, z)}{2\pi\rho}, \quad \Phi_z = 2\pi \int_0^\rho H_z(\rho, z) \rho d\rho. \quad (33.8)$$

Теорему Стокса (33.2) можно использовать также для нового определения потенциальности электрического поля, а именно:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (33.9)$$

Действительно, в этом случае работа электрического по любому замкнутому контуру $\oint (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \int_S (\text{rot } \mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 0$.

Для магнитного поля условие $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ не выполняется во всем пространстве. Однако в отдельных областях это условие может выполняться, и тогда допустимо описание магнитного поля с помощью скалярного потенциала (31.1).

§ 34. МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ

Найдем приближенно магнитное поле ограниченной системы токов на расстояниях, значительно превышающих размер системы ($R \gg a$). Для этого исследуем мультипольное разложение вектор-потенциала, аналогичное разложению скалярного потенциала электростатического поля в § 5. Малым параметром разложения является здесь, так же как и в § 5, отношение a/R . Поместим начало координат где-нибудь внутри системы и запишем (см. рис. 1.2):

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \dots \quad (34.1)$$

Здесь поле вычисляется в точке с радиус-вектором $\mathbf{R}$, а координаты элемента тока характеризуются вектором $\mathbf{r}'$ ($r' \sim a$).

Нулевой член разложения $\mathbf{A}_0$, аналогичный полю заряда в электростатике,

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{cR} \int \mathbf{j} dV'. \quad (34.2)$$

В общем случае он не равен нулю. Например, для точечного заряда $\mathbf{A}_0 = e\mathbf{v}/cR$ (см. 31.5). Однако для стационарного распределения тока всегда $\mathbf{A}_0 = 0$.

Для доказательства разобьем систему токов на отдельные замкнутые (в силу ограниченности системы) трубки тока с постоянным током вдоль каждой из них. Для достаточно тонкой трубки тока можно написать $\mathbf{j} dV = \mathbf{j} dl dS = I d\mathbf{r}$, где l — координата вдоль трубки, а dS — площадь ее поперечного сечения; вектор $d\mathbf{r}$ направлен вдоль трубки ($|d\mathbf{r}| = dl$). В результате имеем

$$\int \mathbf{j} dV' = \sum_{\text{TT}} I \oint d\mathbf{r} = 0, \quad (34.3)$$

где суммирование производится по всем трубкам тока (ТТ).

Такой же результат получается и для среднего по времени поля:

$$\overline{\mathbf{A}_0} = \frac{1}{cR} \int \bar{\mathbf{j}} dV' = 0, \quad (34.4)$$

поскольку средняя плотность тока $\bar{\mathbf{j}}$ не зависит от времени.

Следующий член мультипольного разложения

$$\mathbf{A}_1 = -\frac{1}{c} \int \mathbf{j} \cdot \left(\mathbf{r}', \nabla \frac{1}{R} \right) dV'. \quad (34.5)$$

Преобразуем подынтегральное выражение, обозначив для краткости $\nabla(1/R) = \mathbf{g}$. Как мы видели, суммирование по трубкам тока приво-

дит к замене

$$jdV \rightarrow I dr, \quad (34.6)$$

после чего подынтегральное выражение (34.5) можно выразить через двойное векторное произведение:

$$d\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{g}) = \mathbf{g} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{r}) + \mathbf{r}(\mathbf{g}, d\mathbf{r}).$$

Последнее слагаемое здесь снова преобразуется в подынтегральное выражение, если выделить из него полный дифференциал:

$$\mathbf{r}(\mathbf{g}, d\mathbf{r}) = d\{\mathbf{r}(\mathbf{g}, \mathbf{r})\} - d\mathbf{r}(\mathbf{g}, \mathbf{r}).$$

При интегрировании по замкнутой трубке тока полный дифференциал дает нуль, так что его можно опустить. В результате получаем

$$d\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{g}) \rightarrow \frac{1}{2} \mathbf{g} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{r}).$$

Целью всей этой несколько громоздкой операции было «вытащить» вектор $\nabla(1/R)$ из-под интеграла. Окончательно можно написать (ср. (5.2))

$$\mathbf{A}_1 = \nabla \frac{1}{R} \times \mathbf{m} \equiv \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad (34.7)$$

где величина $\mathbf{m}$, называемая *магнитным моментом* системы, равна

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int dV' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}) = \frac{1}{2c} \sum_{\text{TT}} I \oint \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}'. \quad (34.8)$$

Вектор-потенциал (34.7) аналогичен дипольному потенциалу электрического поля, а магнитный момент $\mathbf{m}$ — дипольному моменту $\mathbf{d}$. Это становится особенно ясно, если вычислить соответствующее ему магнитное поле $\mathbf{H} = \nabla \times \left(\nabla \frac{1}{R} \times \mathbf{m} \right) = (\mathbf{m}, \nabla) \nabla \frac{1}{R} - \mathbf{m} \Delta \frac{1}{R}$. Последнее слагаемое равно нулю ($1/R$ — потенциал точечного заряда). При вычислении первого слагаемого учтем, что $(\mathbf{m}, \nabla) \mathbf{R} = \mathbf{m}$. Получим

$$\mathbf{H} = -(\mathbf{m}, \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\frac{\mathbf{m}}{R^3} + \frac{3(\mathbf{R}, \mathbf{m}) \mathbf{R}}{R^5}. \quad (34.9)$$

Это в точности соответствует полю электрического диполя (5.5).

Простейшим примером магнитного диполя является виток с током. Используя последнее выражение в (34.8), найдем

$$\mathbf{m} = \frac{IS}{c}, \quad (34.10)$$

где I — ток в витке, а вектор $\mathbf{S}$ равен по абсолютной величине площади витка и направлен по нормали к его плоскости.

Из сравнения поля такого витка с электрическим полем диполя видно, что они совпадают только на больших расстояниях. Вблизи системы конфигурации электрического и магнитного полей качественно различны: при движении вдоль вектора дипольного момента магнитное поле не изменяет своего направления, в то время как

электрическое направлено внутри диполя в противоположную сторону.

Зависит ли магнитный момент от выбора начала отсчета? При смещении последнего на вектор $\mathbf{a}$ магнитный момент изменяется на величину

$$\Delta \mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{a} \times \mathbf{j} dV' = \frac{\mathbf{a}}{2c} \times \int \mathbf{j} dV'.$$

Но последний интеграл, как мы видели, обращается в нуль для стационарных токов или в среднем по времени. В электростатике это соответствует условию равенства нулю полного заряда системы.

Задача. Найти магнитный момент заряженной частицы, движущейся по круговой траектории в однородном магнитном поле.

По формуле (34.8) получаем ($\mathbf{j} = ev\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t))$):

$$\mathbf{m} = \frac{e\mathbf{r}_e \times \mathbf{v}}{2c} = \left(\frac{e}{2m_0 c} \right) \mathbf{M} = -\frac{w_{\perp}}{H} \left(\frac{\mathbf{H}}{H} \right). \quad (34.11)$$

Здесь m_0 — масса частицы; $\mathbf{M}$ — механический момент, $w_{\perp} = m_0 v_{\perp}^2 / 2$ — часть кинетической энергии, соответствующая компоненте скорости $v_{\perp}$, перпендикулярной вектору $\mathbf{H}$ (так называемая «поперечная» энергия). Мы использовали здесь выражение для ларморовского радиуса частицы $r_L = m_0 v_{\perp} / eH$.

Выражение (34.11) показывает, что магнитный момент заряженной частицы пропорционален ее механическому моменту. Это естественно, поскольку магнитный момент частицы, так же как и механический, связан с ее вращением. Коэффициент пропорциональности называется гиромангнитным отношением

$$g_0 = \frac{e}{2m_0 c}. \quad (34.12)$$

Для сложной системы зарядов гиромангнитное отношение зависит от структуры системы. Мы вернемся к этому вопросу в § 36.

Каждый следующий член мультипольного разложения (34.1) (квадрупольный (A_2), октупольный (A_3), ..., l — полюный (A_l)) отличается от предыдущего малым множителем $\sim a/R$. Если q — характерный заряд системы, а v — скорость его колебаний, то общая оценка членов мультипольного разложения (34.1) может быть записана в виде

$$A_l \sim \frac{q}{R} \left(\frac{a}{R} \right)^l \frac{v}{c}. \quad (34.13)$$

Она отличается от оценки для электрического потенциала (5.4) множителем v/c . Такое же соотношение будет иметь место и для полей, поскольку оба поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ получаются дифференцированием потенциалов по $\mathbf{R}$:

$$H_l \sim \frac{q}{R^2} \left(\frac{a}{R} \right)^l \frac{v}{c}. \quad (34.14)$$

§ 35. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДИПОЛЯ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Взаимодействие любой системы токов с магнитным полем определяется силой Лоренца (28.3), которую нужно проинтегрировать по всем токам:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) dV, \quad \mathbf{K} = \frac{1}{c} \int \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) dV. \quad (35.1)$$

Здесь $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$ — полные сила и момент силы соответственно.

Если бы магнитное взаимодействие удовлетворяло третьему закону Ньютона, то в (35.1) можно было бы оставить только внешнее поле, так как тогда все силы между элементами системы взаимно компенсировались бы. Однако мы знаем, что в общем случае для магнитного взаимодействия не выполняется третий закон Ньютона (см. § 28). Но если мы имеем стационарную систему токов, то третий закон Ньютона справедлив (см. § 28), и полная сила и момент (35.1) определяются только внешним полем.

Если система токов характеризуется приближенно магнитным моментом, а внешнее поле почти однородно, общее выражение (35.1) можно существенно упростить. В этом случае появляется малый параметр a/L (L — характерный масштаб изменения внешнего поля), по которому можно произвести разложение выражений (35.1).

Наиболее просто вычислить момент $\mathbf{K}$, для чего достаточно рассмотреть нулевое приближение, т. е. положить $\mathbf{H} = \text{const}$. Раскрывая двойное векторное произведение, получим

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\mathbf{r}, \mathbf{j}). \quad (35.2)$$

Второе слагаемое не дает вклада в интеграл для $\mathbf{K}$, так как $\mathbf{H}$ можно вынести из-под интеграла, а оставшееся выражение $\int (\mathbf{r}, \mathbf{j}) dV = \sum_{TT} I \oint (\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = 0$ (см. § 34). Первое же слагаемое (35.2) аналогично выражению для вектор-потенциала магнитного момента (34.5) с заменой вектора $-\nabla(1/R)$ на $\mathbf{H}$. Тогда с учетом (34.7) находим для $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}. \quad (35.3)$$

Найдем энергию магнитного диполя во внешнем поле. Для этого вычислим работу, совершаемую при повороте магнитного диполя, считая его постоянным ($\mathbf{m} = \text{const}$):

$$U_m = - \int_0^{\pi/2} K d\theta = -(\mathbf{m}, \mathbf{H}). \quad (35.4)$$

Здесь θ — угол между векторами $\mathbf{m}$, $\mathbf{H}$, а энергия отсчитывается от состояния $\theta = \pi/2$.

Взаимодействие магнитного момента с магнитным полем оказывается полностью аналогичным взаимодействию электрического диполя с электрическим полем (см. § 5). Отсюда вытекает, в частности, и аналогия во взаимодействии двух диполей. Из (34.9) и (35.4) находим энергию магнитного диполь-дипольного взаимодействия:

$$U_{mm} = \frac{(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)}{R^3} - \frac{3(\mathbf{R}, \mathbf{m}_1)(\mathbf{R}, \mathbf{m}_2)}{R^5}. \quad (35.5)$$

Из формулы для энергии U_m можно получить силу, действующую на магнитный момент в слабо неоднородном поле:

$$\mathbf{F} = -\nabla U_m = \nabla(\mathbf{m}, \mathbf{H}). \quad (35.6)$$

Это равенство также аналогично одному из выражений для силы, действующей на диполь в электрическом поле (см. § 5). Другое выражение, полученное в электростатике, применимо и в магнитном поле:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m}, \nabla) \mathbf{H}, \quad (35.7)$$

но при дополнительном условии $\text{rot } \mathbf{H} = 0$. Для доказательства эквивалентности соотношений (35.6) и (35.7) достаточно воспользоваться преобразованием

$$\mathbf{m} \times \text{rot } \mathbf{H} \equiv \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla(\mathbf{m}, \mathbf{H}) - (\mathbf{m}, \nabla) \mathbf{H}.$$

То же самое относится и к эквивалентности аналогичных выражений в электростатике. Что же справедливо в общем случае, когда $\text{rot } \mathbf{H} \neq 0$, $\text{rot } \mathbf{E} \neq 0$? В электростатике всегда справедливо соотношение $\mathbf{F} = (\mathbf{d}, \nabla) \mathbf{E}$, поскольку оно получено путем непосредственного суммирования сил, действующих на заряды системы. Оказывается, что в магнитном поле в общем случае справедливо другое выражение (35.6), причем всегда нужно считать, что $\mathbf{m} = \text{const}$ (см. задачу 1 ниже). Эту силу можно использовать, в частности, для удержания нейтронов в магнитной ловушке (см. § 57).

Задача. Найти силу, действующую на магнитный диполь, непосредственно из силы Лоренца.

Разлагая магнитное поле в окрестности диполя $\mathbf{H}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{H}_0 + (\mathbf{r}, \nabla) \mathbf{H}$ и подставляя это приближение в (35.1), найдем

$$\mathbf{F} \approx \frac{1}{c} \int dV \mathbf{j} \times (\mathbf{r}, \nabla) \mathbf{H}.$$

Докажем, что последнее выражение равно $\nabla(\mathbf{m}, \mathbf{H})$. Для этого рассмотрим соотношение $(\mathbf{m} \times \nabla) \times \mathbf{H} = -\mathbf{m} \text{div } \mathbf{H} + \nabla(\mathbf{m}, \mathbf{H}) = \nabla(\mathbf{m}, \mathbf{H})$, где мы считаем $\mathbf{m} = \text{const}$. Используя формулу для $\mathbf{m}$ (см. § 34), напомним $\nabla(\mathbf{m}, \mathbf{H}) = \frac{1}{2c} \int dV ((\mathbf{r} \times \mathbf{j}) \times \nabla) \times \mathbf{H} = \frac{1}{2c} \int dV \{\mathbf{j}(\mathbf{r}, \nabla) - \mathbf{r}(\mathbf{j}, \nabla)\} \times \mathbf{H}$. Производя замену $\mathbf{j} dV \rightarrow I d\mathbf{r}$, преобразуя подынтегральную функцию $d\mathbf{r}(\mathbf{r}, \nabla) - \mathbf{r}(d\mathbf{r}, \nabla) = -d\{\mathbf{r}(\mathbf{r}, \nabla)\} + 2d\mathbf{r}(\mathbf{r}, \nabla)$, опуская полный дифференциал и переходя обратно к интегрированию по объему, получаем окончательно

$$\nabla(\mathbf{m}, \mathbf{H}) = \frac{1}{c} \int dV \mathbf{j}(\mathbf{r}, \nabla) \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \int dV \{\mathbf{j} \times (\mathbf{r}, \nabla) \mathbf{H}\} = \mathbf{F}.$$

§ 36. ПРЕЦЕССИЯ МАГНИТНОГО МОМЕНТА. МАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС

Рассмотрим движение системы, обладающей магнитным моментом, в однородном магнитном поле. В случае стационарного тока на систему действует при этом только момент сил (35.3), и уравнения движения имеют вид

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}. \quad (36.1)$$

Но мы знаем, что магнитный момент пропорционален механическому (см. § 34 и ниже):

$$\mathbf{m} = g\mathbf{M}. \quad (36.2)$$

Из уравнения (36.1) следует, тогда, что вектор $\mathbf{M}$ будет вращаться вокруг вектора $\mathbf{H}$, описывая конус (рис. IV.3), т. е. совершать движение, которое называется *прецессией*.

Для определения угловой скорости прецессии $\Omega_{\text{пр}}$ воспользуемся кинематическим уравнением

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \Omega_{\text{пр}} \times \mathbf{M}. \quad (36.3)$$

Сравнивая его с (36.1) (с учетом (36.2)), получим

$$\Omega_{\text{пр}} = -g\mathbf{H}. \quad (36.4)$$

Таким образом, ось прецессии совпадает с направлением магнитного поля.

Вообще говоря, решение уравнения (36.1) допускает также существование любой компоненты вектора $\Omega_{\text{пр}}$ вдоль вектора $\mathbf{M}$. Однако это означает лишь более сложное описание той же самой прецессии, поскольку в последнем случае вектор прецессии $\Omega_{\text{пр}}$ сам вращается вокруг вектора $\mathbf{H}$. Решение (36.4) есть простейшее описание прецессии.

В сложной системе, части которой характеризуются разными гиромагнитными отношениями g_i , мгновенное направление вектора магнитного момента не совпадает с направлением механического момента, который сохраняется во времени. Поэтому в среднем направления магнитного и механического моментов совпадают, и, следовательно, для сложной системы также можно ввести гиромагнитное отношение (36.2). Однако закон прецессии (36.4) выполняется только в достаточно

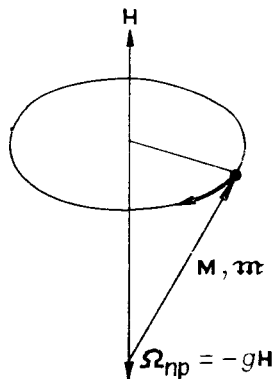


Рис. IV.3. Прецессия магнитного момента во внешнем поле.

слабом внешнем поле, когда угловая скорость прецессии много меньше скорости внутренней прецессии сложной системы. В сильном магнитном поле система разрушается в том смысле, что ее части прецессируют независимо.

Гиромагнитное отношение сложной системы позволяет судить об ее «устройстве». При этом обычно гиромагнитное отношение измеряется естественной единицей $g_0 = e/2m_0c$, соответствующей вращающейся частице массы m_0 (34.12), что приводит к замене

$$g \rightarrow g \cdot g_0. \quad (36.5)$$

Так, например, собственному «вращению» электрона (спину) соответствует $g_e \approx -2$, где знак минус связан с тем, что заряд электрона отрицательный. Интересная ситуация имеет место для нейтрона, который электрически нейтрален, но обладает магнитным моментом с $g_n \approx -3,8$. (В данном случае $g_0 = e/2m_n c$, где m_n — масса нейтрона.) Знак минус снова показывает, что магнитный момент вызван вращением отрицательного заряда. Очевидно, что нейтрон представляет собой сложную систему, составленную по современным представлениям из так называемых кварков. Для протона $g_p \approx 5,6 = 2 + 3,6$, где 2 — гиромагнитное отношение, которое должен был бы иметь «точечный» протон (подобно электрону), а 3,6 — добавка, связанная со структурой протона. Интересно отметить, что эти добавки для протона и нейтрона близки по абсолютной величине, хотя разница между ними выходит далеко за пределы экспериментальных ошибок.

Прецессию магнитного момента можно использовать для измерения гиромагнитного отношения. Делается это с помощью так называемого магнитного резонанса. Исследуемый образец помещается в однородное магнитное поле, вызывающее прецессию магнитных моментов его молекул, атомов и ядер. Помимо этого на образец накладывается слабое вращающееся поперечное поле. Если частота вращения совпадает с частотой прецессии (резонанс), т. е. поперечное поле вращается синхронно с магнитными моментами, оно переворачивает их. Условие резонанса достигается путем медленного изменения основного магнитного поля. Момент резонанса фиксируется по поглощению энергии генератора вращающегося магнитного поля, затрачиваемой на перемагничивание образца. Зная частоту прецессии, а также значение магнитного поля в резонансе, можно из (36.4) найти гиромагнитное отношение.

Явление магнитного резонанса для электронных моментов в атомах и молекулах было открыто в 1944 г. советским физиком Завойским. Этот вид магнитного резонанса получил название ЭПР (электронный парамагнитный резонанс). Типичные параметры установки для наблюдения ЭПР: $H_0 \sim 10^4$ Э; $\Omega_{\text{пр}} \sim eH_0/m_e c \sim 10^{11}$ с⁻¹ ($\lambda \sim 2$ см). ЭПР широко применяется в исследовании химических реакций, так как он позволяет быстро анализировать химический состав вещества. Особенно существенна возможность наблюдения за так называемыми свободными радикалами, к которым из-за их высокой активности практически неприменимы обычные методы химического анализа.

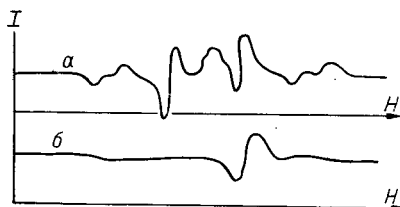


Рис. IV.4. Спектр ЭПР этилового спирта, облученного ультрафиолетовым излучением:

а — непосредственно после облучения; б — спустя 2 ч.

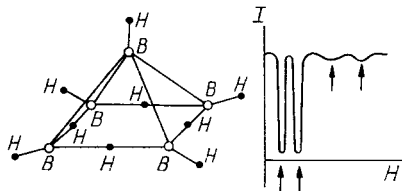


Рис. IV.5. Схема молекулы пентаборана (B_5H_9) и спектр ЯМР ее ядер бора.

Пример спектра ЭПР изображен на рис. IV.4. Верхняя кривая представляет спектр этилового спирта непосредственно после его облучения ультрафиолетовым светом. Последний разрушает молекулы спирта, в результате чего образуются различные радикалы. Спустя некоторое время радикалы, прореагировав, исчезают, и в спектре ЭПР остается только линия этилового спирта (нижняя кривая). Интересно отметить, что прецессия спиновых магнитных моментов радикалов существенно влияет на протекание различных химических реакций с их участием (см. [3]), а значит, вообще говоря, и на биологические процессы.

В 1937 г. американский физик Раби использовал метод магнитного резонанса для измерения магнитных моментов ядер (ЯМР — ядерный магнитный резонанс) на атомных пучках. В 1940 г. этим же методом Блох (США) впервые измерил магнитный момент нейтрона, а в 1946 г. вместе с Парселлом распространил метод ЯМР на конденсированные среды. В отличие от ЭПР здесь частота прецессии меньше, грубо говоря, в отношении масс электрона и протона, и настолько же по порядку величины понижена чувствительность. При помощи ЯМР было впервые измерено гиромагнитное отношение для протона. В дальнейшем эта величина стала использоваться для прецизионных измерений магнитного поля методом ЯМР, относительная точность которых в настоящее время достигает $\sim 10^{-6}$.

Подобно спектрам ЭПР, спектры ЯМР применяются для расшифровки молекулярной структуры химических соединений. Пример спектра ЯМР приведен на рис. IV.5. Исследуемым веществом является здесь пентаборан (B_5H_9). Четыре пика в спектре (отмеченные стрелками) соответствуют четырем различным структурам. Два первых больших пика относятся к ядрам бора в основании пирамиды, а два маленьких связаны с ядром бора при вершине.

Прецессия магнитного момента позволяет также измерить гиромагнитное отношение для элементарных частиц. Точнее всего эта величина измерена для электрона. При этом используется следующее любопытное свойство движения свободного электрона в однородном магнитном поле. При $g=2$ скорость прецессии спина частицы ($\Omega_{\text{пр}} = g_e H / 2m_e c = eH / m_e c$) совпадает с угловой скоростью ее ларморовского вращения, т. е. ориентация спина отно-

сительно вектора скорости остается неизменной. Это позволяет очень точно измерить малую разность $(|g_e| - 2)$. Для электрона $|g_e| - 2 \sim 10^{-3}$. Вследствие этой разности спин электрона медленно прецессирует относительно его вектора скорости с частотой

$$\omega_a = \frac{eH}{m_e c} \left(\frac{|g_e|}{2} - 1 \right) \equiv \frac{eH}{m_e c} a, \quad (36.6)$$

где $a = \frac{|g_e|}{2} - 1 \ll 1$. Частота измеряется следующим образом. Поляризованные вдоль вектора скорости электроны, т. е. электроны, спин которых имеет преимущественное направление по скорости, выпускаются в магнитное поле и после некоторого числа оборотов сбрасывается на мишень. В зависимости от ориентации спина при рассеянии на мишени возникает большая или меньшая аксиальная асимметрия, т. е. разность числа электронов, рассеянных налево и направо. Измеряя период этой зависимости $T_a = 2\pi/\omega_a$, можно найти величину a . В экспериментах американских физиков Висли и Рича (1971 г.) удавалось наблюдать более 10^4 периодов медленной прецессии (36.6), что позволило измерить g_e с точностью $\sim 3 \cdot 10^{-9}$. Последние эксперименты, выполненные другим методом, дали значение $a_e = (1\,159\,652\,202 \pm 231) \times 10^{-12}$. Полученный результат совпадает в пределах ошибок с теоретическим значением. Это значит, что если электрон и имеет какую-либо структуру, то она «запрятана» очень «глубоко».

Аналогичные измерения проделаны и для μ -мезона, одной из самых загадочных частиц, которая ничем, кроме массы, не отличается от электрона («тяжелый» электрон) $a_\mu = (1\,165\,924 \pm 9) \times 10^{-8}$.

Похожие методы используются и для измерения магнитных моментов более «экзотических» частиц, например Σ -гиперона, который живет всего около 10^{-10} с. Такие измерения производились, в частности, группой Баркова из Института ядерной физики СО АН СССР на серпуховском протонном синхротроне Института физики высоких энергий. Для того чтобы повернуть магнитный момент на заметный угол за столь короткое время, использовалось сверхсильное магнитное поле $H \sim 10^6$ Гс, которое создавалось с помощью взрыва (см. § 50).

Глава V

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В СРЕДЕ

§ 37. НАМАГНИЧЕНИЕ

Молекулярные токи в среде изменяют магнитное поле. Такую среду называют магнетиком. Любое вещество в большей или меньшей степени обладает магнитными свойствами. Магнетики быва-

ют, в основном, двух сортов: диамагнетики и парамагнетики. Простейшим диамагнетиком является плазма, т. е. газ свободных заряженных частиц. Последние вращаются в магнитном поле таким образом, что их собственное поле направлено против внешнего, т. е. такая среда ослабляет магнитное поле (см. задачу в § 34).

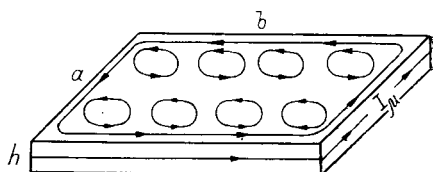
Аналогичный диамагнитный эффект наблюдается и в обычном веществе с молекулами (атомами), полный магнитный момент которых равен нулю (например, инертные газы). Диамагнитный эффект в данном случае связан с тем, что при наложении магнитного поля происходит ускорение электронов, вращающихся в одну сторону, и замедление — вращающихся в другую (за счет ЭДС индукции, см. § 45). Если же полный магнитный момент молекулы в отсутствие поля не равен нулю, то такое вещество является парамагнетиком (например, натрий). Парамагнетик усиливает внешнее магнитное поле вследствие частичной ориентации его магнитных моментов по полю. В этом отношении он аналогичен диэлектрику с ориентационной поляризацией (см. § 14). Конечно, в любом парамагнетике есть и диамагнитный эффект, однако он существенно меньше парамагнитного.

Влияние большинства веществ на магнитное поле очень мало. Магнитная проницаемость вещества μ (см. § 38), аналогичная ϵ , в большинстве случаев почти не отличается от 1. Например, для газообразного гелия $\mu - 1 \approx -1,4 \cdot 10^{-3}$, а для твердого натрия $\mu - 1 \approx +2 \cdot 10^{-4}$. Слабое влияние среды на магнитное поле связано с малой скоростью атомных электронов: $v/c \sim 10^{-2}$. Это значит, что магнитный момент атомов и молекул примерно в 100 раз меньше электрического, а поскольку вектор поляризации пропорционален квадрату дипольного момента (14.3), то $(\mu - 1)/(\epsilon - 1) \sim (v/c)^2 \sim 10^{-4}$.

Мы пока не будем касаться веществ, обладающих необычной магнитной проницаемостью, например ферромагнетиков (см. § 42) с $\mu \gg 1$, а также сверхпроводников, являющихся идеальными диамагнетиками с $\mu = 0$ (см. § 54).

Намагничивание среды можно характеризовать, аналогично поляризации диэлектрика, с помощью магнитного момента единицы объема M . Для того чтобы получить наглядное представление об этой величине, рассмотрим простой пример однородно намагниченной тонкой пластинки (рис. V.1). Намагниченность означает, что молекулярные токи в пластинке частично ориентированы, как показано на рис. V.1. Так как соседние молекулярные токи взаимно компенсируются, то вся система молекулярных токов эквивалентна одному обтекающему току I_μ , который связан с намагничиванием

Рис. V.1. Молекулярные токи намагничивания.



соотношением:

$$M = \frac{I_\mu S}{cV} = \frac{I_\mu}{ch} = \frac{i_\mu}{c}, \quad (37.1)$$

где $S = ab$ — площадь пластинки, а $V = abh$ — ее объем, i_μ — обтекающий молекулярный ток на единицу высоты. Вообще говоря, помимо такого эквивалентного обтекающего тока, связанного с движением электронов внутри атомов или молекул, в проводящей среде (например, в плазме, см. § 44) возможно появление дополнительного обтекающего макроскопического тока, который не описывается соотношениями (37.1) и (37.5) ниже.

Найдем теперь связь между намагниченностью и молекулярными токами в общем случае. Для этого рассмотрим вектор-потенциал намагниченной среды (см. (34.7)):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int \left(\nabla \frac{1}{R} \right) \times \mathbf{M}(\mathbf{r}') dV', \quad (37.2)$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Преобразуем это выражение. Прежде всего, можно написать: $\nabla \frac{1}{R} = -\nabla' \frac{1}{R}$, где ∇' означает дифференцирование по координатам вектора $\mathbf{r}'$. Далее, преобразуем подынтегральное выражение:

$$\left(\nabla' \frac{1}{R} \right) \times \mathbf{M} = \nabla' \times \frac{\mathbf{M}'}{R} - \frac{\nabla' \times \mathbf{M}'}{R}. \quad (37.3)$$

Но интеграл от первого слагаемого равен нулю, если среда имеет ограниченные размеры. Действительно, это слагаемое есть полный ротор (для этого мы и произвели преобразование (37.3)), линии которого всегда замкнуты, так как его дивергенция равна нулю. В таком случае интеграл от него аналогичен интегралу (34.2) для стационарных токов ($\text{div } \mathbf{j} = 0$): $\int \mathbf{j} dV = 0$. Прямое вычисление такого интеграла дано ниже в задаче 1. Окончательно получаем

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{c \text{rot } \mathbf{M}'}{R} dV'. \quad (37.4)$$

Сравнивая это выражение с вектор-потенциалом произвольной системы токов (31.8), находим плотность молекулярных токов:

$$\mathbf{j}_\mu = c \text{rot } \mathbf{M}. \quad (37.5)$$

В рассмотренном выше примере $\text{rot } \mathbf{M}$ отличен от нуля только на краях пластинки и равен $\mathbf{M} \delta(z)$, где z — координата по нормали к боковой грани, причем точка $z = 0$ соответствует краю пластинки. Полный ток на единицу длины боковой грани $i = \int j_\mu dz = cM$.

Соотношение (37.5) является основным для теории магнитных процессов в среде. Оно может быть получено также и в «обратном направлении», т. е. мы постулируем соотношение (37.5) с неизве-

стным вектором $\mathbf{M}$, вычисляем магнитный момент молекулярных токов j_μ и убеждаемся, что вектор $\mathbf{M}$ равен магнитному моменту единицы объема (см. задачу 2 ниже).

Задача 1. Показать, что объемный интеграл от ротора произвольного ограниченного в пространстве векторного поля равен нулю.

Представим ротор в виде

$$\text{rot } \mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{e}_j a_k - \mathbf{e}_k a_j), \quad (37.6)$$

где $\mathbf{e}_i$ — орты, а индексы $i \neq j \neq k$ образуют циклическую перестановку. Искомый интеграл

$$\int dV \text{rot } \mathbf{a} = - \int \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{e}_j a_k - \mathbf{e}_k a_j) dx_i dx_j dx_k.$$

Последнее выражение преобразуется в интеграл по трем парам плоскостей ($x_i = \pm b_i \rightarrow \infty$), отстоящим сколь угодно далеко друг от друга. Для ограниченного в пространстве поля интеграл по ним равен нулю.

Задача 2. Вычислить магнитный момент системы токов (37.5).

Используя (34.8), получим интеграл

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2} \int dV (\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{M})).$$

Подынтегральное выражение удобнее всего преобразовать, представив векторы в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_i x_i, \quad \mathbf{M} = \mathbf{e}_k M_k, \quad \nabla = \mathbf{e}_l \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Раскрывая двойное векторное произведение, найдем

$$\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{M}) = \mathbf{e}_l \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_l} \right) - (\mathbf{r}, \mathbf{e}_l) \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_l}.$$

Преобразуем теперь оба слагаемых, выделив полные производные:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_l \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_l} \right) &= \mathbf{e}_l \frac{\partial}{\partial x_l} (\mathbf{r}, \mathbf{M}) - \mathbf{e}_l \left(\mathbf{M}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_l} \right) = \mathbf{e}_l \frac{\partial}{\partial x_l} (\mathbf{r}, \mathbf{M}) - \mathbf{M}, \\ (\mathbf{r}, \mathbf{e}_l) \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_l} &= x_l \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l} (x_l \mathbf{M}) - 3\mathbf{M}. \end{aligned}$$

Интеграл от полных производных даст для ограниченной среды нуль (см. задачу 1), и мы получаем

$$\mathfrak{m} = \int \mathbf{M} dV,$$

т. е. вектор $\mathbf{M}$ можно интерпретировать как плотность магнитного момента среды.

§ 38. МАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Получим теперь основное уравнение для магнитного поля в среде. Для этого воспользуемся уравнением (32.8): $\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}/c$ (считаем пока поле статическим). Представим ток в виде суммы внешнего (для среды), или макроскопического, тока и молекулярного: $\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j} + \mathbf{j}_\mu$.

Молекулярные токи и вызванные ими магнитные поля резко неоднородны в малых (порядка расстояния между молекулами) участках пространства. Обычно микроструктура поля не представляет интереса. Поэтому поле в среде характеризуется его средними значениями по объему, содержащему большое число молекул. Такое среднее поле называется по историческим причинам, упомянутым в § 28, магнитной индукцией

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \mathbf{B}. \quad (38.1)$$

Таким образом, уравнение для магнитного поля в среде запишется в виде

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \langle \mathbf{j}_\mu \rangle). \quad (38.2)$$

Но $\langle \mathbf{j}_\mu \rangle = c \text{ rot } \langle \mathbf{M} \rangle$ (см. (37.5)). Теперь естественно объединить оба члена с ротором и ввести новое, вспомогательное поле (не путать с магнитным полем $\mathbf{H}$ в вакууме!):

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \langle \mathbf{M} \rangle, \quad (38.3)$$

не имеющее специального названия. Вспомогательное поле удобно тем, что уравнение для него зависит только от внешнего тока:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (38.4)$$

Формально это уравнение совпадает с исходным (32.8) для магнитного поля в вакууме. Однако его физический смысл совершенно иной: и $\mathbf{H}$ здесь не магнитное поле, а вспомогательный вектор (38.3), и ток не полный, а только внешний.

Обычно внешний ток задан, так что можно непосредственно найти вспомогательное поле $\mathbf{H}$. Для нахождения полного магнитного поля $\mathbf{B}$ необходимо еще знать связь между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$. Оказывается, что для большинства веществ эту связь можно считать линейной, т. е. ее можно описать некоторой матрицей μ_{ik} для анизотропной среды (например, кристалла)

$$B_i = \mu_{ik} H_k \quad (38.5)$$

или одной постоянной μ для изотропной среды

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (38.6)$$

Величина μ называется магнитной проницаемостью, а μ_{ik} — тензором магнитной проницаемости.

С помощью вспомогательного поля $\mathbf{H}$ мы исключили из рассмотрения молекулярные токи $\mathbf{j}_\mu$, влияние которых характеризуется теперь только одним параметром μ . Разумеется, это очень упрощенное описание сложных процессов в среде. Поэтому оно справедливо лишь приближенно, и только в достаточно слабых полях. Впрочем, с практической точки зрения эти поля весьма велики. Их можно оценить из условия равенства магнитной и электрической сил, действующих на атомный электрон: $B \sim cE/v \sim 10^8$ Гс.

Отметим, что максимальное поле, которое удалось получить в земных условиях, примерно на порядок ниже (см. § 50).

В особых случаях, например в ферромагнетиках, зависимость $B(H)$ нелинейна (подробнее см. § 42). В случае однородной среды поле $\mathbf{H}$ является просто частью магнитного поля $\mathbf{B}$, вызванной только внешними токами. Например, для прямого бесконечного тока $H = 2I/cr$, $B = 2\mu I/cr$. Механизм увеличения полного поля в μ раз связан с появлением вокруг тока I молекулярных токов, так что суммарный ток равен μI . Это значит, что молекулярные токи равны $I_\mu = (\mu - 1)I$. Последнее соотношение оказывается справедливым для произвольного распределения токов в однородной среде. Действительно, выражая намагниченность $\mathbf{M}$ в (37.5) через $\mathbf{H}$ и используя уравнение (38.4), найдем

$$\mathbf{j}_\mu = c \operatorname{rot} \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathbf{H} = (\mu - 1) \mathbf{j}. \quad (38.7)$$

В общем случае неоднородной среды поле $\mathbf{H}$ совсем не похоже на магнитное поле, так как $\operatorname{div} \mathbf{H} = \operatorname{div}(\mathbf{B}/\mu(\mathbf{r})) = (B, \nabla(1/\mu)) \neq 0$. Мы использовали здесь уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (38.8)$$

которое справедливо всегда вследствие отсутствия магнитных зарядов.

В гауссовой системе единиц напряженность обоих полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ измеряется в одних и тех же единицах — гауссах (Гс). Иногда употребляется также специальное название для единицы поля $\mathbf{H}$ — эрстед (Э): $1\text{Э} = 1\text{ Гс}$. В тех же единицах измеряются и напряженность электрического поля и индукция $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ (см. § 2 и 15). Именно это обстоятельство делает гауссову систему наиболее пригодной с точки зрения физики, так как все четыре поля физически связаны между собой.

В СИ единицей магнитной индукции является тесла (Тл): $1\text{ Тл} = 10^4\text{ Гс}$. Поле $\mathbf{H}$ измеряется в амперах на метр (А/м): $1\text{ А/м} = 4\pi \cdot 10^{-3}\text{ Гс} \approx 0,0126\text{ Гс}$. Поскольку $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ имеют разные размерности, магнитная проницаемость оказывается в СИ размерной величиной:

$$\mu \rightarrow \frac{\mu\mu_0}{4\pi}; \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\text{ Тл}\cdot\text{м/А}, \quad (38.9)$$

где μ — безразмерная относительная магнитная проницаемость (то же самое, что и в гауссовой системе), а μ_0 — магнитная проницаемость вакуума.

Вектор-потенциал в среде связан обычным соотношением с полным полем:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (38.10)$$

Единицей вектор-потенциала в гауссовой системе является гаусс-сантиметр (Гс·см), а в СИ — тесла-метр (Тл·м): $1\text{ Тл}\cdot\text{м} = 10^6\text{ Гс}\cdot\text{см}$.

§ 39. ТОК СМЕЩЕНИЯ В СРЕДЕ

Уравнение для $\mathbf{H}$ в среде (38.4) справедливо для статических полей. В случае переменного электрического поля нужно добавить к (38.4) не только вакуумный ток смещения (32.9), но и дополнительные молекулярные токи, возникающие за счет переменной поляризации среды. Например, в периодическом поле атомные электроны все время колеблются вдоль поля, что эквивалентно некоторому переменному току, как бы протекающему (несмотря на отсутствие проводимости) через среду. Плотность поляризационного тока $\mathbf{j}_\epsilon$ можно найти, используя выражение (15.4) $\rho_\epsilon = -\operatorname{div} \mathbf{P}$ для плотности поляризационных зарядов и уравнение непрерывности:

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_\epsilon = -\frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial t} = \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (39.1)$$

Отсюда

$$\mathbf{j}_\epsilon = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (39.2)$$

К этому решению можно добавить, вообще говоря, любой вектор, дивергенция которого равна нулю или, иначе говоря, ротор любого вектора. Но именно такой характер имеют молекулярные токи, возникающие под действием магнитного поля, $\mathbf{j}_\mu = c \operatorname{rot} \mathbf{M}$. Таким образом, полный ток атомных электронов среды складывается из двух частей — поляризационного, или «электрического», тока и вихревого, или «магнитного»:

$$\mathbf{j}_{\epsilon\mu} = \mathbf{j}_\epsilon + \mathbf{j}_\mu = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad (39.3)$$

Разумеется, оба этих тока создаются одними и теми же атомными электронами, совершающими сложное движение в электромагнитном поле. Если поле достаточно слабое по сравнению с атомным, оба тока можно считать независимыми, т. е. электрическое и магнитное поля возмущают движение электронов независимо друг от друга. В сильных полях между электрическим и магнитным полями возникает нелинейная связь через движение электронов.

Теперь мы можем написать ток смещения в среде:

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (39.4)$$

Добавляя его в правую часть уравнения для стационарного $\mathbf{H}$ (38.4), получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (39.5)$$

Это и есть точное уравнение для магнитного поля в среде — одно из уравнений Максвелла.

Выражение (39.4) позволяет понять происхождение термина «ток смещения». В среде часть этого тока действительно связана

со смещением зарядов $(\partial P/\partial t)$. Перенесение этого термина на другую часть $(1/4\pi)(\partial E/\partial t)$ не имеет, разумеется, никакого физического смысла и отражает лишь историю развития физики электромагнитного поля.

Из уравнений (39.5), (38.10) и (32.7) при постоянных ϵ и μ получаем уравнение для вектор-потенциала в среде:

$$\Delta A - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \cdot \mathbf{j} \quad (39.6)$$

(подробнее см. § 67).

§ 40. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Влияние однородной среды сводится просто к изменению внешних токов (см. § 38). Простейшим случаем неоднородной среды является кусочно-однородная среда с резкими бесконечно тонкими границами между отдельными областями, в каждой из которых $\mu = \text{const}$. При вычислении поля в такой среде необходимо знать граничные условия, т. е. связь между компонентами полей на границе соседних областей. Поскольку граничные условия являются локальными, т. е. связывают поля в «точке» (резкая граница), границу всегда можно считать плоской.

Граничное условие для нормальной компоненты поля $\mathbf{B}$ находится аналогично тому, как это делалось для вектора $\mathbf{D}$ в электростатике (см. § 16). Из уравнения $\text{div } \mathbf{B} = 0$ с помощью теоремы Гаусса получаем

$$B_n = \text{const}. \quad (40.1)$$

Отметим, однако, что физический смысл этого условия не совпадает с аналогичным ему формально условием: $D_n = \text{const}$ (16.2), так как $\mathbf{B}$ описывает полное магнитное поле, а $\mathbf{D}$ является вспомогательным вектором («часть» электрического поля).

Второе граничное условие для тангенциальной компоненты вектора $\mathbf{H}$, вообще говоря, нельзя получить из условия непрерывности потенциала, как это было сделано в электростатике. Действительно, основное уравнение магнитного поля (32.8) показывает, что в общем случае поле $\mathbf{H}$ непотенциально, так как $\text{rot } \mathbf{H} \neq 0$. Правда, в частном случае, когда плотность внешних токов и тока смещения на границе равна нулю, можно ввести скалярный потенциал поля $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = -\nabla\psi. \quad (40.2)$$

При этом из условия непрерывности потенциала (конечное значение поля) получим, как и в электростатике,

$$H_t = \text{const}. \quad (40.3)$$

Оказывается, что это условие сохраняется и для конечной плотности тока. Рассмотрим замкнутый контур, охватывающий гра-

ницу, большие стороны которого равны единице, а меньшие стремятся к нулю (рис. V.2, а). Применим к этому контуру закон сохранения циркуляции $\mathbf{H}$ (см. § 33). Если плотность тока на границе конечна, то полный ток через контур стремится к нулю вместе с его площадью, а циркуляция равна: $H_{t1} - H_{t2} = 0$, откуда и следует условие (40.3). Это условие нарушается, если по поверхности раздела течет ток с конечной (ненулевой) линейной плотностью $\mathbf{J}$. Этот вектор лежит в плоскости границы и характеризует ток через единицу длины поверхности (рис. V.2, б). В этом случае необходимо рассмотреть отдельно две компоненты вектора $\mathbf{H}_t$ — перпендикулярную и параллельную вектору $\mathbf{J}$: $H_{t\alpha}$ и $H_{t\beta}$. Только одна из них (параллельная) сохраняется ($H_{t\beta} = \text{const}$), в то время как другая терпит разрыв: $H_{t\alpha}^{(2)} - H_{t\alpha}^{(1)} = 4\pi J/c$. Это условие легко получается из закона сохранения циркуляции $\mathbf{H}$ (33.3). В векторной форме оба условия можно записать в виде

$$\mathbf{H}_t^{(2)} - \mathbf{H}_t^{(1)} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{J}, \quad (40.4)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к граничной поверхности, направленный в первую среду. Отметим, что граничные условия (40.1), (40.3) при $J = 0$ формально совпадают с граничными условиями в электростатике (см. § 16).

Задача 1. Найти магнитное поле H_0 в тонкой плоской щели, если поле в среде можно считать однородным.

Пусть вектор $\mathbf{B}$ в среде составляет угол θ с нормалью к щели (рис. V.3). Граничные условия (40.1), (40.3), дают:

$$H_{0n} = B \cos \theta, \quad H_{0t} = B \sin \theta / \mu,$$

или

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{n} B \cos \theta + \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{n})}{\mu}.$$

В частности, если поле перпендикулярно плоскости щели ($\theta = 0$), то $H_0 = B$, а если оно параллельно щели ($\theta = \pi/2$), то $H_0 = B/\mu = H$. Этот результат показывает, как можно измерять векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ в среде.

Задача 2. Найти магнитное поле в сферической полости радиуса a .

Будем решать более общую задачу, считая, что внутри полости находится среда с магнитной проницаемостью μ_1 , а снаружи — с проницаемостью μ_2 . Поскольку внешние токи отсутствуют, $\text{rot} \mathbf{H} = 0$, т. е. поле $\mathbf{H}$ потенциально. Поэтому задача становится полностью аналогичной электростатической, а так как граничные условия также аналогичные (см. выше), то и решения обеих

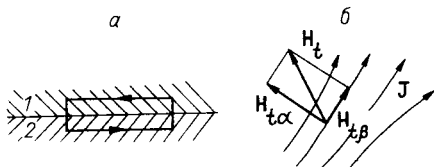


Рис. V.2. Граничные условия для вектора $\mathbf{H}$.

а — вид в плоскости, ортогональной границе; б — плоскость границы с поверхностным током.

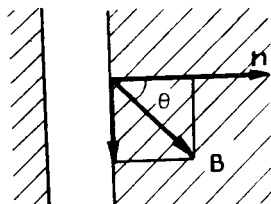


Рис. V.3. К задаче 1.

задач формально совпадают (16.5):

$$\mathfrak{M}^* = H_0 a^3 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad H_1 = H_0 \frac{3\mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2}, \quad (40.5)$$

где H_0 — однородное поле вдали от полости.

Решим теперь эту же задачу с помощью векторного потенциала $\text{rot } A = B$. Покажем прежде всего, что внутри каждой среды молекулярные токи отсутствуют. Действительно, $j_\mu = c \text{rot } M = c(\mu - 1) \text{rot } H/4\pi$, так как каждая из сред считается однородной. Тогда общее уравнение (39.6) сводится к $\Delta A = 0$. В аксиально-симметричном поле достаточно взять лишь одну компоненту вектора A (33.8). В сферической системе координат (полярная ось направлена вдоль H_0) уравнение $\Delta A = 0$ принимает вид

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) = \frac{A}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (40.6)$$

Дополнительное слагаемое в правой части возникает вследствие того, что оператор Лапласа действует на вектор. Уравнение (40.6) решаем методом разделения переменных: $A(r, \theta) = R(r) \cdot F(\theta)$. Угловую зависимость находим из условия, что при $r \rightarrow \infty$ поле асимптотически стремится к однородному: $A \rightarrow A_0 = Br \sin \theta/2$. Отсюда $F(\theta) = \sin \theta$. Подставляя в (40.6), получим уравнение для радиальной части:

$$(r^2 R')' - 2R = 0. \quad (40.7)$$

Аналогично электростатической задаче (см. § 14) ищем решение в виде $R(r) = r^k$. После подстановки в уравнение получаем $k = 1; -2$, откуда общее решение для потенциала

$$A = \begin{cases} B_1 r \sin \theta/2, & r \leq a, \\ \frac{B_0 r \sin \theta}{2} + \frac{\mathfrak{M} \sin \theta}{r^2}, & r \geq a. \end{cases} \quad (40.8)$$

Две неизвестные постоянные, имеющие смысл поля внутри полости (B_1) и эффективного магнитного момента ($\mathfrak{M}$), найдем из граничных условий:

$$\frac{aB_1}{2} = \frac{aB_0}{2} + \frac{\mathfrak{M}}{a^2}; \quad \frac{B_1}{\mu_1} = \frac{1}{\mu_2} \left(B_0 - \frac{\mathfrak{M}}{a^3} \right). \quad (40.9)$$

Первое равенство выражает непрерывность вектор-потенциала или, что то же самое, условие $B_r = \text{const}$. Второе вытекает из условия $H_t = \text{const}$. Решая уравнения (40.9) относительно B_1 , $\mathfrak{M}$, получим, конечно, тот же самый результат (40.5). При сравнении нужно только иметь в виду, что $\mathfrak{M} = \mu_2 \mathfrak{M}^*$, так как величина $\mathfrak{M}$ определена по полному полю B во второй среде (40.9), а $\mathfrak{M}^*$ — по полю H . В частном случае $\mu_1 = 1$ (полость)

$$H = B_1 = \frac{3B_0}{1 + 2\mu_2} \rightarrow \frac{3}{2} H_0 \text{ при } \mu_2 \gg 1.$$

Полученный в последней задаче результат можно применить для расчета экранирования от постоянного магнитного поля. Экранируемая область окружается, по возможности, со всех сторон каким-либо ферромагнетиком ($\mu \gg 1$). Молекулярные токи усиливают магнитное поле в толще ферромагнетика и ослабляют его снаружи, в том числе и во внутренней полости.

В качестве простейшего примера рассмотрим очень толстый сферический экран ($b \ll a$, рис. V.4). При этом условии можно вначале пренебречь влиянием внутренней полости. Используя решение задачи 2, найдем поле внутри экрана $B_1 = 3\mu H_0/(\mu + 2)$.

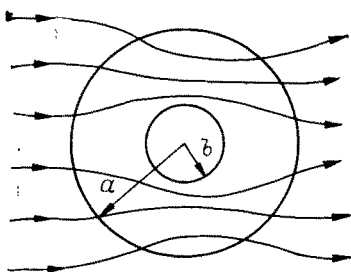


Рис. V.4. Магнитное экранирование.

Далее, можно снова использовать то же самое решение для полости радиуса b в однородном поле B_0 . Получаем

$$H_2 \approx B_1 \frac{3}{1+2\mu} = H_0 \frac{9\mu}{(\mu+2)(1+2\mu)}.$$

При $\mu \gg 1$ достигается весьма большой коэффициент экранирования: $k = H_0/H_2 \approx 2\mu/9$. Более выгодными, однако, оказываются многослойные экраны. Точный расчет их является очень громоздким. Вместо этого обычно применяется приближенный метод магнитных цепей.

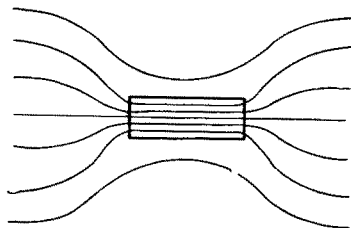
§ 41. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

Поместим в однородное магнитное поле длинный ферромагнитный стержень с $\mu \gg 1$ (рис. V.5). Тогда магнитный поток будет проходить в основном по стержню. Действительно, граничное условие $H_t = \text{const}$ на боковой поверхности стержня показывает, что полное магнитное поле B внутри стержня в μ раз больше, чем снаружи. Отсюда возникает аналогия с электрическим током, который течет только внутри проводников. Соответственно, длинный ферромагнетик называется часто магнитопроводом. Разумеется, эта аналогия является чисто формальной. Тем не менее она может быть выражена количественно. Основой точного описания магнитного потока как некоторого «тока» является закон сохранения циркуляции вектора H (33.3):

$$\oint (H_t dl) = \frac{4\pi}{c} I_s, \quad (41.1)$$

который можно сравнить с выражением для ЭДС: $\mathcal{E} = \oint (E + E_{\text{стр}}) dl$. Вектор H оказывается, таким образом, аналогичным пол-

Рис. V.5. Ферромагнитный стержень в однородном магнитном поле.



ному полю (включая стороннее), определяющему плотность тока: $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стр}})$. В магнитном поле роль плотности тока играет индукция $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, нормальная компонента которой сохраняется при переходе через границу двух сред, как это имеет место и для плотности тока. Магнитная проницаемость, следовательно, аналогична электрической проводимости.

В случае длинных и тонких магнитопроводов уравнение для магнитного потока можно написать в более привычной «электротехнической» форме. Рассмотрим замкнутый неразветвленный магнитопровод и будем считать магнитное поле постоянным по его поперечному сечению. Тогда $H = \Phi/\mu S$ и уравнение (41.1) принимает следующий вид:

$$\frac{4\pi I}{c} = \Phi R_{\mu}, \quad R_{\mu} = \oint \frac{dx}{\mu(x) S(x)}, \quad (41.2)$$

что в точности совпадает с «электрической» формулой (21.7). Величина R_{μ} называется *магнитным сопротивлением*.

Обратная величина

$$L = \frac{4\pi}{R_{\mu}} \quad (41.3)$$

характеризует магнитную проводимость цепи и называется индуктивностью электрического проводника, ток в котором возбуждает магнитное поле. Индуктивность характеризует ЭДС индукции, возникающую в этом проводнике при изменении тока (см. § 46).

Для расчета разветвления магнитных цепей можно использовать аналог законов Кирхгофа (см. § 24). Первый закон следует в конечном счете из уравнения $\text{div } \mathbf{B} = 0$. В отличие от электрического уравнения $\text{div } \mathbf{j} = 0$, справедливого только в стационарном случае, уравнение $\text{div } \mathbf{B} = 0$ справедливо всегда.

В практических расчетах обычно используется упрощенное правило:

$$\sum \Phi_i = 0, \quad (41.4)$$

где Φ_i — потоки в отдельных магнитопроводах, образующих узел. Приближенность соотношения (41.4) состоит в пренебрежении так называемыми потоками рассеяния вне магнитопроводов; иными словами, принимается, что магнитный поток идет только внутри магнитопроводов. Для магнитного потока это гораздо худшее приближение, чем для электрического тока. В последнем случае отношение проводимостей металла и изолятора, действительно, очень велико, так что практически всегда можно пренебречь утечками через изолятор. Для обычного магнитопровода $\mu \sim 10^3$, т. е. отличие от окружающей среды ($\mu \approx 1$) не столь велико. Нужно еще учесть, что поперечное сечение магнитопровода, как правило, много меньше поперечного сечения рассеянного потока. Поэтому сопротивление рассеяния может оказаться сравнимым с сопротивлением магнитопровода, и в точных расчетах его необходимо учитывать. Магнитная цепь похожа в этом отношении на голый электрический

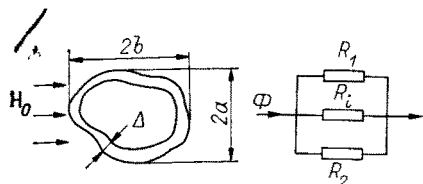


Рис. V.6. Цилиндрический магнитный экран и его эквивалентная схема.

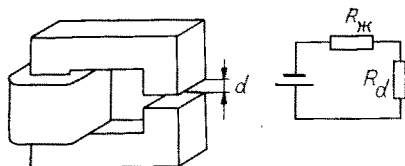


Рис. V.7. Электромагнит с узким зазором и его эквивалентная схема.

проводник, помещенный в плохо проводящую среду, например закопанный в землю. С другой стороны, и для магнитопровода существует экзотический «изолятор» — сверхпроводник, магнитное поле внутри которого всегда равно нулю (см. § 54). Если магнитное поле переменное, причем его частота достаточно велика, то «магнитным изолятором» может служить любой хороший проводник. Магнитное поле не проникает в него из-за так называемого скин-эффекта (см. § 87).

Второй закон Кирхгофа для магнитного потока вытекает из основного уравнения магнитных цепей (41.2).

Метод магнитных цепей позволяет, в частности, оценивать действие магнитных экранов сложной формы (см., например, рис. V.6). Эквивалентная схема магнитной цепи такого экрана показана на этом же рисунке. Здесь R_1 , R_2 — сопротивления двух половинок цилиндрического экрана, по которым растекается магнитный поток Φ , а R_i — сопротивление рассеяния внутри экрана. Для указанных размеров экрана $R_1 \sim R_2 \sim 4b/\mu\Delta$ (на единицу длины экрана в направлении, перпендикулярном рисунку); $R_i \sim b/a \sim 1$. Мы считаем для простоты, что $a \sim b$. Отсюда

$$\Phi_i = \frac{\Phi}{R_i} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_i} \right)^{-1} \sim \frac{4b}{\mu\Delta} \Phi,$$

где принято, что μ достаточно велико ($\mu \gg 2b/\Delta$). Поток Φ (на единицу длины) можно приближенно оценить как $\Phi \sim 2aH_0$. С другой стороны, $\Phi_i \sim 2aH_i$, откуда коэффициент экранирования $k = H_0/H_i \sim \mu\Delta/4b$. Для толстого экрана ($\Delta \sim b$) получается чересчур хорошее согласие с точной формулой (см. § 40): $k = 2\mu/9$, особенно если учесть, что последняя относится к сферическому экрану. Для кругового цилиндра радиуса b точное решение дает $k = \mu\Delta/2b$.

Задача 1. Найти поле электромагнита с узким зазором (рис. V.7).

Предположим, что можно пренебречь потоками рассеяния (см. задачу 2). Тогда из эквивалентной схемы получаем

$$\Phi = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{NI}{R_{\text{ж}} + R_d},$$

где $R_d \approx d/S$, $R_{\text{ж}} = L_{\text{ж}}/\mu S_{\text{ж}}$, $L_{\text{ж}}$, $S_{\text{ж}}$ — периметр и сечение магнитопровода (железа). Окончательно имеем

$$H_d \approx \frac{4\pi}{c} \frac{NI}{L_{\text{ж}}S} \approx \frac{4\pi NI}{cd}.$$

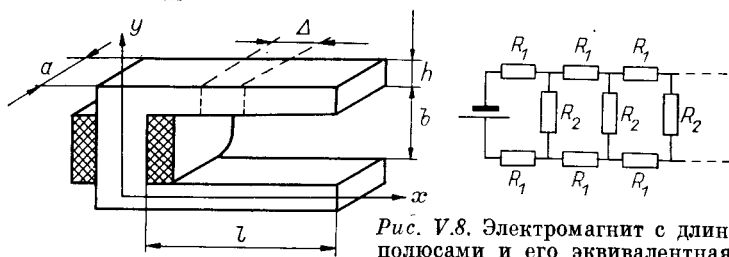


Рис. V.8. Электромагнит с длинными полюсами и его эквивалентная схема.

Последнее приближение соответствует обычной ситуации, когда можно пренебречь магнитным сопротивлением железа. Таким образом, электромагниты позволяют получать в небольших зазорах сильные поля, ограниченные только насыщением железа (см. § 42).

Задача 2. Найти рассеянное магнитное поле в зазоре электромагнита с очень длинными полюсами (рис. V.8, $b \ll l, a$).

Разбивая условно полюса и зазор на отдельные участки длины Δ , получим эквивалентную схему, изображенную на том же рисунке. Здесь $R_1 \approx \Delta/\mu ha$ — сопротивление участка полюса, а $R_2 \approx d/\mu a \Delta$ — сопротивление воздушного зазора, соответствующего этому участку. Будем считать длину отдельного участка Δ достаточно малой, поскольку рассеянное поле распределено непрерывно. Последнее мы будем считать однородным по y , что справедливо для достаточно узкого зазора. Законы Кирхгофа дают ($\Delta = dx$):

$$d\Phi = -H(x) adx; \quad d(H(x)b) = -2\Phi(x) R_1 = -2\Phi(x) \frac{dx}{\mu ah}.$$

Первое уравнение выражает уменьшение потока вдоль полюсов за счет потока рассеяния. Второе дает падение «магнитного напряжения» (Hb) на «сопротивлениях» R_1 . Дифференцируя второе уравнение по x и подставляя в него первое, получим:

$$\frac{d^2 H(x)}{dx^2} = \frac{2}{\mu b h} H(x).$$

Считая полюса достаточно длинными, возьмем только убывающее решение этого уравнения:

$$H(x) = H_0 e^{-kx}, \quad k^2 = \frac{2}{\mu b h}.$$

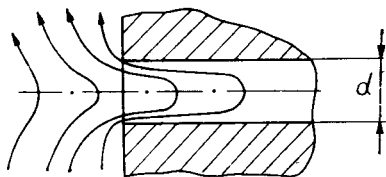
Поле H_0 найдем, пренебрегая магнитным сопротивлением железа внутри обмотки:

$$H_0 = \frac{\pi N I}{cb}.$$

Задача 3. Оценить провисание магнитного поля в узкую длинную щель, ограниченную сверхпроводником.

Так как магнитное поле не проникает в сверхпроводник (см. § 54), картина силовых линий (рис. V.9) качественно такая же, как и в задаче 2. Поэтому для оценки можно использовать решение этой задачи, положив $\mu = 1$, $b = h = d/2$. Отсюда $k = 2\sqrt{2}/d$, т. е. поле затухает в щели на расстоянии $\sim d/3$. Точное решение дает $k = \pi/d$.

Рис. V.9. Провисание магнитного поля в щель, ограниченную сверхпроводником.



Ферромагнетиками являются, например, железо (сталь), никель, кобальт, некоторые редкоземельные элементы и их сплавы. Вследствие специфических квантовых эффектов электростатическое взаимодействие электронов соседних атомов зависит от направления спинов электронов таким образом, что для некоторых веществ (ферромагнетиков) оно ориентирует все спины параллельно друг другу. В результате возникает спонтанное (самопроизвольное, т. е. без внешнего магнитного поля) намагничение вещества. Правда, в отсутствие внешнего поля размер области, в которой намагничение имеет определенное направление, довольно мал ($\sim 10^{-2}$ мм). Области эти называются доменами. Соседние домены намагничены, как правило, в противоположных направлениях. Это связано с тем, что магнитные силовые линии одного домена замыкаются через соседние. Таким образом, в отсутствие внешнего поля макроскопический образец ферромагнетика, содержащий большое число доменов, практически не намагничен.

Во внешнем поле домены перемагничиваются в направлении поля, так что в конце концов весь образец намагничивается в одном направлении. Оказывается, что для этого нужны, как правило, сравнительно небольшие внешние поля ($H \sim 1$ Гс, табл. 2)*. Так как при этом полное поле внутри ферромагнетика $B \sim 10^4$ Гс, то эффективное $\mu \sim 10^4$. В действительности, последняя величина является весьма условной, так как зависимость $B(H)$ не только сильно нелинейна, но и неоднозначна (зависит от предыстории процесса намагничения). Явление это носит название гистерезиса. Он характеризуется так называемой петлей гистерезиса (рис. V.10). Если в начальный момент намагничение полностью отсутствует ($B = 0$, точка 1), то при увеличении внешнего поля процесс намагничения будет характеризоваться некоторой кривой (1—2), правый край которой выходит практически на плато, называемое насыщением, когда вектор намагничения принимает максимально возможное значение:

$$M_s = m_s n. \quad (42.1)$$

Здесь m_s — спиновый магнитный момент электрона, а n — плотность электронов, участвующих в создании спонтанной намагниченности. Полное магнитное поле

$$B = H + 4\pi M_s \approx 4\pi M_s = B_s. \quad (42.2)$$

Небольшим ростом B за счет H в области насыщения можно обычно пренебречь и считать, что $B \approx B_s$.

Если теперь уменьшать внешнее поле, то процесс размагничивания будет описываться уже другой кривой (2—3), идущей выше

*) Напомним, что фактически намагничивающим полем является полное поле B , которое не мало. Приведенная выше фраза имеет поэтому тот смысл, что для намагничения ферромагнетика требуются малые токи, определяемые вспомогательным полем H .

Таблица 2.

Характеристики ферромагнетиков

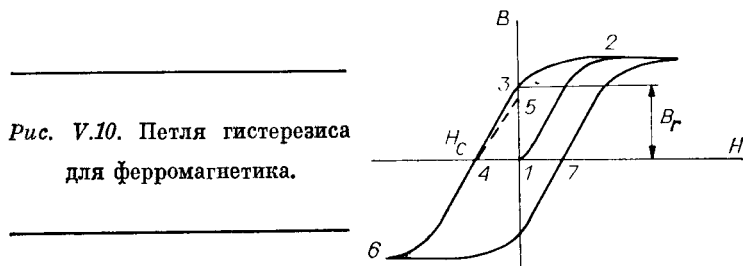
Ферромагнетики	H_c , Э	B_s , кГс	B_r , Гс	$\mu_{\max}$
«Мягкие»	0,1÷1	8÷20	10÷100	$10^4 \div 10^6$
«Жесткие»	500	20	10^4	$10^2 \div 10^4$

кривой намагничения. В частности, при полном выключении внешнего поля в ферромагнетике сохраняется некоторая остаточная индукция B_r (точка 3). Это остаточное намагничение причиняет немало хлопот конструкторам электромагнитов, особенно когда речь идет о точных приборах. По этой же причине попавшие в магнитное поле часы начинают сильно «врать» вследствие остаточного намагничения стальных деталей.

Чтобы полностью размагнитить ферромагнетик, нужно наложить некоторое обратное поле (точка 4). Величина его называется коэрцитивной силой (H_c). Если теперь выключить внешнее поле, то ферромагнетик снова намагнитится почти до B_r (точка 5), так что испорченные в магнитном поле часы не так-то просто размагнитить (см. ниже). Если же увеличивать обратное поле дальше точки 4, то мы снова попадем в область насыщения другого знака. Обратная кривая (6—7—2) расположена симметрично кривой (2—4—6).

Неполное размагничение при уменьшении внешнего поля связано со своего рода «трением» соседних доменов. Поэтому при обходе петли гистерезиса энергия магнитного поля частично переходит в тепло. Тепловые потери оказываются пропорциональными площади петли гистерезиса (см. § 46). Так как остаточное намагничение связано с трением, его можно убрать резким ударом — прием, который не очень-то подходит для часов, ускорителей и других точных приборов. Вместо этого размагничение производится обычно в переменном поле, амплитуда которого медленно уменьшается до нуля. Петля гистерезиса при этом стягивается в точку 1.

В табл. 2 приведены основные характеристики ферромагнитных материалов. Величина μ в таблице определяется как $\mu = dB/dH$ для ветви намагничения (1—2). На рис. V.10 видно, что это μ проходит через максимум, величина которого и представлена



в таблице. Максимум μ обычно достигается в сравнительно слабых полях ($B \sim 10^3$ Гс).

«Жесткие» ферромагнетики используются для изготовления постоянных магнитов (см. § 43), в то время как «мягкие» материалы применяются в тех случаях, когда нужно избежать остаточных полей, но использовать большое значение μ .

При нагревании ферромагнетика спонтанное намагничение B , ослабляется и выше некоторой температуры исчезает совсем — ферромагнетик превращается в парамагнетик. Температура этого перехода (фазовый переход второго рода) называется точкой Кюри в честь французского физика Пьера Кюри, который впоследствии прославился своими работами по радиоактивности. Любопытно отметить, что «эффект Кюри» открыл еще 300 лет назад Вильямс Гильберт, лейб-медик английской королевы Елизаветы, известный своими исследованиями по магнетизму. Разрушение ферромагнетизма при нагревании объясняется тем, что энергия теплового движения (температура) сравнивается с энергией электростатического взаимодействия «ферромагнитных» электронов.

Отметим, что специфическое взаимодействие электронов, приводящее к спонтанному намагничению вещества, имеет ту же природу, что и так называемые «химические силы» (ковалентные). Основное отличие связано с тем, что для большинства веществ последнее взаимодействие ориентирует спины соседних электронов противоположно друг другу; это приводит к определенной структуре молекул. В ферромагнетиках же спины ориентируются параллельно, вызывая спонтанное намагничение макроскопических областей. Поскольку тип ориентации спинов (например, параллельно или антипараллельно) чувствителен к структуре вещества [5], одни сплавы, содержащие железо или никель, обладают очень сильным ферромагнетизмом, тогда как другие остаются парамагнитными вплоть до самых низких температур. К последним относятся, например, некоторые виды нержавеющей стали. Интересно отметить, что в деформированном состоянии (при растяжении) эта сталь может стать ферромагнетиком.

Ферромагнитными свойствами могут обладать не только металлы, но и изоляторы, например, некоторые окислы железа, никеля и марганца. Эти вещества называются ферритами. Их удельное сопротивление меняется в широком диапазоне ($10-10^7$ Ом·см, тогда как, например, для стали оно около 10^{-5} Ом·м). Ферриты играют важную роль в радиотехнике из-за отсутствия в них скин-эффекта (см. § 87). Индукция насыщения ферритов заметно меньше, чем для стали ($1-3$ кГс, типичное $\mu \sim 10^3$).

Явление, аналогичное по своей природе ферромагнетизму, имеет место и в диэлектриках, оно так и называется — *ферроэлектричество* или *сегнетоэлектричество*. Последний термин связан с тем, что явление было обнаружено впервые для сегнетовой соли. Сегнетоэлектрики также характеризуются большим $\epsilon \sim 10^2 \div 10^4$ и нелинейной зависимостью $D(E)$ типа петли гистерезиса. Спонтанная поляризация сегнетоэлектриков объясняется тем, что дипольный момент их молекул направлен вдоль электронного спина.

Остаточное намагничение ферромагнетиков позволяет создавать так называемые постоянные магниты, т. е. получать магнитное поле без внешнего тока за счет молекулярных токов, точнее, за счет специфического квантового «вращения» электронов, ответственного за их спиновый магнитный момент (см. § 36). Остаточное намагничение железной руды и было первым примером магнитных явлений, известным людям с незапамятных времен. Вследствие нелинейной зависимости $B(H)$ расчет постоянных магнитов достаточно сложен. Рассмотрим несколько простейших примеров.

Пусть вначале все пространство заполнено однородным ферромагнетиком. В отсутствие внешних токов в однородной среде $H = 0$ и состояние ферромагнетика характеризуется точкой 3 на рис. V.10, т. е. полное магнитное поле равно остаточному: $B = B_r$. Такая же картина будет, когда ферромагнетик — бесконечно длинный стержень, намагниченный вдоль оси.

В случае тонкой, но очень большой ферромагнитной пластинки (размеры $d \times l \times l$, $d \ll l$), намагниченной в поперечном направлении, поле вне ферромагнетика отсутствует. Действительно, внутри него поле конечно, а снаружи — однородно (бесконечная протяженность пластинки), внешние токи отсутствуют, значит, $\oint (H, dl) = 0$. Выбрав в качестве пути интегрирования прямую, совпадающую с силовой линией, получим, что поля H вне и внутри пластинки относятся как $d/l \ll 1$. Отсюда из непрерывности B_n следует, что поле B внутри пластинки пренебрежимо мало, а вспомогательное поле H отрицательно: $H = B - 4\pi M \approx -4\pi M = -H_c$, т. е. оно направлено против направления намагниченности пластинки M и равно по величине коэрцитивной силе (точка 4 на рис. V.10).

Не следует удивляться, что поле $H \neq 0$, несмотря на отсутствие внешних токов. Это является следствием неоднородности среды.

Полученный результат ($B = 0$) можно пояснить с помощью наглядной картины намагничения среды, показанной на рис. V.1. Как ясно из этого рисунка, полная система молекулярных токов эквивалентна обтекающему току на границе среды. Для бесконечной пластинки этот ток лежит на бесконечности, и соответственно его магнитное поле равно нулю. Если же мы обратимся к предыдущему примеру (продольно намагниченный стержень), то здесь система молекулярных токов эквивалентна длинному соленоиду, так что $B = B_r$.

Попробуем провести расчет для более реального случая намагниченного стержня конечной длины. Для упрощения задачи свернем его в кольцо с зазором d (рис. V.11), настолько узким, чтобы поле в нем H_d можно было принять однородным ($d \ll D$). Кроме того, мы пренебрежем потоками рассеяния вне кольца. Тогда поле внутри кольца также можно считать однородным. Условие

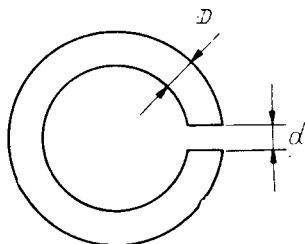


Рис. V.11. Постоянный С-образный магнит.

отсутствия внешних токов ($\oint (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = 0$) дает $H_d d + H_L L = 0$, где L — длина стержня. В комбинации с граничным условием $H_d = B_L$ получим $H_L = -B_L d/L$, т. е. вспомогательное поле H направлено против полного поля B . Таким образом, состояние ферромагнетика в этом случае характеризуется участком (3—4) петли гистерезиса (см. рис. V.10). Примем для простоты, что этот участок можно представить линейной зависимостью:

$$B = B_r \left(1 + \frac{H}{H_c} \right), \quad (43.1)$$

где коэрцитивная сила H_c всегда считается положительной. В результате найдем

$$B_L = H_d = \frac{B_r}{1 + \frac{H_c L}{B_r d}}. \quad (43.2)$$

Для достаточно узкого зазора $d \ll H_c L/B_r$ поле в стержне стремится к остаточному: $B_L \rightarrow B_r$. Если же зазор широкий ($d \gg H_c L/B_r$), то B_L определяется коэрцитивной силой:

$$B_L \approx H_c \frac{L}{d} \ll B_r. \quad (43.3)$$

Поучительно сравнить этот результат с задачей 1 в § 41, где рассмотрен кольцевой электромагнит с зазором. Прежде всего ясно, что в последней задаче не учитывалось намагничение, так как в отсутствие тока $H_d = 0$. Далее, оба выражения для H очень похожи друг на друга, причем роль μ для постоянного магнита играет величина B_r/H_c , а «ампер-витки» молекулярных токов связаны с остаточным полем: $(NI)_\mu \approx B_r d c / 4\pi$.

Рассмотренная задача дает возможность оценить поле прямого стержня конечной длины L . В последнем случае при вычислении циркуляции H положим $\oint (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) \approx B_L D + H_L L$, где $D \ll L$ — диаметр стержня. Это связано с тем, что поле вне стержня уменьшается в несколько раз на расстоянии порядка D от его торца. Таким образом, рассматриваемая задача эквивалентна предыдущей с $d \sim D$. В частности, стержень можно считать бесконечным, если $L \gg B_r D / H_c$.

Задача 1. Найти поле шарообразного постоянного магнита.

Воспользуемся решением задачи 2 (см. § 40) о возмущении однородного магнитного поля сферическим магнетиком. Отличие от рассматриваемой задачи состоит в том, что, во-первых, нет внешнего однородного поля и, во-вторых, связь B и H внутри магнита определяется петлей гистерезиса, участок которой мы будем по-прежнему аппроксимировать линейным выражением (43.1). Вектор-потенциал поля можно, следовательно, записать в виде (см. 40.8)

$$A(r, \theta) = \begin{cases} \frac{Br \sin \theta}{2}, & r \leq a, \\ \frac{m \sin \theta}{r^2}, & r \geq a, \end{cases} \quad (43.4)$$

где a — радиус магнита, B — поле внутри магнита, а m — его магнитный момент. Последний можно выразить через поля внутри магнита:

$$m = \frac{4\pi a^3}{3} \left(\frac{B - H}{4\pi} \right) = \frac{(B - H) a^3}{3}. \quad (43.5)$$

Для определения полей B и H нам нужно два уравнения. Одно из них — (43.1), другое получим из условия непрерывности вектор-потенциала на границе или, что то же самое, $B_r = \text{const}$, $Ba/2 = m/a^2 = (B - H)a/3$, откуда

$$H = -B/2. \quad (43.6)$$

Проверим, действительно ли второе граничное условие ($H_\theta = \text{const}$) не противоречит этому результату:

$$\frac{m \sin \theta}{a^3} = H_\theta = -H \sin \theta, \quad (43.7)$$

что приводит к тому же соотношению (43.6).

В природе существуют гигантские магниты — планеты и звезды. Так, например, наша Земля представляет собой магнитный диполь с моментом $\mathcal{M} = 8,3 \cdot 10^{25}$ Гс · см². Направление этого диполя почти совпадает с осью вращения Земли (угол между ними составляет около 11°), что, несомненно, указывает на связь этих двух явлений. Максимальное поле на полюсах достигает 0,7 Гс; поле на экваторе около 0,4 Гс. Магнитное поле на поверхности ближайшей к нам звезды — Солнца — в несколько раз больше. Предполагается, что магнитное поле особых звезд — пульсаров — достигает гигантских значений $\sim 10^{12}$ Гс.

Какова же природа этих космических магнитов? По-видимому, все они являются электромагнитами, т. е. их поле создается макроскопическими токами, а не остаточной намагниченностью. Для последней поле пульсаров слишком велико, а Солнце слишком горячо. То же справедливо, вероятно, и для Земли, ядро которой считается находящимся в расплавленном состоянии. Таким образом, все эти магниты представляют собой гигантские «динамомашин», работающие каким-то образом за счет тепловой энергии. Естественно ожидать, что магнитное поле таких «динамомашин» не будет оставаться постоянным во времени. Так оно и оказалось в действительности, по крайней мере, для Земли. Существует любопытная возможность измерить магнитное поле Земли в далеком прошлом. Это можно сделать с помощью так называемого палеомагнетизма,

т. е. по остаточному намагничению окислов железа в лаве различных геологических слоев. При остывании, после прохождения через точку Кюри, лава «запоминает» магнитное поле, существовавшее в тот момент на Земле. После охлаждения коэрцитивная сила ферромагнитных окислов существенно возрастает, так что последующие изменения практически не влияют на намагниченность. Собирая образцы лавы различного геологического возраста, который определяется по концентрации некоторых радиоактивных изотопов, удалось проследить изменение магнитного поля Земли на протяжении последних 4 млн. лет [8]. Результат этих исследований оказался поразительным: магнитное поле Земли четыре раза меняло свое направление! Интересно, что магнитный момент Земли всегда был направлен по, либо против вектора ее угловой скорости, и не наблюдалось промежуточных ориентаций. Поворот поля происходит за очень короткое геологическое время — всего несколько тысяч лет. Таким образом, «земное динамо» работает довольно нестабильно.

Магнитными полями того же порядка, что и у Земли, обладают и некоторые другие планеты Солнечной системы, и само Солнце. Измерение геометрии этих полей, а точнее, ее отличия от поля магнитного диполя позволяет установить верхний предел массы фотона — аналогично тому, как это делается при проверке точности закона Кулона (см. (13.5), (13.6)). Наиболее точные результаты, полученные в 1978 г. на основе измерений поля Юпитера, проведенных с космического корабля «Пионер» (США), дали $\mu c^2 < 10^{-15}$ эВ.

§ 44. ПЛАЗМА КАК ДИАМАГНЕТИК

Ферромагнетики — вещества, существенно влияющие на магнитное поле ($\mu \gg 1$). Другим, противоположным, примером, может служить плотная плазма, которая является сильным диамагнетиком ($\mu \ll 1$).

Найдем магнитное поле в плазме, помещенной во внешнее магнитное поле H . Ограничимся простейшим случаем плоской границы плазмы, параллельной H . Проще всего воспользоваться условием механического равновесия (см. § 47) на границе плазмы:

$$\frac{H^2}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi} + nT, \quad (44.1)$$

где B — магнитное поле в плазме, nT — тепловое давление плазмы. Это соотношение можно рассматривать как зависимость $B(H)$ в плазме (рис. V.12), так

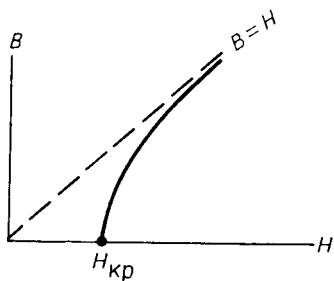


Рис. V.12. Зависимость магнитного поля B внутри плазмы от внешнего поля H .

как в силу граничных условий величина H сохраняется. Поскольку эта зависимость нелинейна, обычные соотношения для плотности энергии и давления в данном случае неприменимы. Более того, оказывается, что и «общее» соотношение (38.3) также неприменимо ($M = nW_{\perp}/B = nT/B$, см. задачу 1, § 34), так как помимо токов, связанных с намагничиванием плазмы, возникает еще дополнительный ток, обтекающий плазму, вызванный дрейфом заряженных частиц (см. § 57) в неоднородном магнитном поле на границе плазмы (Брейзман, 1985).

Из выражения (44.1) видно, что существуют два режима поведения плазмы в магнитном поле. Первый из них имеет место при $H > H_{\text{кр}} = \sqrt{8\pi nT}$, когда магнитное поле проникает в плазму, хотя и ослабляется ею. Второй соответствует $H = H_{\text{кр}}$, и поле внутри плазмы $B = 0$, т. е. плазма является идеальным диамагнетиком. При дальнейшем снижении внешнего поля $H < H_{\text{кр}}$ плазма будет расширяться, и ее давление будет падать до восстановления механического равновесия, так что при $H < H_{\text{кр}}$ стационарное состояние отсутствует. Во втором режиме ($H = H_{\text{кр}}$) магнитное поле проникает в плазму лишь на небольшую глубину. Заряженные частицы движутся в этом случае прямолинейно до самой границы плазмы, где они заворачиваются и отражаются в тонком переходном слое, куда еще проникает внешнее магнитное поле. Образующийся в результате поверхностный ток экранирует это поле. Оценим толщину переходного слоя d . Она должна быть порядка ларморовского радиуса электронов: $d \sim \rho c/eH$ (при той же плотности и температуре ионный ток значительно меньше электронного и поэтому в оценке им можно пренебречь). С другой стороны, ток в переходном слое должен экранировать внешнее магнитное поле $H \sim 4\pi envd/c$. Исключая H , найдем

$$d \sim c \sqrt{\frac{m}{4\pi ne^2}} \equiv \frac{c}{\omega_p}, \quad (44.2)$$

где ω_p — плазменная частота (см. (23.7)). Более формальный вывод этого соотношения может быть сделан следующим образом.

Рассмотрим уравнение движения электрона в электромагнитном поле:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \right) = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (44.3)$$

В стационарном случае $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$, а $\mathbf{E} = -\nabla \phi$. Преобразуя $(\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v} + \nabla v^2/2$, из (44.3) получим

$$m \mathbf{v} \times \left(\text{rot } \mathbf{v} + \frac{e\mathbf{B}}{mc} \right) = -\nabla \left(\frac{mv^2}{2} + e\phi \right). \quad (44.4)$$

Поскольку полная энергия отдельной частицы сохраняется, то $\text{rot } \mathbf{v} + e\mathbf{B}/mc = 0$, или

$$\text{rot } \mathbf{j} = -\frac{ne^2}{mc} \mathbf{B}, \quad (44.5)$$

где $\mathbf{j} = ne\mathbf{v}$ — плотность тока в плазме. Это уравнение было получено в 1935 г. братьями Лондонами в их классической теории сверхпроводимости. Вычисляя rot от обеих частей уравнения (38.2) $\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}/c$ и используя (44.5), найдем

$$\Delta \mathbf{B} = \left(\frac{\omega_p}{c} \right)^2 \mathbf{B}, \quad (44.6)$$

откуда в одномерном случае

$$B(z) = H e^{-\omega_p z/c}. \quad (44.7)$$

Выше мы полностью пренебрегли столкновениями частиц плазмы, считая ее идеально проводящей. В этом смысле она представляет собой наглядную

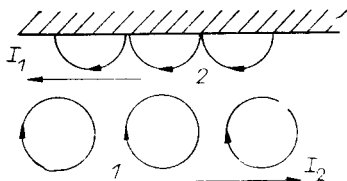


Рис. V.13. Разрушение диамагнетизма плазмы стенкой.

1 — свободные частицы; 2 — «пристеночные» частицы.

модель сверхпроводника. Эта модель показывает, в частности, что сверхпроводимость приводит к идеальному диамагнетизму (см. § 54). Разумеется, аналогия между плазмой и сверхпроводником весьма ограничена. Плазма всегда обладает некоторым конечным сопротивлением, вследствие которого все токи в ней в конце концов затухают, а вместе с ними исчезает и диамагнетизм. Оказывается, что в среде заряженных частиц, подчиняющихся классической механике, в состоянии термодинамического равновесия всегда $\mu = 1$, т. е. такая среда не обладает никакими магнитными свойствами. Эту общую теорему доказала в конце прошлого века Ван Леевен. Рис. V.13 поясняет механизм нейтрализации диамагнетизма плазмы в магнитном поле. Он вызван появлением обратного тока на границе плазмы за счет отражения частиц от стенки. Столкновение частиц со стенкой связано, в свою очередь, с их рассеянием вблизи стенки, т. е. с сопротивлением плазмы. Таким образом, компенсация тока в плазме вызывается ее конечным сопротивлением. Отметим, что этот механизм был вскрыт молодым Нильсом Бором и описан в его диссертации.

Законы квантовой механики допускают незатухающие токи, например внутриатомные электронные токи, которые можно рассматривать как своеобразную форму молекулярной сверхпроводимости. Они-то и ответственны за магнитные свойства вещества. Макроскопическая же сверхпроводимость приводит, как мы видели выше, к идеальному диамагнетизму.

Глава VI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

§ 45. ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Открытие Эрстеда и работы Ампера (см. § 28) показали, что существует глубокая связь между электрическими и магнитными явлениями. Однако эта связь представлялась вначале односторонней (электрический ток возбуждал магнитное поле), что всегда казалось странным одному из самых замечательных физиков мира — Фарадею. В течение 11 лет он совершенно сознательно искал обратное влияние магнитного поля на электрический ток и в 1831 г. открыл его в форме своего знаменитого закона электромагнитной индукции. Для возбуждения электрического тока в контуре необходимо изменять магнитный поток через этот контур, причем ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi}{dt}; \quad \Phi = \int_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S}). \quad (45.1)$$

Здесь Φ — магнитный поток, зависящий от величины полного поля в среде B .

Это явление природы сыграло забавную шутку с другим физиком — Колладоном, современником Фарадея. Желая провести свой опыт как можно чище, он поместил катушку с магнитом в одну комнату, а гальванометр, соединенный с катушкой, — в другую. Вставив магнит в катушку, он шел в другую комнату, чтобы посмотреть на показания гальванометра (!). Для великого открытия ему не хватило воображения или... лаборанта. Закон электромагнитной индукции был независимо открыт американским физиком Генри, однако он позднее опубликовал свои результаты.

Фарадей установил, что ЭДС индукции возбуждается при изменении потока в контуре любым способом. Можно, например, с равным успехом вдвигать магнит в катушку, создавая переменное магнитное поле, или же надевать катушку на магнит, т. е. перемещать контур в постоянном магнитном поле. Сегодня с точки зрения теории относительности это кажется очевидным. Возможен и более сложный случай, когда контур произвольно деформируется в переменном магнитном поле.

Рассмотрим механизм возбуждения ЭДС индукции. Пусть вначале магнитное поле постоянно, а контур деформируется. Возьмем простейший пример такого контура, изображенного на рис. VI.1, где в однородном магнитном поле движется один из проводников, образующих контур. Так как электроны движутся вместе с проводником со скоростью v , на них действует магнитная часть силы Лоренца $f_m = evB/c$, направленная вдоль проводника. Она-то и создает ЭДС: $\mathcal{E} = If_m/e = vBl/c$, т. е. является так называемой сторонней силой с точки зрения электрических цепей (см. § 24). Последнее выражение в точности совпадает с законом Фарадея (45.1), так как $\dot{\Phi} = Bvl$.

Но если ЭДС индукции создается в данном случае силой f_m , как может она совершать работу, ведь эта сила всегда направлена перпендикулярно скорости заряда? Рассмотрим этот вопрос подробнее. Мощность ЭДС равна $\mathcal{E}I$, т. е. пропорциональна силе тока в цепи. Но в таком случае на проводник действует сила $f_{\text{вн}} = IBl/c$, направленная против скорости v . Для простоты примем сопротивление цепи настолько большим, что можно пренебречь магнитным полем тока I по сравнению с внешним полем. Чтобы обеспечить движение проводника, необходимо приложить такую же внешнюю силу, которая будет развивать мощность $f_{\text{вн}}v = IBlv/c = \mathcal{E}I$, в точности равную мощности в электрической цепи. Таким образом, ра-

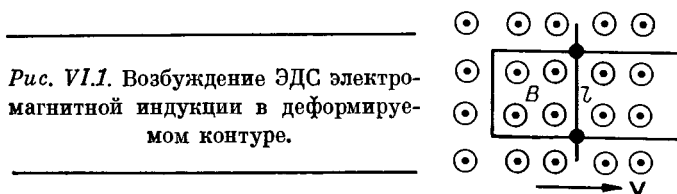


Рис. VI.1. Возбуждение ЭДС электромагнитной индукции в деформируемом контуре.

боту совершает внешняя сила, а магнитное поле, образно говоря, лишь «перекачивает» энергию из одной степени свободы в другую.

Задача. Показать, что закон Фарадея справедлив при произвольной деформации контура в постоянном магнитном поле.

Используя для ЭДС выражение $\mathcal{E} = \oint (\mathbf{f}_{\text{стр}}, d\mathbf{l})/e$ (см. § 24) и подставляя в качестве сторонней силы силу Лоренца $\mathbf{f}_{\text{стр}} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$, получим

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}, d\mathbf{l}) = -\frac{1}{c} \oint (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}, \mathbf{B}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi}{dt},$$

так как $d\mathbf{r} \times d\mathbf{l} = d\mathbf{S}$ — изменение площади контура при смещении участка проводника $d\mathbf{l}$ на $d\mathbf{r}$ и $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$.

Рассмотрим теперь другой случай возбуждения ЭДС индукции, когда контур остается неподвижным, а магнитное поле изменяется во времени. В этом случае ЭДС может возникать лишь за счет дополнительного электрического поля, связанного с переменным магнитным полем. По закону Фарадея

$$\mathcal{E} = \oint (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -\frac{1}{c} \oint \left(d\mathbf{S}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right), \quad (45.2)$$

где S — площадь, охватываемая контуром. Мы написали здесь частную производную, которая характеризует изменение магнитного поля в заданной точке пространства.

Используем теперь теорему Стокса (33.2).

$$\oint (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \int_S (\text{rot } \mathbf{E}, d\mathbf{S}) = -\frac{1}{c} \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, d\mathbf{S} \right). \quad (45.3)$$

Последнее равенство справедливо в силу закона Фарадея для любого контура и любого поля, поэтому

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (45.4)$$

В общем случае движения контура в переменном магнитном поле действуют оба рассмотренных выше механизма, так что ЭДС индукции определяется полным изменением потока через контур согласно (45.1).

Отметим, что оба механизма возбуждения ЭДС индукции не являются по теории относительности независимыми. Пусть, например, контур движется с постоянной скоростью в неоднородном стационарном магнитном поле. В этом случае «работает» первый механизм, т. е. магнитная часть силы Лоренца. Однако в системе отсчета, связанной с контуром, сила f_m равна нулю, и работает второй механизм, т. е. появляется вихревое электрическое поле, вызванное изменением магнитного поля в этой системе отсчета.

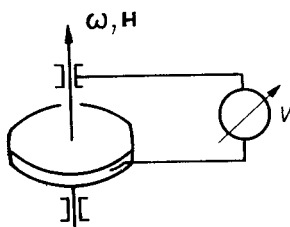


Рис. VI.2. Схема униполярного генератора.

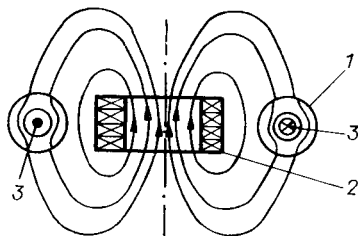


Рис. VI.3. Разделение с помощью ферритового экрана (1) переменного магнитного поля катушки (2) и вихревого электрического поля (3).

Понятие «полное изменение потока через контур» не всегда очевидно, а его применение требует известной «бдительности». В сложных случаях нужно анализировать конкретный механизм возбуждения ЭДС. Рассмотрим, например, так называемый униполярный генератор, схема которого изображена на рис. VI.2. Его существенной частью является массивный диск, вращающийся в магнитном поле, направленном параллельно оси вращения. Здесь трудно найти какое-либо изменение потока через контур. Тем не менее ЭДС возникает за счет силы, действующей в радиальном направлении на электроны, увлекаемые вращающимся диском:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \int_0^R \omega r B dr = \frac{\omega B R^2}{2c}. \quad (45.5)$$

В рассматриваемом случае закон Фарадея не выполняется буквально, так как он применим лишь к непрерывному контуру. Здесь же скользящий контакт все время производит как бы переключения с одного контура на другой.

Другое распространенное наглядное представление о механизме возбуждения ЭДС индукции — пересечение проводником магнитных силовых линий. Это представление также условно и не всегда позволяет объяснить физическую ситуацию. Так, в предыдущем примере еще можно говорить с некоторой натяжкой о пересечении проводником силовых линий. Бывают, однако, случаи, когда такое представление и совсем неприменимо. Простейшим примером может служить неподвижный заряд в переменном магнитном поле. Такой заряд вообще ничего не пересекает, но, тем не менее, на него действует вихревое электрическое поле. Более интересным примером является тороидальный магнитный экран 1 (рис. VI.3) (из феррита), практически не пропускающий внутрь себя магнитное поле катушки 2, но не ослабляющий вихревое электрическое поле 3. В такой системе силовые линии не проходят через внутреннюю полость экрана, а как бы перескакивают с его внутренней стороны на внешнюю, оставаясь, однако, непрерывными. Этот пример особенно наглядно показывает, что силовые линии имеют, вообще говоря, лишь геометрический, но не физический смысл. Они на-

глядно представляют конфигурацию магнитного поля, но не являются самостоятельной физической реальностью.

Уравнение (45.4) определяет дополнительное вихревое поле, создаваемое переменным магнитным полем. В отличие от электростатического вихревое поле непотенциально, так как $\oint (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \mathcal{E} \neq 0$. Поскольку оно создается не зарядами, а магнитным полем, то для него $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, т. е. его силовые линии замкнуты. Если система обладает какой-либо симметрией (например, аксиальной), то закон Фарадея (45.3) позволяет определить полную конфигурацию вихревого электрического поля (ср. § 33).

Вихревое электрическое поле можно выразить непосредственно через векторный потенциал, используя соотношение $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Подставляя его в (45.4) и меняя в правой части порядок дифференцирования по координатам и времени, получим $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{rot} \times \times \left(-\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$, откуда

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{g}, \quad (45.6)$$

где $\mathbf{g}$ — произвольная функция, ротор которой равен нулю. Естественно отождествить ее с электростатическим полем $-\nabla \varphi$. Таким образом, мы получаем выражение для полного электрического поля:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi. \quad (45.7)$$

Теперь мы можем подвергнуть оба потенциала $\mathbf{A}$, φ калибровочному преобразованию, не изменяющему напряженности полей $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$ (см. § 31):

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f(\mathbf{r}, t), \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (45.8)$$

Уравнение (45.4) дополняет уравнение для магнитного поля (39.5) $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ и показывает, что свободное электромагнитное поле (т. е. поле в вакууме и без токов) антисимметрично относительно замены $\mathbf{E} \rightleftharpoons \mathbf{H}$. Исторически закон Фарадея (45.4) был открыт значительно раньше (1831 г.), чем Максвелл «изобрел» свой ток смещения (1864 г.), чтобы симметризовать уравнения поля (уравнения Максвелла), которые в окончательном виде выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \rho, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (45.9)$$

Вместе с уравнениями движения частиц, образующих электрический ток, уравнения Максвелла полностью определяют все электромагнитные процессы.

§ 46. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ. ИНДУКТИВНОСТЬ

Закон Фарадея позволяет вычислить энергию магнитного поля. Действительно, при увеличении магнитного поля возникает ЭДС индукции, отбирающая энергию электрического тока, возбуждающего магнитное поле. Эта энергия и переходит в энергию магнитного поля.

Рассмотрим произвольный электрический контур с током. Очевидно, что магнитный поток через этот контур пропорционален току:

$$\Phi = \frac{LI}{c}. \quad (46.1)$$

Здесь c — скорость света (гауссова система единиц), а L — некоторый коэффициент пропорциональности, зависящий от геометрии контура; он называется *коэффициентом самоиндукции* или *индуктивностью* контура.

Рассмотрим процесс возбуждения магнитного поля в контуре без потерь и с неизменной геометрией ($L = \text{const}$). ЭДС индукции в таком контуре $\mathcal{E} = -\frac{L}{c^2} \cdot \frac{dI}{dt}$, а полная энергия, переданная в контур от генератора тока,

$$W = - \int \mathcal{E} I dt = \frac{LI^2}{2c^2} = \frac{\Phi^2}{2L}. \quad (46.2)$$

Это и есть энергия магнитного поля контура. Бросается в глаза сходство выражений (46.1), (46.2) с соответствующими механическими формулами, причем ток играет роль скорости, поток — импульса, а индуктивность — массы. Это сходство отнюдь не случайно, поскольку, например, ток действительно пропорционален скорости движения заряженных частиц. Более подробно эта аналогия будет рассмотрена в § 49.

В гауссовой системе поток измеряется в максвеллах (Мкс), а в СИ — в веберах (Вб): $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2 = 10^8 \text{ Мкс} = 10^8 \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$. Размерность индуктивности L в гауссовой системе можно найти из (46.1). Так как $\Phi \sim HS \sim SI/cl$, то L имеет размерность длины и измеряется в сантиметрах. В СИ индуктивность измеряется в генри (Гн), причем: $1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб/А} = 10^9 \text{ см}$.

Задача. Найти индуктивность коаксиального кабеля (рис. VI.4).

Магнитное поле в кабеле описывается выражением $B = 2\mu I/cr$. Магнитный поток внутри кабеля пропорционален его длине, поэтому вычислим поток и индуктивность на единицу длины (Φ_1, L_1):

$$\Phi_1 = \frac{2\mu I}{c} \int_r^R \frac{dr}{r} = \frac{2\mu I}{c} \ln \frac{R}{r},$$

откуда

$$L_1 = 2\mu \ln \frac{R}{r}. \quad (46.3)$$

Рассмотрим длинный соленоид, поле которого (см. задачу 2, § 33) $B = 4\pi\mu NI/cl$, где l — длина соленоида, а N — число его витков. Магнитный поток через соленоид равен $\Phi_0 = 4\pi\mu NIS/cl$. Однако ЭДС индукции в соленоиде в данном случае не равна $-\dot{\Phi}_0/c$, а в N раз больше. Это объясняется тем, что поток Φ_0 пересекает все N витков соленоида, наводя в каждом из них ЭДС $\mathcal{E}_0 = -\dot{\Phi}_0/c$, так что полная ЭДС $\mathcal{E} = N\mathcal{E}_0$. Величина $\Phi = N\Phi_0$ называется *потокосцеплением*, и именно им определяется индуктивность многовиткового контура по формуле (46.1). Таким образом, для соленоида

$$L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}. \quad (46.4)$$

Энергия магнитного поля в соленоиде (46.2)

$$W = \frac{LI^2}{2c^2} = \frac{\mu H^2}{8\pi} lS. \quad (46.5)$$

Так как магнитное поле в длинном соленоиде однородно, а lS равно объему соленоида, величину

$$w = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{BH}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi\mu} \quad (46.6)$$

можно интерпретировать как *плотность магнитной энергии*. В вакууме это есть действительно плотность энергии магнитного поля, в среде же в w входит также и энергия тепловых процессов. В результате оказывается, что при постоянной температуре величина w равна свободной энергии среды в магнитном поле (ср. § 17).

В случае нелинейной зависимости $B(H)$, например в ферромагнетике, изменение энергии магнитного поля можно записать в виде $dW = -I\mathcal{E}dt = Id\Phi/c$. Но $d\Phi$ связано с изменением полного поля в среде $d\mathbf{B}$, а I — с вспомогательным полем $\mathbf{H}$. Поэтому изменение плотности магнитной энергии можно записать в виде

$$dw = \frac{(\mathbf{H}, d\mathbf{B})}{4\pi}. \quad (46.7)$$

Это выражение позволяет вычислить, в частности, потери энергии на перемагничивание ферромагнетика. Для этого нужно проинтегрировать (46.7) по петле гистерезиса. Очевидно, что полная потеря энергии при обходе петли пропорциональна ее площади.

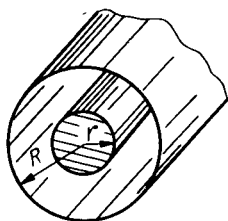


Рис. VI.4. Коаксиальный кабель.

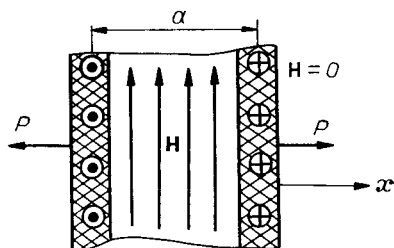


Рис. VI.5. Давление магнитного поля.

§ 47. ДАВЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Давление, как и все другие силы в магнитном поле, выражается в конечном счете через силу Лоренца, т. е. оно связано с действием магнитного поля на токи. Однако, как и в случае электрического поля, давление можно выразить непосредственно через напряженность поля.

В качестве простейшего примера рассмотрим давление магнитного поля на токовый слой, образующий одну из стенок соленоида прямоугольного сечения (рис. VI.5). Ясно, что это давление вызывается действием поля на ток. Легко проверить, что давление направлено наружу, т. е. в отличие от электрического магнитное поле действительно давит, а не «тянет». Другой знак давления вызван не различием между самими полями, а несимметрией их источников (отсутствием магнитного заряда). В результате электрическое поле «давит» (тянет) проводник вдоль силовых линий, а магнитное — поперек. Если же рассмотреть давление поля на границу среды с проницаемостями ϵ и μ , то оба поля могут как давить, так и тянуть.

Вычислим давление магнитного поля в рассматриваемом примере с помощью силы Лоренца. Объемная плотность силы

$$f(x) = \frac{1}{c} j(x) H(x), \quad (47.1)$$

где $j(x)$ — плотность тока в слое. Давление получается интегрированием (47.1) по x . Плотность тока исключим, используя уравнение $-\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} j$. В результате имеем

$$p = -\frac{1}{c} \int dx H(x) \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{H^2}{8\pi}. \quad (47.2)$$

Таким образом, как и для электрического поля, давление магнитного поля равно плотности его энергии.

Этот же результат можно получить и из энергетических соображений. Будем считать теперь, что соленоид заполнен средой с магнитной проницаемостью μ . Произведем виртуальное смещение токового слоя на δa , причем таким образом, чтобы полный поток внутри соленоида остался неизменным: $Ba = \text{const}$, т. е. $\delta B/B = -\delta a/a$. Последнее условие означает, что ЭДС индукции при виртуальном перемещении равна нулю и, следовательно, внешний генератор тока не совершает работы. В таком случае изменение энергии магнитного поля связано только с работой внешних сил, уравнивающих давление поля. Поэтому баланс энергии можно записать в виде (на единицу площади токового слоя)

$$dW = -p\delta a. \quad (47.3)$$

Изменение энергии поля

$$\delta W = \delta \left(\frac{a\mu H^2}{8\pi} \right) = -\frac{\mu H^2}{8\pi} \delta a. \quad (47.4)$$

В результате получим

$$p = \frac{BH}{8\pi}, \quad (47.5)$$

т. е. давление поля снова равно плотности энергии.

Следует однако отметить, что результат (47.5) получен в предположении постоянства μ . Это значит, в частности, что мы пренебрегаем деформацией среды; последняя изменила бы плотность среды, а значит, и μ . Поэтому полученный выше результат справедлив, фактически, лишь для жидкого магнетика. Выражение (47.5) также неприменимо в плазме (см. § 44). В твердых телах возникают дополнительные, так называемые магнитострикционные напряжения, аналогичные электрострикционным (см. § 19).

В заключение отметим, что энергетический метод вычисления сил является, как правило, наиболее эффективным, особенно при наличии среды, так как прямой подсчет сил Лоренца обычно весьма затруднен.

§ 48. СОХРАНЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОТОКА. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Рассмотрим замкнутый проводящий контур с током, обладающий сопротивлением R . Из законов Фарадея и Кирхгофа имеем $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}/c = RI$. В случае идеального проводника ($R = 0$) магнитный поток сквозь контур сохраняется:

$$\Phi = \text{const.} \quad (48.1)$$

Ясно, что это равенство будет справедливо и для идеального проводника произвольной формы. В случае конечного сопротивления ток в контуре убывает по закону

$$\Phi = \Phi_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{L}{c^2 R}, \quad (48.2)$$

где использовано соотношение $I = c\Phi/L$, а индуктивность проводника L принята постоянной. В сплошном куске проводника убывание потока можно оценить следующим образом. Пусть вначале проводник находился в постоянном внешнем поле (рис. VI.6, сплошные линии). При выключении внешнего источника поле внутри проводника сохраняется в течение некоторого времени, а силовые линии замыкаются снаружи проводника (рис. VI.6, штриховые ли-

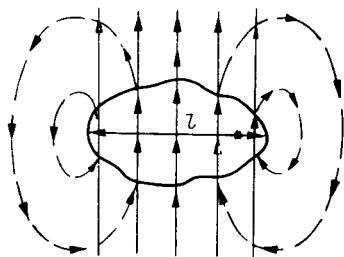


Рис. VI.6. «Вмороженное» поле.
Сплошные линии — начальное поле,
штриховые — поле после выключения
внешнего источника.

нии). Сопротивление контура можно оценить в данном случае как $R \sim l/\sigma l^2 = 1/\sigma l$, а индуктивность — $L \sim 4\pi\mu l^2/l = 4\pi\mu l$. Отсюда

$$\tau \sim \frac{4\pi\mu l^2}{c^2}. \quad (48.3)$$

Для медного проводника размером $l \sim 1$ м время затухания потока $\tau \sim 1$ мин. Таково же и время проникновения внешнего магнитного поля в массивный проводник.

Полученную оценку интересно применить к гигантскому проводнику — нашей Земле. Считается, что ядро Земли состоит из железа и никеля и нагрето до температуры в несколько тысяч градусов. Примем проводимость ядра $\sigma \sim 10^{16}$ (г), а $\mu = 1$ (выше точки Кюри). Тогда время сохранения магнитного поля в Земле $\tau \sim 10^6$ лет. Это слишком мало, чтобы можно было объяснить природу земного магнитного поля простым сохранением какой-то первоначальной намагниченности. К тому же земное поле испытывает сильные нерегулярные изменения (см. § 43). Отметим, что характерное время этих изменений как раз $\sim 10^6$ лет.

В сплошном проводнике сохраняется магнитный поток через любой контур внутри проводника. Это значит, что сохраняется само магнитное поле: $B = \text{const}$. Говорят, что силовые линии «вморожены» в проводник.

Если проводник деформируется (например, плазма), силовые линии остаются по-прежнему вмороженными, т. е. скрепленными с теми же самыми элементами проводника. Это значит, что они смещаются при деформации проводника, так что напряженность магнитного поля изменяется. Рассмотрим, например, длинный цилиндр, в котором возбужден циркулирующий ток (магнитное поле направлено по оси цилиндра и приблизительно однородно). Если теперь каким-то образом сжать цилиндр, магнитное поле будет возрастать обратно пропорционально площади цилиндра. При этом полная энергия магнитного поля будет возрастать по тому же закону: $W \propto SH^2 \propto S/S^2 = 1/S$. Увеличение энергии поля происходит за счет работы внешних сил, сжимающих цилиндр. Это один из методов получения сверхсильных магнитных полей (см. § 50). Интересно отметить, что такой процесс может автоматически происходить в турбулентной плазме (см., например, [9]). Это объясняется тем, что турбулентное движение локально неустойчиво, т. е. любой малый элемент объема плазмы быстро растягивается в одном направлении и сжимается в поперечных к данному направлениях (так как средняя плотность плазмы сохраняется).

Закон сохранения магнитного потока дает возможность наглядно пояснить так называемое *правило Ленца*, согласно которому токи, возбужденные ЭДС индукции, всегда направлены таким образом, чтобы уменьшить изменение магнитного потока через контур. В предельном случае нулевого сопротивления контура магнитный поток в нем вообще не изменяется. Фактически, правило Ленца связано с законом сохранения энергии, так как при обратном направлении индукционных токов они бы неограниченно возрастали.

Поучительной иллюстрацией действия правила Ленца служит пример витка с индуктивностью L , замкнутого на сопротивление R и помещенного в переменное (линейно нарастающее) магнитное поле. Согласно закону электромагнитной индукции можем написать:

$$-\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi}{dt} = RI, \quad \Phi = SH_0 + \frac{LI}{c}, \quad (48.4)$$

где Φ — полный магнитный поток через виток. Пусть, например, $H_0(t) = ht$. Тогда уравнение для тока принимает вид $I + I/\tau = A$, где $A = -hSc/L$, $\tau = L/Rc^2$ — константы. Это неоднородное уравнение заменой $I = I_1 + \tau A$ приводится к однородному уравнению, и окончательное решение имеет вид

$$I(t) = -\frac{hS}{cR} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (48.5)$$

при начальном условии $I(0) = 0$. Найдем теперь отношение скорости нарастания полного потока $\dot{\Phi}$ к скорости изменения внешнего потока hS :

$$\frac{\dot{\Phi}}{hS} = 1 - e^{-t/\tau}. \quad (48.6)$$

В начальный момент ($t \ll \tau$) это отношение примерно равно $t/\tau \ll 1$, т. е. собственное поле витка почти полностью компенсирует изменение внешнего потока. Однако с течением времени компенсация прекращается, т. е. правило Ленца перестает действовать. Это связано с тем, что ток в витке достигает стационарного значения.

С другим важным случаем сохранения магнитного потока мы встретимся при изучении движения заряженной частицы в неоднородном магнитном поле (см. § 57).

§ 49. ИНДУКТИВНОСТЬ И МАССА

Как уже упоминалось в § 46, выражения электродинамики

$$\Phi = \frac{LI}{c}; \quad W = \frac{LI^2}{2c^2} = \frac{\Phi^2}{2L} \quad (49.1)$$

похожи на формулы механики

$$p = mv; \quad W = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \quad (49.2)$$

Поскольку электрический ток пропорционален скорости движения зарядов, подобная аналогия не является формальной. По этой аналогии индуктивность эквивалентна некоторой механической массе. Возникает вопрос, что это за масса и почему в нее не входит действительная масса заряженных частиц (электронов), создающих ток? Для решения первого вопроса выделим в выражении для энергии тока (49.1) скорость частиц явным образом: $I = eN_1v$, где

N_1 — число электронов на единицу длины проводника. Тогда

$$W = \frac{e^2 N_1^2 L}{c^2} \cdot \frac{v^2}{2}, \quad (49.3)$$

и величина $e^2 N_1^2 L / c^2$ представляет собой какую-то массу движущихся электронов. Так как полное число электронов $N = l N_1$, где l — длина проводника, то, вводя индуктивность на единицу длины $L_1 = L/l$, получим для эффективной массы одного электрона

$$\frac{m_{\text{эф}}}{m_0} = \frac{e^2 N_1 L_1}{m_0 c^2} = r_e N_1 L_1, \quad (49.4)$$

где m_0 — масса электрона, а r_e — его «классический радиус». Для металлических проводников, даже самых тонких (~ 1 мкм), $N_1 \sim 10^{15}$ и $m_{\text{эф}}/m_0 \sim 10^3 \gg 1$ ($L_1 \sim 1$), т. е. обычной массой электрона можно полностью пренебречь. Наоборот, для свободных пучков электронов с током ≤ 10 А ($v \sim c$) величина $r_e N_1 \sim 10^{-3} \ll 1$, т. е. их инерционные свойства определяются обычной массой частиц m_0 . Только в последнее время были получены сверхмощные электронные пучки с током до 10^6 А (в виде коротких импульсов длительностью $\sim 10^{-8}$ с), для которых $m_{\text{эф}}/m_0 \sim 100$. Это значит, что их инерционные свойства определяются так же, как и для токов в проводниках, индуктивностью и практически не зависят от обычной массы частиц.

Какова же природа $m_{\text{эф}}$? Ясно, что для пучков заряженных частиц кроме массы отдельных частиц нужно учесть еще и массу электромагнитного поля пучка. В частности, массе покоя соответствует масса электрического поля пучка в сопровождающей системе. Рассмотрим это подробнее на примере тонкого трубчатого пучка радиуса r , движущегося вдоль оси металлической трубы радиуса $R \gg r$. Энергия электрического поля такого пучка на единицу длины $W_1 = e^2 N_1^2 \ln(R/r)$. Если считать, что масса этого поля $m_E = W_1/c^2$, то

$$m_E = \frac{e^2 N_1 \ln(R/r)}{c^2} = \frac{m_{\text{эф}}}{2}, \quad (49.5)$$

т. е. равно в два раза меньше $m_{\text{эф}}$, так как индуктивность коаксиала $L_1 = 2 \ln(R/r)$ (46.3).

Таким образом, качественно величина $m_{\text{эф}}$ может быть объяснена наличием массы у электромагнитного поля пучка, однако количественного соответствия не получается. Как мы увидим в § 118, некорректность такой простой интерпретации $m_{\text{эф}}$ связана с тем, что в общем случае нельзя отделить массу поля от массы частиц, создающих это поле.

В случае тока в проводнике механическая интерпретация индуктивности становится еще более сложной. Действительно, в этом случае заряд движущихся электронов практически полностью компенсирован зарядом неподвижных ионов, так что масса электриче-

ского поля тока $m_E \approx 0$. Тем не менее инерционные свойства тока ($m_{эф}$) полностью сохраняются.

Ситуацию в этом случае можно изложить и иначе. ЭДС индукции, характеризующая инерционные свойства тока, аналогична силе инерции в механике. Для пучков это есть (качественно) сила инерции со стороны массы электрического поля, которое ускоряется вместе с пучком. В случае же тока в проводнике сила инерции (ЭДС индукции) остается, несмотря на то, что соответствующая ей масса поля отсутствует!

§ 50. СВЕРХСИЛЬНЫЕ МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

Закон сохранения магнитного потока используется, в частности, для получения сверхсильных магнитных полей с напряженностью до 15 МГс. Такие поля представляют интерес прежде всего для исследования свойств вещества в необычных условиях, где можно ожидать открытия совершенно новых явлений. Кроме того, сверхсильные магнитные поля нужны в некоторых экзотических экспериментах с элементарными частицами (см. § 36). Разработаны также специальные импульсные ускорители одноразового действия, в которых используются такие поля.

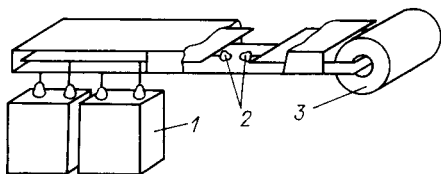
В чем же трудности создания мегагауссовых полей? Прежде всего необходимо обеспечить очень высокую механическую прочность обмоток с током. Действительно, при поле в 1 МГс магнитное давление достигает 40 тыс. бар. Для сравнения укажем, что разрушающее давление для меди составляет всего около 2500 бар, а для закаленной стали — около 10 тыс. бар. Поэтому установки с мегагауссовыми полями всегда одноразового действия — они просто взрываются.

Другая трудность связана с тем, что для питания таких установок необходимы огромные импульсные мощности. Так, энергия одного литра магнитного поля в 1 МГс равна 4 МДж, что эквивалентно энергии взрыва 1 кг тротила. Вследствие низкого КПД таких установок ($\eta \sim 1-10\%$) полная затрачиваемая энергия должна быть еще по крайней мере в 10 раз больше. Эту энергию необходимо «загнать» в магнитное поле за очень короткий промежуток времени $\sim 10^{-5}$ с, что соответствует импульсной мощности порядка десятка миллионов киловатт.

Простейший метод получения сверхсильных магнитных полей состоит в разряде конденсатора через катушку магнитного поля

Рис. VI.7. Схема эксперимента для получения сверхсильного магнитного поля «прямым» методом.

1 — конденсаторная батарея; 2 — «ключ»-разрядник; 3 — одновитковая катушка.



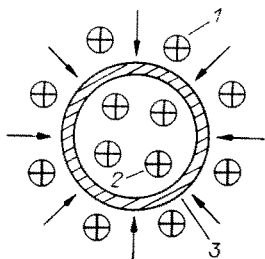


Рис. VI.8. Схема эксперимента для получения сильного магнитного поля методом сжимающегося проводящего цилиндра.

Стрелками показано направление внешнего давления. 1, 2 — направления магнитных полей; 3 — стенка.

(рис. VI.7). Из баланса энергии в контуре находим

$$\frac{CU^2}{2} = \frac{H^2 V}{8\pi\eta}, \quad (50.1)$$

где U — напряжение на конденсаторе емкости C ; V — эффективный объем магнитного поля; η — КПД установки. Таким способом удалось достичь полей до 3 МГц в объеме всего нескольких кубических сантиметров. Индуктивность катушки, создающей такое поле, ничтожно мала, и поэтому необходимо, чтобы емкость, питающая катушку, а также вся система токоподводов, обладали минимальной собственной индуктивностью. КПД таких установок в основном определяется тем, насколько удастся выполнить это условие.

Дальнейшее увеличение магнитного поля может быть достигнуто путем так называемого «обжатия» магнитного поля проводящими стенками. Можно, например, сжимать полый металлический цилиндр, помещенный в магнитное поле, параллельное его оси (рис. VI.8). В пренебрежении омическими потерями в стенках магнитное поле внутри цилиндра будет расти обратно пропорционально его площади. Обжатие можно производить внешним магнитным полем. На первый взгляд для этого нужно по крайней мере столь же сильное поле как и то, которое мы хотим получить внутри цилиндра. Существенный выигрыш получается при использовании кинетической энергии вещества цилиндра, которое при таких громадных давлениях ведет себя как жидкость. Если сначала относительно небольшим внешним полем разогнать стенки, то затем, двигаясь по инерции, они будут сжимать внутреннее магнитное поле до напряженности, значительно превышающей внешнюю.

Более эффективным является обжатие магнитного поля с помощью взрыва. Именно этим методом были получены поля напряженностью до 15 МГц (см. [10]).

§ 51. ВЗАИМОИНДУКЦИЯ

В сложной электрической цепи изменение тока в одном из проводников возбуждает ЭДС индукции не только в этом проводнике (самоиндукция), но и во всех других проводниках (взаимоиндукция). Магнитный поток через площадь, охватываемую i -м провод-

ником (точнее, потокоцепление, см. § 46),

$$\Phi_i = \frac{1}{c} L_{ik} I_k, \quad (51.1)$$

где величины L_{ik} ($i \neq k$) называются коэффициентами взаимной индукции i -го и k -го проводников, а L_{ii} — есть уже известные нам коэффициенты самоиндукции. Конечно, такая простая линейная связь между токами и потоками справедлива далеко не всегда. В частности, при наличии ферромагнитных сердечников соотношение (51.1) можно использовать лишь приближенно.

Найдем прежде всего магнитную энергию сложной цепи. Для этого вычислим ЭДС индукции в каждом из проводников, считая все коэффициенты взаимной индуктивности постоянными:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{1}{c^2} L_{ik} \dot{I}_k. \quad (51.2)$$

Полная мощность, потребляемая в цепи

$$P = -\mathcal{E}_i I_i = \frac{1}{c^2} L_{ik} I_i \dot{I}_k. \quad (51.3)$$

Для интегрирования этого выражения рассмотрим пару симметричных слагаемых $I_i L_{ik} \dot{I}_k + I_k L_{ki} \dot{I}_i$. Каждая такая сумма должна свертываться в полную производную, так как энергия магнитного поля не зависит от способа его получения, в частности от последовательности включения токов. Это возможно только в том случае, если коэффициенты L_{ik} удовлетворяют соотношению симметрии:

$$L_{ik} = L_{ki}. \quad (51.4)$$

Тогда $I_i L_{ik} \dot{I}_k + I_k L_{ki} \dot{I}_i = L_{ik} \frac{d}{dt} (I_i I_k)$, и интегрирование (51.3) дает

$$W = \int P dt = \frac{1}{2c^2} L_{ik} I_i I_k. \quad (51.5)$$

Появление множителя $(1/2)$ связано с тем, что суммирование в (51.5) производится по всем значениям i, k , так что каждая пара $I_i L_{ik} \dot{I}_k + I_k L_{ki} \dot{I}_i$ учитывается дважды. Что же касается диагональных членов, то они также дают при интегрировании множитель $(1/2)$.

Задача 1. Выразить коэффициент взаимной индукции двух катушек, намотанных на общем сердечнике, через их коэффициенты самоиндукции, пренебрегая полями рассеяния.

Если Φ_0 — поток в сердечнике, то потокоцепления в первой и второй катушках соответственно:

$$\Phi_1 = N_1 \Phi_0 = \frac{1}{c} (L_{11} I_1 + L_{12} I_2), \quad \Phi_2 = N_2 \Phi_0 = \frac{1}{c} (L_{21} I_1 + L_{22} I_2).$$

Полагая $I_2 = 0$, получим $L_{11}/L_{21} = N_1/N_2$, а в случае $I_1 = 0$ аналогично $L_{12}/L_{22} = N_1/N_2$. Откуда

$$L_{12}^2 = L_{11} L_{22}. \quad (51.6)$$

Выражение для энергии (51.5) удобно использовать для нахождения сил, действующих на проводники в магнитном поле. Поскольку энергия магнитного поля не зависит от способа его получения и, в частности, от изменения L_{ik} , мы можем пользоваться выражением (51.5), учтя в балансе энергий работу внешних сил, изменяющих L_{ik} . Пусть нас интересует сила F_q , действующая на один из проводников вдоль некоторой координаты q (необязательно декартовой). Рассмотрим виртуальное перемещение проводника на δq и запишем баланс энергии, считая токи постоянными:

$$-F_q \delta q + \delta A = \delta W|_I. \quad (51.7)$$

Здесь $\delta W|_I$ — изменение энергии магнитного поля при постоянных токах, а δA — работа источников тока. Изменение энергии поля δW связано с зависимостью коэффициентов L_{ik} от координаты q . Из (51.5) имеем $\delta W = I_i I_k \delta L_{ik} / 2c^2$. Работу источников тока найдем из выражения: $\delta A = I_i \delta \Phi_i / c = I_i I_k \delta L_{ik} / c = 2\delta W|_I$. В результате получим из (51.7)

$$F_q = \left. \frac{\partial W}{\partial q} \right|_I = \frac{1}{2c^2} I_i I_k \frac{\partial L_{ik}}{\partial q}. \quad (51.8)$$

Нам пришлось учитывать работу источников тока, так как выражение для энергии (51.5) задано через токи. Если бы оно было задано через магнитные потоки, то баланс энергии упростился бы:

$$-F_q \delta q = \delta W|_\Phi, \quad (51.9)$$

откуда для силы получаем формулу

$$F_q = - \left. \frac{\partial W}{\partial q} \right|_\Phi. \quad (51.10)$$

Сравним оба выражения для силы в простейшем случае одной индуктивности. Тогда $W = L(q) I^2 / 2c^2 = \Phi^2 / 2L(q)$, и $(\partial W / \partial q)_I = -(\partial W / \partial q)_\Phi$.

Задача 2. Найти натяжение круглого витка с током.

В качестве координаты выбираем длину витка $l = 2\pi R$. Индуктивность витка равна $L = 2l(\ln(4l/\pi r) - 7/4)$, где r — малый радиус витка. Сила натяжения равна

$$F_l = \frac{I^2}{2c^2} \cdot \frac{\partial L}{\partial l} = \frac{I^2}{c^2} \left(\ln \frac{4l}{\pi r} - \frac{3}{4} \right).$$

Задача 3. Используя соотношения (51.1), (51.2), получить формулу индуктивности длинного соленоида (46.4).

Принимая, что весь магнитный поток сосредоточен в сердечнике, и записывая выражение для потока через i -й виток от магнитного поля тока k -го витка $\Phi_{ik} = 4\pi I_k S / cl = L_{ik} I_k / c$, получим значение коэффициента взаимной индукции этих витков: $L_{ik} = 4\pi S / cl$. ЭДС самоиндукции соленоида, по которому протекает переменный ток,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} L_{ik} \dot{I}_k = \frac{4\pi N^2 S}{cl} \cdot \dot{I} = \frac{1}{c} L \dot{I},$$

откуда для L следует формула (46.4). Таким образом, для нахождения индуктивности многovitковой системы необходимо сложить коэффициенты взаимной индукции каждого витка с каждым. Введенное в § 46 потокоcсцепление есть простой способ учета этого обстоятельства.

Закон электромагнитной индукции позволяет рассчитывать электрические цепи с индуктивностями. Рассмотрим, например, простейшую цепь, включающую все три основных элемента — сопротивление, емкость и индуктивность (рис. VI.9). Сумма падений напряжения на сопротивлении IR и емкости Q/C равна сумме действующих в цепи ЭДС, т. е. внешней ЭДС $\mathcal{E}(t)$ и ЭДС индукции $-Li/c^2$:

$$\mathcal{E}(t) - \frac{Li}{c^2} = RI + \frac{Q}{C}. \quad (52.1)$$

Продифференцировав это выражение по времени, получим уравнение для тока

$$\ddot{I} + 2\gamma\dot{I} + \omega_0^2 I = \frac{c^2 \dot{\mathcal{E}}(t)}{L}, \quad (52.2)$$

где $\omega_0 = c/\sqrt{LC}$ — собственная частота контура без учета сопротивления, $\gamma = c^2 R/2L$ — коэффициент затухания.

Рассмотрим вначале простейший случай колебаний без затухания и внешней ЭДС ($\gamma = 0$, $\mathcal{E} = 0$). Тогда (52.2) сводится к уравнению гармонических колебаний, решение которого есть

$$I = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (52.3)$$

Оказывается, что решение таких уравнений более удобно представлять в комплексном виде. Например, вместо (52.3) можно написать

$$I = I_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi)} = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) + i I_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (52.4)$$

Это выражение также удовлетворяет уравнению (52.2) при $\gamma = 0$, $\mathcal{E} = 0$. Преимущество такой записи состоит в том, что вычисления с экспоненциальными функциями более просты, чем с гармоническими. В частности, при дифференцировании экспонента просто умножается на постоянный множитель. Физическое решение равно при этом действительной части комплексного решения:

$$I(t) = \text{Re}(I_0 e^{i\omega_0 t}), \quad (52.5)$$

где фаза φ отнесена к комплексной амплитуде $I_0 \rightarrow I_0 e^{i\varphi}$.

Применение комплексных величин проиллюстрируем на примере свободных колебаний в контуре с затуханием. Решение (52.2) при $\mathcal{E} = 0$ ищем в виде $I = I_0 e^{i\omega t}$, где ω — некоторая постоянная.

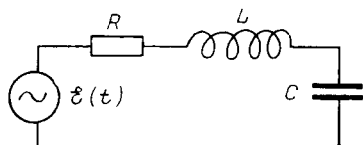


Рис. VI.9. Электрическая цепь, содержащая сопротивление, индуктивность и емкость.

Подставляя это решение в (52.2), получим алгебраическое уравнение для ω :

$$-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2 = 0, \quad (52.6)$$

решение которого дает искомую частоту колебаний:

$$\omega = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (52.7)$$

Мнимая часть частоты характеризует затухание колебаний, поскольку при подстановке в решение она дает действительную экспоненту:

$$I = I_1 e^{-\gamma t + i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} + I_2 e^{-\gamma t - i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t}. \quad (52.8)$$

Комплексные постоянные I_1, I_2 определяются начальными условиями. Вместо того чтобы брать действительную часть (52.8), можно наложить на I_1, I_2 дополнительное условие $I_1 = I_2^*$, что автоматически приводит к действительному выражению для тока (52.8): $I = 2|I_1|e^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \varphi)$, где $I_1 = |I_1|e^{i\varphi}$. С учетом условия $I_1 = I_2^*$ в решении (52.8) остается два произвольных параметра, которые определяются двумя начальными условиями ($I(0), \dot{I}(0)$).

Вернемся теперь к неоднородному уравнению (52.2). При произвольной функции $\mathcal{E}(t)$ его частное решение можно записать в виде интеграла

$$I(t) = \frac{c^2}{\omega L} \int_{t_1}^t \dot{\mathcal{E}}(\xi) e^{-\gamma(t-\xi)} \sin \omega(t-\xi) d\xi. \quad (52.9)$$

Справедливость формулы (52.9) легко проверить подстановкой. Для приложений важное значение имеет частный случай гармонической ЭДС: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\Omega t}$. Тогда частное решение (52.2) можно искать в виде $I = I_0 e^{i\Omega t}$ (вынужденные колебания контура). В отличие от свободных колебаний частота колебаний теперь известна, а амплитуда — нет. Ее можно найти подстановкой решения в уравнение

$$I_0 = \frac{i\Omega \mathcal{E}_0}{\omega_0^2 + 2i\Omega\gamma - \Omega^2} \cdot \frac{c^2}{L}. \quad (52.10)$$

В частном решении нет произвольных постоянных, и поэтому оно не удовлетворяет начальным условиям. Для получения общего решения нужно прибавить к частному — решение однородного уравнения, т. е. свободных колебаний. Зависимость $I_0(\Omega)$ имеет характерный вид резонансной кривой, ширина которой порядка $\Delta\Omega \sim \sim \omega_0/Q$, где величина $Q = \omega_0/2\gamma = \omega_0 L/c^2 R$ называется *добротностью контура*, поскольку она определяет скорость затухания его свободных колебаний (см. (52.8)).

В случае сложных электрических цепей получается система дифференциальных уравнений, которая решается аналогичным ме-

тодом. Вместо этого можно, однако, использовать более физический метод решения, введя понятие так называемых комплексных сопротивлений. Действительно, при использовании комплексных выражений для токов и напряжений отношение падения напряжения на индуктивности к току через нее есть некоторая комплексная постоянная $U_L = LI/c^2 = i\omega LI/c^2$, откуда

$$\frac{U_L}{I} \equiv R_L = \frac{i\omega L}{c^2}. \quad (52.11)$$

Величина R_L называется *индуктивным сопротивлением*. Аналогично для емкости $U_C = \int I dt/C = I/i\omega C$, и *емкостное сопротивление* равно

$$R_C = \frac{1}{i\omega C}. \quad (52.12)$$

В сложной цепи все эти сопротивления складываются по обычным правилам. Например, для цепи на рис. VI.9

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\frac{i\Omega L}{c^2} + R + \frac{1}{i\Omega C}}, \quad (52.13)$$

что в точности совпадает с (52.10).

Расчет сложных цепей с комплексными сопротивлениями производится на основе законов Кирхгофа (см. § 24).

§ 53. ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Закон электромагнитной индукции лежит в основе современной электротехники, а также радиотехники, которая, в свою очередь, составляет ядро современной индустрии, полностью преобразившей всю нашу цивилизацию. Практическое применение электромагнитной индукции началось только спустя полвека после ее открытия. В то время технический прогресс шел еще сравнительно медленно. Причина, по которой электротехника играет столь важную роль во всей нашей современной жизни, состоит в том, что электричество является наиболее удобной формой энергии и именно благодаря закону электромагнитной индукции. Последний позволяет легко получать электроэнергию из механической (генераторы), гибко распределять и транспортировать энергию (трансформаторы) и преобразовывать ее обратно в механическую (электромотор) и другие виды энергии, причем все это происходит с очень высоким КПД. Еще каких-нибудь 50 лет назад распределение энергии между станками на заводах осуществлялось через сложную систему валов и ременных передач — лес трансмиссий составлял характерную деталь индустриального «интерьера» того времени. Современные станки оборудованы компактными электродвигателями, питаемыми по системе скрытой электропроводки.

Современная индустрия использует единую систему электро-снабжения, охватывающую всю страну, а иногда и несколько со-седних стран.

Система электроснабжения начинается с генератора электро-энергии. Работа генератора основана на непосредственном исполь-зовании закона электромагнитной индукции. Схематически про-стейший генератор представляет собой неподвижный электромагнит (статор), в поле которого вращается катушка (ротор). Возбужда-емый в обмотке ротора переменный ток снимается с помощью спе-циальных подвижных контактов — щеток. Так как через подвиж-ные контакты трудно пропустить большую мощность, часто приме-няется обратенная схема генератора: вращающийся электромагнит возбуждает ток в неподвижных обмотках статора. Таким образом, генератор преобразует в электричество механическую энергию вра-щения ротора. Последний приводится в движение с помощью либо тепловой энергии (паровая или газовая турбина), либо механиче-ской (гидротурбина).

На другом конце системы энергоснабжения стоят различные исполнительные механизмы, использующие электроэнергию, важ-нейшим из которых является электродвигатель (электромотор). Наиболее распространен, благодаря своей простоте, так называемый асинхронный двигатель, изобретенный независимо в 1885—1887 гг. итальянским физиком Феррарисом и знаменитым хорватским инже-нером Тесла (США). Статор такого двигателя представляет собой сложный электромагнит, создающий вращающееся поле. Вращение поля достигается с помощью системы обмоток, токи в которых сдви-нуты по фазе. В простейшем случае достаточно взять суперпозицию двух полей в перпендикулярных направлениях, сдвинутых по фазе на 90° (рис. VI.10).

Такое поле можно записать в виде комплексного выражения:

$$\mathbf{H}(t) = H_0 \cos \omega t + i H_0 \sin \omega t = H_0 e^{i\omega t}, \quad (53.1)$$

которое представляет двумерный вектор постоянной длины, враща-ющийся против часовой стрелки с частотой ω . Хотя формула (53.1) похожа на комплексное представление переменного тока в § 52, ее физический смысл иной. В случае переменного тока реальное зна-чение имела только действительная часть комплексного выражения, здесь же комплексная величина представляет двумерный вектор, а ее фаза ωt не только является фазой колебаний компонент пере-менного поля, но и характеризует направление вектора поля (см. рис. VI.10).

В технике обычно используется несколько более сложная схема вращения поля с помощью так называемого трехфазного тока, т. е. трех токов, фазы которых сдвинуты на 120° друг относительно дру-га. Эти токи создают магнитное поле в трех направлениях, повер-нутых одно относительно другого на угол 120° (рис. VI.11). Отде-лит, что такой трехфазный ток автоматически получается в генера-торах с аналогичным расположением обмоток. Получивший широ-кое распространение в технике трехфазный ток был изобретен

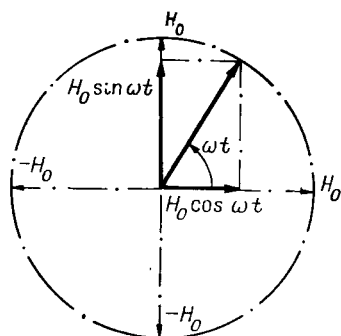


Рис. VI.10. Схема получения вращающегося магнитного поля.

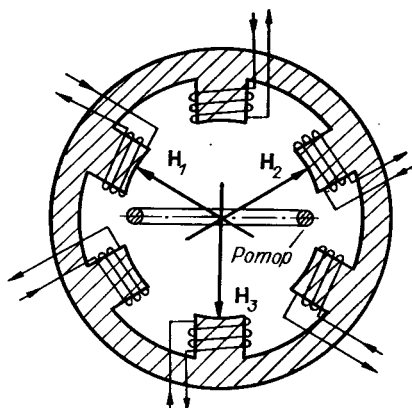


Рис. VI.11. Схема асинхронного двигателя.

Ротор для простоты показан в виде одного витка.

в 1888 г. выдающимся русским электротехником Доливо-Добровольским, который построил в Германии на этой основе первую в мире техническую линию электропередачи.

Обмотка ротора асинхронного двигателя состоит в простейшем случае из короткозамкнутых витков. Переменное магнитное поле наводит в витках такой ток, который приводит к вращению ротора в том же направлении, что и магнитное поле. В соответствии с правилом Ленца ротор стремится «догнать» вращающееся магнитное поле. Для нагруженного двигателя скорость вращения ротора всегда меньше, чем поля, так как в противном случае ЭДС индукции и ток в роторе обратились бы в нуль. Отсюда название — асинхронный двигатель.

Задача 1. Найти скорость вращения ротора асинхронного двигателя в зависимости от нагрузки.

Уравнение для тока в одном витке ротора имеет вид

$$\frac{L \dot{I}}{c^2} + RI = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} (H_0 S \cos \alpha) = \frac{\omega H_0 S}{c} \sin \alpha, \quad (53.2)$$

где ω — угловая скорость скольжения поля относительно ротора, $\alpha = \omega t + \theta$ характеризует ориентацию витка относительно поля, а θ — расположение витка в роторе (рис. VI.12, а). Переходя к комплексным величинам (см. § 52), получим решение (53.2)

$$I = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{i \omega H_0 S c e^{i\alpha}}{R c^2 + i \omega L} \right\} = \frac{\omega H_0 S c \sin(\omega t + \theta - \varphi)}{\sqrt{R^2 c^4 + \omega^2 L^2}}, \quad (53.3)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R c^2}.$$

Вращающий момент, действующий на виток в этом же магнитном поле,

$$N_1 = \frac{I S H_0 \sin \alpha}{c} = \frac{\omega H_0^2 S^2}{2 \sqrt{R^2 c^4 + \omega^2 L^2}} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + 2\theta - \varphi)]. \quad (53.4)$$

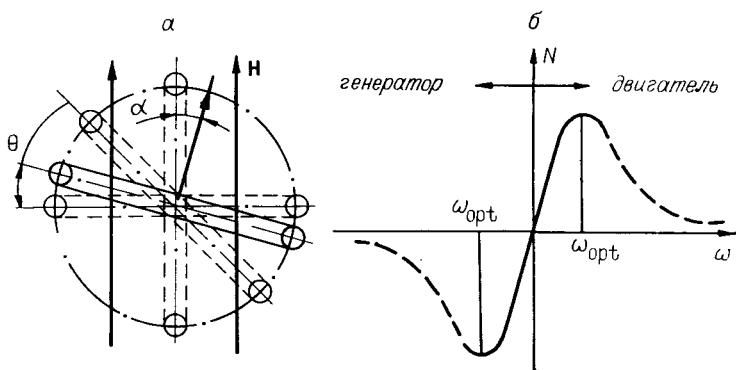


Рис. VI.12. К задаче об асинхронном двигателе.
а — виток обмотки ротора в «скользящем» поле; б — нагрузочная характеристика двигателя.

Обычно обмотка ротора содержит большое число равномерно расположенных витков, так что суммирование по θ можно заменить интегрированием, в результате получаем для полного момента на валу двигателя

$$N = \frac{Rc^2 H_0^2 S^2 n}{2} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 L^2 + R^2 c^4}, \quad (53.5)$$

где n — число витков ротора. График зависимости $N(\omega)$ изображен на рис. VI.12, б. Максимальный момент $N_{\max} = H_0^2 S^2 / 4L$ и соответствует частоте скольжения $\omega_{\text{opt}} = Rc^2 / L$. Отметим, что омическое сопротивление ротора влияет только на частоту скольжения, но не на максимальный момент двигателя. Отрицательная частота скольжения (ротор «обгоняет» поле) соответствует режиму генератора. Для поддержания такого режима необходимо затрачивать внешнюю энергию, которая преобразуется в электрическую в обмотках статора.

При заданном моменте частота скольжения неоднозначна, однако устойчивым является только режим $|\omega| < \omega_{\text{opt}}$.

Основной элемент систем преобразования и транспортировки электроэнергии — трансформатор, изменяющий напряжение переменного тока. Для дальнейшей передачи электроэнергии выгодно использовать максимально возможное напряжение, ограничиваемое только пробоем изоляции. В настоящее время действуют линии передачи с напряжением около 1 МВ. При заданной передаваемой мощности ток в линии обратно пропорционален напряжению, а потери в линии падают как квадрат напряжения. С другой стороны, для питания потребителей электроэнергии необходимы значительно меньшие напряжения, главным образом по соображениям простоты конструкции (изоляции), а также техники безопасности. Отсюда необходимость трансформации напряжения.

Обычно трансформатор состоит из двух обмоток на общем железном сердечнике (рис. VI.13). Железный сердечник необходим в трансформаторе для уменьшения потока рассеяния и, следовательно, лучшего потокоцепления между обмотками. Так как железо является одновременно и проводником, оно пропускает переменное маг-

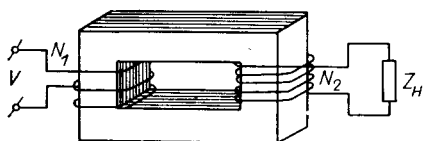


Рис. VI.13. Схема трансформатора переменного тока.

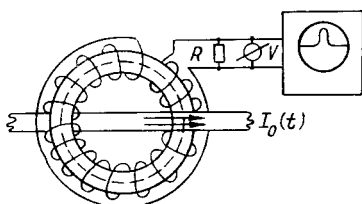


Рис. VI.14. Схема пояса Роговского. Штриховой линией условно показан путь интегрирования.

нитное поле лишь на небольшую глубину (см. § 87). Поэтому сердечники трансформаторов приходится делать шихтованными, т. е. в виде набора тонких пластин, электрически изолированных одна от другой. Для промышленной частоты 50 Гц обычная толщина пластины составляет 0,5 мм. Для трансформаторов на высокие частоты (в радиотехнике) приходится использовать очень тонкие пластины (<0,1 мм) или ферритовые сердечники.

Задача 2. На какое напряжение нужно изолировать пластины сердечника трансформатора?

Если число пластин в сердечнике n , а напряжение на виток обмотки трансформатора V_1 , то напряжение между соседними пластинами $V_{\text{изол}} \approx V_1/2n$.

В простейшем случае отсутствия рассеянного потока отношение ЭДС в обеих обмотках пропорционально числу их витков, так как ЭДС индукции на один виток определяется одним и тем же потоком в сердечнике. Если, кроме того, потери в трансформаторе малы, а сопротивление нагрузки велико, то очевидно, что отношение напряжений на первичной и вторичной обмотках также пропорционально N_1/N_2 . В этом и состоит принцип работы трансформатора, позволяющего таким образом легко изменять напряжение во много раз.

Задача 3. Найти коэффициент трансформации напряжения при произвольной нагрузке.

Пренебрегая потерями в трансформаторе и рассеянием (идеальный трансформатор), запишем уравнение для токов в обмотках в виде (в единицах СИ)

$$i\omega L_{11}I_1 + i\omega L_{22}I_2 = V, \quad i\omega L_{21}I_1 + i\omega L_{22}I_2 + Z_H I_2 = 0, \quad (53.6)$$

где Z_H — комплексное сопротивление нагрузки (см. § 52) и использовано выражение (51.2) для ЭДС индукции сложной цепи. С помощью соотношения (51.6); $L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_{11}L_{22}}$ можно найти коэффициент трансформации напряжения $k_V = Z_H I_2/V$, не решая уравнений (53.6), а просто поделив их одно на другое:

$$k_V = - \frac{\sqrt{L_{11}L_{22}} + L_{22}(I_2/I_1)}{L_{11} + \sqrt{L_{11}L_{22}}(I_2/I_1)} = - \sqrt{\frac{L_{22}}{L_{11}}} = - \frac{N_2}{N_1}. \quad (53.7)$$

Коэффициент трансформации оказывается равным, таким образом, просто отношению числа витков при любой нагрузке. Знак k_V зависит от выбора начала и конца обмоток.

Для нахождения коэффициента трансформации по току нужно решить систему (53.7), в результате чего получим

$$k_I = \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{i\omega L_{11}}{i\omega L_{22} + Z_H}. \quad (53.8)$$

В общем случае коэффициент оказывается некоторой комплексной величиной, т. е. между токами в обмотках появляется сдвиг фаз. Представляет интерес частный случай малой нагрузки $Z_n \ll \omega L_{22}$. Тогда $k_1 = N_1/N_2 = 1/|k_v|$, т. е. отношение токов становится обратным отношению напряжений.

Такой режим работы трансформатора можно использовать для измерения больших токов (трансформатор тока). Оказывается, что такое же простое преобразование токов сохраняется и для произвольной зависимости тока от времени при специальной конструкции трансформатора тока. В этом случае он называется поясом Роговского (рис. VI.14) и представляет собой гибкий замкнутый соленоид произвольной формы с равномерной намоткой. Работа пояса основана на законе сохранения циркуляции магнитного поля (см. § 33): $\oint (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = 4\pi I_0(t)/c$, где интегрирование производится по контуру внутри пояса (см. рис. VI.14), а $I_0(t)$ — полный измеряемый ток, охватываемый поясом. Предполагая, что поперечные размеры пояса достаточно малы, можно записать ЭДС индукции, наводимую на пояс, так:

$$\mathcal{E} = -\oint \left(d\mathbf{l}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \frac{S_0 n_0}{c} = -\frac{S_0 n_0 \mu}{c} \cdot \frac{d}{dt} \oint (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = -\frac{4\pi \mu n_0 S_0}{c^2} \cdot \frac{dI_0}{dt}, \quad (53.9)$$

где S_0 — поперечное сечение пояса, а n_0 — плотность намотки, обе величины предполагаются постоянными вдоль пояса; μ — магнитная проницаемость сердечника пояса. Уравнение для тока в поясе i имеет вид

$$\frac{L}{c^2} \cdot \frac{di}{dt} + (r + R) i = -\frac{L}{Nc^2} \cdot \frac{dI_0}{dt}, \quad (53.10)$$

где r, R — внутреннее сопротивление пояса и сопротивление нагрузки (измерительное сопротивление); $L = 4\pi \mu S_0 n_0^2 l$ — индуктивность пояса, $N = n_0 l$ — полное число витков пояса. Пусть характерное время τ изменения тока $I_0(t)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\tau \ll \frac{L}{(r + R) c^2}. \quad (53.11)$$

Тогда можно пренебречь сопротивлением цепи, и уравнение (53.9) непосредственно интегрируется: $i = -I_0/N$, т. е. получается то же соотношение, что и для трансформатора тока, но теперь при произвольной зависимости тока от времени. Обратим внимание на то, что ток в цепи пояса i не зависит от расположения измеряемого тока I_0 внутри пояса, если плотность намотки пояса n_0 и его сечение S_0 постоянны по длине (53.9).

Простое преобразование электрического напряжения возможно только для переменного тока. Этим определяется его решающая роль в современной промышленности. В тех случаях, когда требуется постоянный ток, возникают существенные трудности. Например, в сверхдальних линиях передачи электроэнергии применение постоянного тока дает значительные преимущества: уменьшаются тепловые потери, так как нет скин-эффекта (см. § 87) и отсутствуют резонанс-

ные (волновые) переходные процессы при включении — выключении линии передачи, длина которой порядка длины волны переменного тока (6000 км для промышленной частоты 50 Гц). Трудность же состоит в выпрямлении переменного тока высокого напряжения на одном конце линии передачи и обратного преобразования — на другом.

§ 54. СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

Давно известно, что сопротивление проводников падает с температурой. Однако на основании существовавших представлений о строении вещества физики были твердо уверены, что при понижении температуры сопротивление уменьшается до нуля монотонно. Поэтому открытие в 1911 г. голландским физиком Камерлинг-Оннесом сверхпроводимости было совершенно неожиданным, а теоретическое объяснение дано лишь полвека спустя.

Рассматриваемое явление состоит в скачкообразном ($\Delta T < 10^{-3}$ К для чистых металлов) падении сопротивления проводника до исчезающе малых значений ($\rho < 10^{-23}$ Ом · см). Происходит оно при достаточно низких температурах (рис. VI.15). Как стало ясно после создания теории сверхпроводимости, сопротивление металла ниже точки перехода в точности равно нулю.

Сверхпроводимость оказалась явлением достаточно широко распространенным. Она обнаружена у 27 металлов, а также у большого количества сплавов и соединений, в том числе и таких, которые при комнатной температуре обладают полупроводниковыми свойствами. Только у одновалентных, благородных и ферромагнитных металлов устойчивое сверхпроводящее состояние не наблюдается. Критические температуры чистых металлов не превосходят 10 К, а для некоторых соединений достигают 23 К.

В первое время после открытия сверхпроводимости с ней связывали большие надежды широкого использования ее в электротехнике, в частности, для создания сильных постоянных магнитных полей. Однако вскоре выяснилось, что магнитное поле разрушает сверхпроводимость, причем критическое поле для чистых металлов не превышает 10^3 Гс. Также небольшими оказались и критические токи. И лишь спустя несколько десятилетий, когда стали известны так называемые жесткие сверхпроводники, техника взяла это, до тех пор казавшееся необычным, явление на вооружение.

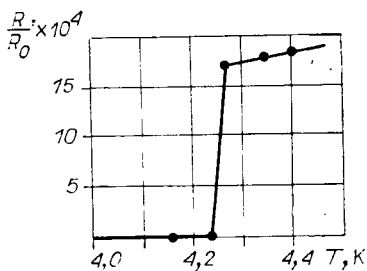


Рис. VI.15. Температурная зависимость электрического сопротивления ртути вблизи абсолютного нуля: $R_0 = R(273 \text{ К})$.

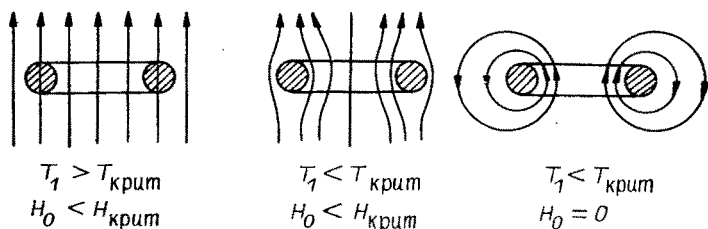


Рис. VII.6. Переход кольца в сверхпроводящее состояние во внешнем магнитном поле.

Первым шагом к пониманию природы сверхпроводимости послужил так называемый эффект Мейсснера, открытый в 1933 г. немецкими физиками Мейсснером и Оксенфельдом. Он состоит в том, что магнитное поле внутри сверхпроводника всегда равно нулю. Иначе говоря, сверхпроводник является идеальным диамагнетиком с $B = 0$ (см. также § 44). Это свойство коренным образом отличает сверхпроводник от идеального проводника. В последнем магнитное поле может сохраняться в течение некоторого времени — так называемое «вмороженное поле» (см. § 48). Если же проводник переходит в сверхпроводящее состояние во внешнем магнитном поле, последнее выталкивается из него. Обратим внимание, что поле выталкивается при этом только из тела сверхпроводника, но не из области, охватываемой сверхпроводником (рис. VI.16). При выключении внешнего поля поток внутри сверхпроводящего кольца сохраняется, и это есть один из способов возбуждения тока в сверхпроводнике.

Основой всех необычных свойств сверхпроводника является свободное (без столкновений) движение внутри него носителей заряда. Это чисто квантовый эффект, объясненный лишь в 1957 г. американскими физиками Бардиным, Купером и Шриффером (теория БКШ), а также советским математиком Боголюбовым. Оказывается, что носителями заряда в сверхпроводнике являются пары электронов («куперовские пары»), связанные упругими силами решетки. Интересно отметить, что размер пар вполне макроскопический и достигает нескольких микрон (подробнее см. [6. 7]).

В связи с созданием теории сверхпроводимости было впервые введено понятие кванта магнитного потока (Ф. Лондон, 1950 г.): $\Phi_L = hc/e$ (h — постоянная Планка). Измерения, проведенные в 1961 г., привели к результату, отличающемуся в два раза: $\Phi_0 = hc/2e = 2,07 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$, что соответствует представлению о куперовских парах.

Еще в 1938 г. советские физики Губарь и Кикоин экспериментально показали, что гиромангнитное отношение для электронов в сверхпроводнике равно не двойке, а четверке. Тогда этот результат остался непонятным, хотя теперь ясно, что для связанной пары электронов так и должно быть. Движение куперовских пар наиболее ярко проявляется в эффекте Джозефсона, предсказанном им в 1962 г. До этого было известно, что ток в системе двух сверх-

проводников, разделенных тонкой диэлектрической прослойкой $\sim 100 \text{ \AA}$ (туннельный эффект), возникает не раньше, чем подаваемое напряжение разорвет связь между электронами в паре. Однако при уменьшении толщины прослойки примерно в 10 раз оказалось возможным прохождение тока вовсе без падения напряжения на туннельном переходе. Объяснение эффекта — туннелирование куперовских пар через прослойку. На опыте эффект Джозефсона первыми продемонстрировали Андерсон и Роуэлл в 1963 г.

Поведение сверхпроводника во внешнем магнитном поле может быть понято, во всяком случае качественно, и без привлечения микроскопической квантовой теории (ср. с § 44). Еще в 1935 г. братья Лондоны, минимизируя свободную энергию сверхпроводника в присутствии внешнего поля с учетом уравнений Максвелла, показали, что магнитное поле проникает в сверхпроводник, спадая с глубиной экспоненциально: $H(z) = H(0) \exp(-z/\lambda_L)$, λ_L — глубина проникновения, $\lambda_L = (mc^2/4\pi n_s e^2)^{1/2}$, n_s — концентрация электронов проводимости, а m — их масса. Типичное значение глубины для чистых металлов (так называемых сверхпроводников первого рода) составляет $\lambda_L \sim 10^{-5}$ см, что, вообще говоря, меньше лондоновской глубины. В 1953 г. английским физиком Пиппардом было показано, что распределение токов и полей в чистых сверхпроводниках зависит от свойств среды не только в данной точке, но и в некотором объеме, ее окружающем. Возникло понятие о длине когерентности ξ_0 . В чистых металлах $\xi_0 \sim 10^{-4}$ см. Это, по существу, размер электронной пары. Таким образом, для сверхпроводников первого рода справедливо неравенство $\lambda_L < \xi_0$. Оказалось, что для сплавов (их принято называть сверхпроводниками второго рода) имеет место противоположное соотношение $\lambda_L > \xi_0$, при этом обращение знака неравенства происходит «по вине» обоих его участников, т. е. в сплавах глубина проникновения возрастает до $10^{-4} \div 10^{-3}$ см, а размер пары, наоборот, падает до $5 \cdot 10^{-7}$ см.

В наиболее общем и полном виде электродинамика сверхпроводников была построена советскими физиками Гинзбургом и Ландау. Их теория объяснила результаты экспериментальных наблюдений различающегося поведения сверхпроводников первого и второго родов в магнитном поле. Для последних оказалось, что полный эффект Мейсснера имеет место лишь в слабых полях $H < H_{k1}$. В широком же интервале полей $H_{k1} < H < H_{k2}$ сверхпроводник второго рода находится в смешанном состоянии: его толщу пронизывают нити нормальной (несверхпроводящей) фазы, радиус которых равен длине когерентности, а магнитный поток, пронизывающий одну нить, — в точности одному кванту потока Φ_0 . Плотность сверхпроводящих электронов в сердцевине нити равна нулю. Магнитное поле спадает от центра нити в глубь сверхпроводника на длине λ_L . Это поле индуцирует круговой сверхпроводящий ток (рис. VI.17). Число нитей зависит от напряженности внешнего поля.

Когда поле достигает значения H_{k2} , сверхпроводимость разрушается. Кривая намагничивания сверхпроводника второго рода показана на рис. VI.18. Видно, что в смешанном состоянии макроскопиче-

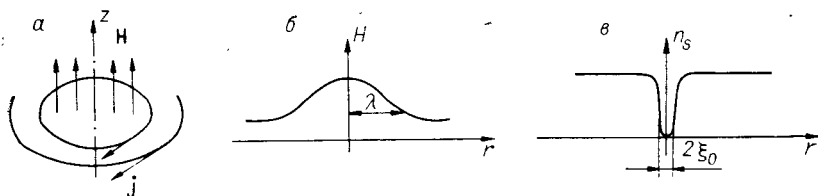


Рис. VI.17. Структура вихревой нити в сверхпроводнике второго рода. а — конфигурация полей и токов, создаваемых вихревой нитью; б — зависимость магнитного поля от расстояния до центра нити; в — изменение плотности сверхпроводящих электронов вблизи оси нити.

ское $\langle \mu \rangle \neq 0$. Характерно, что в смешанном состоянии электросопротивление равно нулю. В сверхпроводниках первого рода поле не проникает в образец вплоть до H_k , а затем индукция скачком принимает значение $B = H_k$, изменяясь далее линейно, как в обычных средах.

Поскольку значения верхних критических полей H_{k2} для сверхпроводников второго рода (особенно для так называемых «жестких») достигают сотен тысяч килогаусс, технические применения сверхпроводимости стали вполне реальными. Здесь речь идет об использовании сверхпроводящих обмоток в качестве источников сильных магнитных полей в электрофизической аппаратуре, электрических машинах. Высокие значения критических токов позволяют создавать линии электропередач, свободные от потерь на джоулево тепло. Основные сверхпроводящие материалы в наше время — это Nb_3Sn ($H_{k2} = 250$ кГс) и сплав $Nb-Ti$ ($H_{k2} = 100$ кГс). Для нужд техники сверхпроводники изготавливают в виде проволоки или многожильных кабелей. В последнем случае мы имеем дело с медным проводом, пронизанным большим числом сверхпроводящих нитей малого, порядка нескольких микрон, диаметра. Такая структура кабеля обеспечивает его механическую прочность, а также стабилизацию сверхпроводящего состояния на случай локального перегрева того или иного участка выше критической температуры.

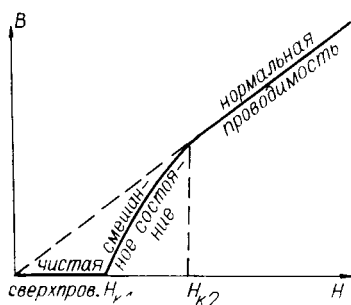


Рис. VI.18. Кривая намагничивания сверхпроводника второго рода.

H_{k1} , H_{k2} — критические значения магнитного поля.

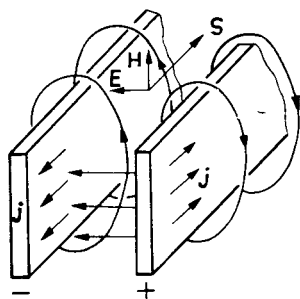


Рис. VI.19. Поток энергии в цепи постоянного тока (двухпроводная линия).

Сверхпроводники применяют также для создания высокочастотных резонаторов большой мощности для ускорителей и в различных измерительных устройствах. Здесь особенно перспективными оказались приборы, основанные на эффекте Джозефсона. Чувствительность по магнитному потоку легко доводится до тысячных долей одного кванта Φ_0 !

Поскольку необходимость использования жидкого гелия для охлаждения сверхпроводящих устройств создает значительные неудобства и сильно удорожает аппаратуру, на протяжении многих лет не прекращаются упорные поиски более «высокотемпературных» сверхпроводников, которые могли бы работать хотя бы при температуре кипения жидкого водорода 20 К. Недавно получен сложный сплав из ниобия, алюминия и германия с критической температурой 23 К.

§ 55. ПОТОК ЭНЕРГИИ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Электромагнитное поле обладает энергией, плотность которой

$$w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} + \frac{\mu H^2}{8\pi}. \quad (55.1)$$

При перемещении поля возникает поток энергии. Примерами могут служить распространение электромагнитной волны или поле движущегося заряда.

Для количественного описания потока энергии в поле рассмотрим баланс энергии. Мощность, передаваемая в поле частицами (токами) $P_V = - \int (\mathbf{E}, \mathbf{j}) dV$. Выразим теперь плотность тока через поля из уравнения $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j}/c$, добавим для симметрии слагаемое $\text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ и используем векторное тождество $(\mathbf{H}, \text{rot } \mathbf{E}) - (\mathbf{E}, \text{rot } \mathbf{H}) = \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$. В результате получим

$$P_V = \frac{d}{dt} \int w dV + \int_F (\mathbf{S}, d\mathbf{F}), \quad (55.2)$$

где w — плотность энергии (55.1), а вектор

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (55.3)$$

можно интерпретировать как плотность потока энергии через поверхность F , окружающую произвольный объем V . Эта величина была вычислена английским физиком Пойнтингом (*вектор Пойнтинга*).

Если передача энергии от частиц к полю отсутствует ($P_V = 0$), мы получаем закон сохранения энергии поля в интегральной форме. Преобразовав поверхностный интеграл в объемный, приходим к диф-

ференциальному закону сохранения энергии поля

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad (55.4)$$

похожему по форме на закон сохранения заряда (см. § 20). В частности, в стационарном поле ($\partial w / \partial t = 0$) $\operatorname{div} \mathbf{S} = 0$, т. е. линии вектора Пойнтинга замкнуты.

Рассмотрим простой пример потока энергии в электромагнитном поле — двухпроводную линию (рис. VI.19). При отсутствии сопротивления как магнитное, так и электрическое поля перпендикулярны направлению тока и образуют вектор Пойнтинга вдоль линии. Если линия обладает сопротивлением, появляется продольная составляющая электрического поля, которая поворачивает вектор Пойнтинга таким образом, что часть потока энергии ответвляется внутрь проводника и нагревает его.

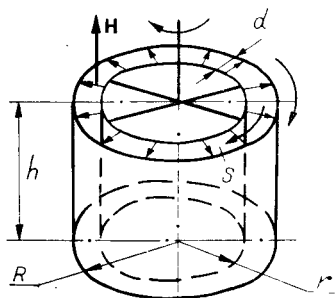
Обратим внимание на важную особенность вектора Пойнтинга — к нему неприменим обычный закон сложения векторов по правилу параллелограмма. Рассмотрим, например, суперпозицию двух полей ($\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$) и ($\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$), одинаковых по величине, но отличающихся по направлению. Плотность потока энергии в каждом из них одна и та же (S_0). Суммарное поле, согласно принципу суперпозиции, определяется величинами $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$. Поэтому, если $\mathbf{E}_1 = -\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_1 = -\mathbf{H}_2$, суммарное поле и поток его энергии равны нулю, а не $2S_0$. Этот простой пример иллюстрирует явление *интерференции* в электромагнитном поле. Говорят, что два (или больше) поля интерферируют между собой, если поток или плотность энергии результирующего поля не равны сумме соответствующих величин составляющих полей. Интерференция связана с тем, что поток энергии, так же как и ее плотность, являются квадратичными функциями поля.

Существуют ли потоки энергии в статических полях, образованных суперпозицией электрического и магнитного полей, таких что формально $\mathbf{S} \neq 0$? Как мы видели выше, в таких полях линии вектора Пойнтинга замкнуты, т. е. энергия поля циркулирует по некоторым замкнутым кривым. Реальны ли эти потоки энергии? Можно ли обнаружить их экспериментально? Оказывается, что можно. Простейший, хотя, быть может, и не очень убедительный способ — поместить в такое поле заряженную частицу. Она будет дрейфовать (см. (56.9)) со скоростью $\mathbf{V} = c(\mathbf{E} \times \mathbf{H})/H^2$, т. е. как раз вдоль вектора Пойнтинга. При этом скорость дрейфа такова, что в сопровождающей системе отсчета $\mathbf{S}' = 0$. Более убедительным примером может служить цилиндрический конденсатор в магнитном поле (рис. VI.20). Циркуляция энергии приводит здесь к появлению момента поля

$$M = 2\pi R h d p R, \quad (55.5)$$

где p — плотность импульса поля, пропорциональная вектору Пойнтинга. Этот момент можно наблюдать, например, по закручиванию конденсатора при изменении магнитного поля. Механизм закручива-

Рис. VI.20. Вращение заряженного цилиндрического конденсатора, внесенного в магнитное поле.



ния связан с действием ЭДС индукции на поверхностные заряды конденсатора. Пусть для простоты магнитное поле сосредоточено только в зазоре конденсатора. Тогда электрическое поле на внутреннем цилиндре равно нулю,

а на внешнем $E = d\dot{B}/c$. Момент сил этого поля

$$K = E\sigma h R \cdot 2\pi R = \frac{\dot{B}2\pi R d h \sigma R}{c} = \dot{M}.$$

Поверхностная плотность зарядов на конденсаторе $\sigma = D/4\pi$, и окончательно получаем

$$M = V \frac{BD}{4\pi c} R, \quad (55.6)$$

где $V = 2\pi R h d$ — объем поля. Сравнивая с (55.5) найдем для плотности импульса выражение

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{D} \times \mathbf{B}}{4\pi c} = \frac{\varepsilon \mu \mathbf{S}}{c^2}. \quad (55.7)$$

Обратим внимание, что как в вектор Пойнтинга, так и в плотность импульса входит «противоестественная» комбинация полей: одно из них — полное $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, а второе — вспомогательное $(\mathbf{H}, \mathbf{D})$.

Импульс поля естественно связать с его массой, плотность которой равна w/c^2 . Попробуем установить количественное соответствие на примере однородно заряженного конденсатора в вакууме, движущегося со скоростью $v \ll c$, параллельной пластинам. Кажется бы, плотность импульса в таком конденсаторе должна равняться $p = wv/c^2 = vE^2/8\pi c^2$. С другой стороны, магнитное поле в движущемся конденсаторе $H = vE/c$, тогда по формуле (55.7) $p = vE^2/4\pi c^2$, т. е. в два раза больше. Опять мы получаем ту же «загадочную» двойку, что и в § 49.

Приведем еще одну любопытную интерпретацию выражения (55.7) для импульса поля. Дифференцируя это выражение по времени, найдем

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{4\pi c} [\dot{\mathbf{D}} \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times \dot{\mathbf{B}}]. \quad (55.8)$$

Первое слагаемое можно рассматривать как силу Лоренца, действующую на ток смещения $\mathbf{j}_E = \dot{\mathbf{D}}/4\pi$, а второе связано с «магнитным током смещения» $\mathbf{j}_B = \dot{\mathbf{B}}/4\pi$.

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 56. ЧАСТИЦА В ОДНОРОДНОМ И ПОСТОЯННОМ ПОЛЕ

Движение заряженной частицы с произвольной скоростью в электромагнитном поле определяется силой Лоренца (29.1):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}, \quad (56.1)$$

где $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ — релятивистский импульс, а e — заряд частицы. В этом параграфе мы рассмотрим простейший случай однородного в пространстве и постоянного во времени электромагнитного поля. Отметим, что это свойство поля является релятивистски инвариантным, т. е. сохраняется в любой инерциальной системе отсчета.

Пусть вначале $H = 0$ (в некоторой системе отсчета). Выберем ось X вдоль вектора $\mathbf{E}$. Тогда

$$\dot{p}_x = eE = \text{const}, \quad p_{\perp} = \text{const}, \quad (56.2)$$

где $p_{\perp}$ — компонента импульса, перпендикулярная вектору $\mathbf{E}$, которая сохраняется. Выберем систему единиц, в которой $e = M = c = 1$, $M = \sqrt{m^2 + p_{\perp}^2}$ — эффективная масса частицы. Тогда $\gamma^2 = (1 - v^2)^{-1} = 1 + p_x^2$. (В этой системе единиц энергия частицы измеряется в единицах Mc^2 , электрический потенциал — в единицах Mc^2/e .) Выберем, далее, начало отсчета времени ($t = 0$) таким образом, чтобы $p(0) = 0$. Тогда решение уравнения (56.2) имеет вид

$$p_x = Et, \quad v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{p_x}{\sqrt{1 + p_x^2}}. \quad (56.3)$$

При малых t движение нерелятивистское: $v_x \approx Et$, а при больших t — ультрарелятивистское: $v_x \approx 1$, т. е. скорость частицы стремится к предельному значению. Движение, характеризуемое формулой (56.3), называется в теории относительности «равноускоренным». Конечно, не в буквальном смысле, поскольку существует предельная скорость. Поэтому ускорение в исходной системе отсчета

$$a_x = \dot{v}_x = \frac{E}{\gamma^3} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (56.4)$$

причем эффективная масса частицы E/a (так называемая «продольная» масса) растет как γ^3 . Однако ускорение в сопровождающей системе отсчета $a_0 = E_0 = E$ остается постоянным, так как продоль-

ная компонента $E = \text{inv}$ (29.4). Отметим, что в полной размерности инвариантное ускорение $a_0 = eE/M$.

Интегрируя уравнение (56.3), найдем

$$x(t) = \frac{1}{E} (\sqrt{1 + E^2 t^2} - 1). \quad (56.5)$$

Опять-таки при малых t получаем обычный нерелятивистский закон равноускоренного движения: $x \approx Et^2/2$, а при $t \rightarrow \infty$ $x \approx t - 1/E$. Это значит, в частности, что фотон, выпущенный в момент $t = 0$, хотя и обгонит частицу, но лишь на конечное расстояние $\Delta x = 1/E$ ($= Mc^2/eE$). Если же выпустить фотон с задержкой t_1 , то он догонит частицу только при условии $t_1 < 1/E$ ($= Mc/eE$).

Задача 1. Найти закон распада частицы (например, мезона) при равноускоренном движении.

В собственном времени доля частиц, не распавшихся на интервале τ , есть $v_0 = \exp(-\tau/\tau_0)$, где τ_0 — среднее время жизни частицы. С другой стороны, собственное время τ связано с временем инерциальной системы t соотношением (см. 56.3))

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + E^2 t^2}} = \frac{1}{E} \ln(Et + \sqrt{1 + E^2 t^2}) \rightarrow \ln(2Et)/E. \quad (56.6)$$

Отсюда

$$v = (2Et)^{-1/E\tau_0},$$

т. е. распад происходит значительно медленнее, по степенному закону.

Поперечная скорость в лабораторной системе отсчета $v_{\perp} = dy/dt = v_{\perp 0}/\gamma$ падает с ростом γ , но в сопровождающей системе $dy/d\tau = v_{\perp 0} = \text{const}$. Отсюда $y = v_{\perp 0}\tau$, где τ — собственное время частицы (56.6).

Пусть теперь $E = 0$. Так как магнитная часть силы Лоренца перпендикулярна скорости, то энергия частицы сохраняется ($\gamma = \text{const}$). Поэтому уравнение движения частицы (56.1) имеет тот же вид, что и в нерелятивистском случае, с эффективной массой γm :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times \frac{e\mathbf{H}}{\gamma mc} = -\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{v}, \quad (56.7)$$

т. е. вектор $\mathbf{v}$ вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_L = -e\mathbf{H}/\gamma mc$, которая называется ларморовской частотой по имени английского физика Лармора (1895 г.). Поскольку компонента импульса и скорости вдоль магнитного поля сохраняется, траектория частицы представляет собой равномерную спираль с шагом $\lambda = 2\pi v_{\parallel}/\omega_L$ и радиусом

$$\rho_L = \frac{v_{\perp}}{\omega_L} = \frac{p_{\perp} c}{eH}, \quad (56.8)$$

который называется *ларморовским радиусом*.

Задача 2. Найти движение частицы в параллельных электрическом и магнитном полях.

Поскольку в магнитном поле $|\mathbf{p}_{\perp}| = \text{const}$, то продольное движение описывается теми же выражениями (56.3), (56.5), (56.6), что и при $H = 0$. Угол

же поворота ф вектора $p_{\perp}$ удовлетворяет уравнению $d\varphi/dt = -\omega_L(t) = -\omega_0/\gamma(t)$, где $\omega_0 = eH/mc = \text{const}$. Отсюда $d\varphi/d\tau = -\omega_0$ и $\varphi = -\omega_0\tau$. Траектория частицы представляет собой неравномерную спираль с возрастающим шагом $\lambda(t) = p_{\parallel}(t)c/eH = ctE/H$.

Пусть теперь векторы E и H перпендикулярны, причем $E < H$. Тогда согласно закону преобразования полей (29.7) существует система отсчета, движущаяся относительно лабораторной системы со скоростью

$$\mathbf{V} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{H^2}, \quad (56.9)$$

в которой остается только магнитное поле, а частица движется по спирали (в частном случае — по окружности). Тогда в лабораторной системе отсчета вся спираль (окружность) будет смещаться со скоростью (56.9). Такое сложное движение называется *дрейфом*, а V — скоростью дрейфа. Амплитуда колебаний частицы вдоль вектора E равна при этом ларморовскому радиусу в системе отсчета, где $E' = 0$: $\rho_L' = p_{\perp}c/eH' = mc^2E/e(H^2 - E^2)$. Последнее выражение соответствует нулевой начальной скорости в лабораторной системе. В частности, при $E \rightarrow H$ величина $\rho_L \rightarrow \infty$ и движение вдоль E становится неограниченным.

Если $H > E$, то можно аналогичным образом исключить магнитное поле, так что движение в новой системе отсчета ($V = c(\mathbf{E} \times \mathbf{H})/E^2$) будет равноускоренным и, следовательно, неограниченным.

§ 57. ЧАСТИЦА В НЕОДНОРОДНОМ ПОЛЕ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО МОМЕНТА

Рассмотрим вначале движение заряженной частицы в однородном магнитном поле, которое изменяется с течением времени, например возрастает. Как будет двигаться частица в таком поле? Усредненное за много оборотов движение такой частицы можно рассматривать как ток в контуре без сопротивления. Тогда орбита частицы в растущем магнитном поле должна стягиваться таким образом, чтобы оставался постоянным охватываемый ею магнитный поток: $r \propto H^{-1/2}$. При этом энергия частицы возрастает пропорционально полю: $p_{\perp} \propto rH \propto H^{1/2}$ и $W = p_{\perp}^2/2m \propto H$.

Рассмотрим уравнения движения частицы, ограничиваясь случаем аксиально-симметричного поля. В цилиндрических координатах уравнение для азимутального момента можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(rp_{\theta}) = -\frac{e}{2\pi c} \cdot \frac{\partial \Phi_z}{\partial t} - \frac{e}{c} r \dot{r} H_z + \frac{e}{c} r z \dot{H}_r. \quad (57.1)$$

Первое слагаемое в правой части дает момент вихревого электрического поля, причем частная производная указывает, что берется из-

менение потока через неподвижный контур — окружность радиуса r . Остальные два слагаемых дают момент силы Лоренца. Преобразуем это выражение, используя условие $\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_r) + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$. Отсюда

$$H_r = -\frac{1}{r} \int_0^r r' dr' \frac{\partial H_z}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi c} \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}, \quad (57.2)$$

после чего вся правая часть (57.1) сворачивается в полную производную магнитного потока в соответствии с законом Фарадея:

$$\frac{d}{dt} (r p_0) = -\frac{e}{2\pi c} \cdot \frac{d\Phi_z}{dt}. \quad (57.3)$$

Интегрируя, получаем закон сохранения:

$$M_0 = r p_0 + \frac{e\Phi_z}{2\pi c} = \text{const.} \quad (57.4)$$

Величина эта называется *обобщенным* моментом частицы в магнитном поле. С точки зрения механики к обычному моменту $r p_0$ добавляется слагаемое, зависящее от магнитного поля. На языке электротехники можно считать, что сохраняется не просто магнитный поток внешнего поля, а его сумма с величиной, зависящей от импульса частицы. Подчеркнем, что закон сохранения обобщенного момента справедлив только в аксиально-симметричном магнитном поле, что было использовано при записи уравнений (57.1), (57.2). В остальных конфигурациях магнитного поля может быть произвольной.

Задача 1. Найти условие движения частицы по окружности постоянного радиуса в аксиально-симметричном магнитном поле, изменяющемся во времени.

Пусть в момент $t = 0$ частица имеет только азимутальную компоненту импульса, значение которой согласовано с величиной магнитного поля на траектории — окружности радиуса r_0 : $p(0)c = -eH_z(r_0, 0)r_0$. Траектория не изменится, если в любой момент времени $p(t)c = -eH_z(r_0, t)r_0$. Но согласно (57.4)

$$p(t) = p(0) + \frac{er_0}{2c} (\overline{H_z(0)} - \overline{H_z(t)}), \quad \overline{H} \equiv \frac{\Phi_z}{\pi r_0^2} - \text{среднее поле внутри траектории.}$$

Нетрудно видеть, что все три равенства выполняются одновременно, если для любого t

$$H_z(r_0, t) = \frac{1}{2} \overline{H_z(t)},$$

это так называемое «условие 2:1», необходимое для ускорения частицы в нарастающем во времени магнитном поле при постоянстве радиуса ее траектории (ускоритель бетатрон).

Если магнитное поле слабо неоднородно и медленно изменяется во времени, то можно приближенно считать траекторию частицы окружностью. Пусть начало координат совпадает с центром этой окружности. Тогда $r p_0 \approx -eH_z r^2/c \approx -e\Phi_z/\pi c$, и обобщенный момент

можно выразить только через поток или только через импульс:

$$M_\theta \approx -\frac{e\Phi_z}{2\pi c} \approx \frac{r p_\theta}{2} \approx \text{const.} \quad (57.5)$$

Таким образом, в этом случае можно говорить о законе сохранения магнитного потока внешнего поля. Подчеркнем, что равенство (57.5) считается приближенным, так как в неоднородном переменном поле траектория частицы не является точной окружностью.

Приближенное выражение (57.5) для обобщенного момента оказывается пропорциональным магнитному моменту частицы m (34.11):

$$M_\theta = \frac{m_0 c}{e} |m|, \quad (57.6)$$

где m_0 — масса частицы. Таким образом, мы получили приближенный закон сохранения магнитного момента частицы. Этот закон позволяет сравнительно просто исследовать движение частицы в слабо неоднородном поле.

Пусть магнитное поле аксиально-симметрично и убывает с радиусом. В таком поле заряженная частица «дрейфует» по азимуту, т. е. перпендикулярно градиенту H , как это показано на рис. VII.1. Дрейфовое движение возникает вследствие того, что кривизна траектории частицы зависит от радиуса. Скорость дрейфа тем меньше, чем меньше ларморовский радиус частицы (см. задачу 2 ниже). Дрейфовое движение частицы также можно рассматривать как некоторый ток и считать, что охватываемый им магнитный поток сохраняется при изменении магнитного поля. В уравнениях механики это соответствует точному сохранению (в аксиально-симметричном поле) обобщенного момента (57.4). При этом существуют такие две фазы ларморовского вращения, для которых механический момент $p_\theta = 0$ (см. рис. VII.1). Таким образом, имеет место точное сохранение магнитного потока, охватываемого окружностью радиуса $R_0 \approx \sqrt{R^2 - \rho_L^2}$, где R — расстояние центра ларморовской окружности от оси симметрии поля, или радиус дрейфовой траектории частицы. При изменении магнитного поля во времени радиус дрейфовой траектории изменяется по закону $R \propto H^{-1/2}$. Механизм радиального движения частицы связан с ее

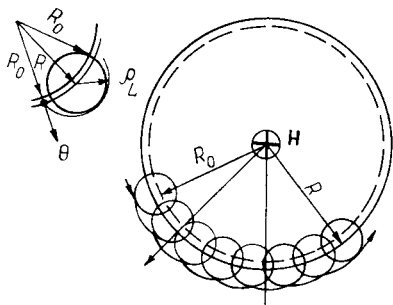


Рис. VII.1. Траектория положительно заряженной частицы в неоднородном аксиально-симметричном магнитном поле.

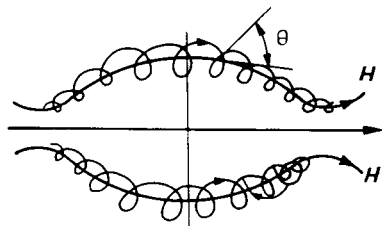


Рис. VII.2. Траектория заряженной частицы в магнитной ловушке.

дрейфом в вихревом электрическом поле, появляющемся в переменном магнитном поле.

Предположим теперь, что магнитное поле постоянно во времени, но изменяется в пространстве вдоль силовых линий (рис. VII.2). Если частица движется в этом направлении, то магнитный поток, охватываемый ее дрейфовой траекторией, также должен сохраняться. Но это означает, что частица движется приблизительно (с точностью $\sim \rho_L$) по силовой линии магнитного поля, точнее, по некоторой поверхности вращения, образованной равноудаленными от оси симметрии силовыми линиями магнитного поля. Траектория движения является в этом случае некоторой комбинацией схематических рис. VII.1, VII.2, полное изображение которой наверняка запутало бы читателя.

В произвольном магнитном поле (не обязательно аксиально-симметричном) магнитный поток, охватываемый дрейфовой траекторией частицы, также приблизительно сохраняется, если только магнитное поле мало изменяется в течение дрейфового периода.

Задача 2. Найти скорость дрейфа в неоднородном магнитном поле.

Понятие дрейфа частицы предполагает, что его скорость и ускорение достаточно малы. Поэтому в качестве модели дрейфового движения можно принять ларморовский «кружок», на который действуют средние (по ларморовской окружности) силы. В первом приближении эти силы должны взаимно уравновешиваться. В неоднородном магнитном поле на «кружок» действуют три силы:

1) сила, связанная с градиентом магнитного поля и определяемая магнитным моментом частицы $\mathbf{m}$ (см. (35.6)): $\mathbf{f}_1 = \nabla(\mathbf{m}, \mathbf{H})$,

2) центробежная сила, обеспечивающая движение кружка вдоль искривленной силовой линии радиуса $\mathcal{H}^{-1}$: $\mathbf{f}_2 = -\mathcal{H} m_0 v_{\parallel}^2 \mathbf{n}$, где m_0 — масса частицы, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор главной нормали к силовой линии;

3) сила Лоренца, связанная с дрейфовой скоростью $\mathbf{u}_d$: $\mathbf{f}_3 = e \mathbf{u}_d \times \mathbf{H}/c$. Найдем вначале вектор кривизны силовой линии поля $\mathcal{H} = d\tau/ds$, $\tau = \mathbf{H}/H$, в

области, где $\text{rot } \mathbf{H} = 0$. Записав $\mathcal{H} = \sum_{\alpha=1}^3 (\partial\tau/\partial x_{\alpha}) (\partial x_{\alpha}/\partial S) = (\tau, \nabla) \tau$ с учетом того, что $\tau^2 = 1$, найдем $(\tau, \nabla) \tau = -\tau \times \text{rot } \tau + (\nabla \tau^2/2) = -(\tau \times \text{rot } \mathbf{H})/H + (\tau \times (\mathbf{H} \times \nabla(1/H))) = \tau(\mathbf{H}, \nabla(1/H)) + (\nabla H)/H$. Поскольку $(\mathbf{H}, \nabla(1/H)) = -\text{div } \tau - (\text{div } \mathbf{H})/H = \text{div } \tau$, то окончательно

$$\mathcal{H} = \frac{\nabla H}{H} + \tau \text{div } \tau.$$

Запишем с учетом (34.11) уравнение баланса сил ($\mathbf{m} \approx \text{const}$):

$$-\frac{m_0 v_{\perp}^2}{2H} \nabla H - m_0 v_{\parallel}^2 \left(\frac{\nabla H}{H} + \tau \text{div } \tau \right) + \frac{e}{c} \mathbf{u}_d \times \mathbf{H} = 0.$$

Поскольку $\mathbf{u}_d \perp \tau$, то, умножив это уравнение векторно на $\mathbf{H}$, получим

$$\mathbf{u}_d = \frac{m_0 c (v^2 + v_{\parallel}^2)}{2eH^3} (\mathbf{H} \times \nabla H), \quad (57.7)$$

где $v = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}$ — полная скорость частицы.

Рассмотрим теперь движение заряженной частицы вдоль силовой линии. Мы можем использовать два закона сохранения — точ-

ный закон сохранения энергии:

$$m_0 v_{\parallel}^2 + m_0 v_{\perp}^2 = 2W = \text{const} \quad (57.8)$$

(предполагается, что магнитное поле постоянно во времени) и приближенный закон сохранения магнитного момента:

$$m_0 v_{\perp}^2 / 2H = m \approx \text{const}. \quad (57.9)$$

Подставляя это выражение в (57.8), найдем

$$\frac{m_0 v_{\parallel}^2}{2} + mH(s) = \text{const}, \quad (57.10)$$

где s — координата вдоль силовой линии и $v_{\parallel} = ds/dt$. В таком виде последнее выражение совпадает с законом сохранения энергии для частицы в поле с потенциальной энергией $U(s) = mH(s)$. В частности, поле, конфигурация которого изображена на рис. VII.2, эквивалентно некоторой потенциальной «яме». Поэтому в таком поле частицы заперты также и в направлении силовых линий, и поле такой конфигурации называется *магнитной ловушкой*. Механизм отражения частицы от магнитных «пробок» связан с действием поперечных составляющих неоднородного магнитного поля. Условие удержания частиц вытекает из (57.10) и имеет вид $W < U_{\text{max}}$, или $\sin^2 \theta(s) > H(s)/H_{\text{max}}$. Здесь θ — угол наклона вектора скорости частицы к силовой линии, $H(s)$ — величина магнитного поля. Таким образом, в каждой точке пространства внутри магнитной ловушки имеется так называемый «конус потерь» с раствором $\theta(s)$. Ловушка может удерживать лишь частицы, направление скорости которых лежит вне этого конуса. Заметим, что в действительности конус потерь несколько шире, так как магнитный момент частицы сохраняется лишь приближенно, и близкие к конусу частицы могут с течением времени покинуть ловушку. Такие магнитные ловушки применяются для удержания горячей плазмы в экспериментах, связанных с управляемым термоядерным синтезом.

Для дрейфового характера движения частицы, когда выполняются соотношения (57.5) — (57.7), (57.9), (57.10), необходимо, чтобы магнитное поле мало изменялось на размере порядка ларморовского радиуса частицы:

$$|\nabla H| \ll H/\rho_L. \quad (57.11)$$

Оказывается, что закон сохранения обобщенного момента позволяет с хорошей точностью описывать движение частиц и в случае обратного (также сильного) неравенства. Это магнитные поля с «тонкой» границей. Примером может служить катушка с током, размеры которой много меньше ларморовского радиуса частицы в магнитном поле катушки (рис. VII.3). Такое устройство обладает еще и фокусирующими свойствами. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть частица движется вначале параллельно оси катушки на расстоянии r от нее таким, что $r \ll D \ll \rho_L$, $\rho_L = pc/eH_{\text{max}}$, D — диаметр катушки, H_{max} — максимальное значение поля $H(z)$ на оси ка-

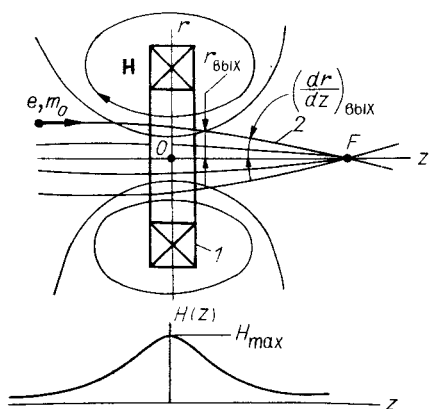


Рис. VII.3. Движение заряженной частицы в магнитном поле катушки с током (I).

$H(z)$ — поле на оси катушки; 2 — проекция траектории частицы на плоскость (r, z) .

тушки. В этом случае поле слабо изменяется на размере r , и закон сохранения (57.4) дает ($p_\theta = \gamma m_0 r \dot{\theta}$, $\Phi_z \approx \pi r^2 H(z)$):

$$\dot{\theta}(z) = -\frac{eH(z)}{2\gamma m_0 c}. \quad (57.12)$$

Движение частицы по радиусу описывается уравнением

$$\frac{dp_r}{dt} - \gamma m_0 \dot{\theta}^2 r \approx \frac{e}{c} H(z) r \dot{\theta}. \quad (57.13)$$

Подставляя в него (57.12), получим

$$\ddot{r} = -\frac{\omega_L^2(z)}{4} r, \quad \omega_L(z) = \frac{eH(z)}{\gamma m_0 c} = -2\dot{\theta}. \quad (57.14)$$

Производя замену $d/dt = v_z d/dz$ и пренебрегая изменением v_z (см. (57.17), (57.18) ниже), запишем

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = -\frac{r}{4\rho_L^2(z)}, \quad \rho_L(z) = \frac{p_z c}{eH(z)} \gg \left| \frac{H}{\nabla H} \right|, \quad (57.15)$$

и, воспользовавшись последним неравенством, найдем приближенное значение r' на выходе из поля:

$$\left(\frac{dr}{dz} \right)_{\text{вых}} \approx -\frac{r}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\rho_L^2(z)}. \quad (57.16)$$

Здесь координата z отсчитывается от центра катушки. Таким образом, частица, пройдя поле, отклоняется в плоскости (r, z) на угол, пропорциональный ее начальной координате r . Это означает, что пучок частиц, влетающих в такое поле параллельно его оси симметрии, соберется (см. рис. VII.3) в одну точку F на оси катушки, называемую фокусом. Поэтому рассматриваемое устройство называется *аксиальной магнитной линзой*, а расстояние OF — фокусным расстоянием. Нетрудно видеть, что фокусное расстояние равно

$$f = r / \left(-\frac{dr}{dz} \right), \quad \text{или} \quad f^{-1} = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\rho_L^2(z)}, \quad (57.17)$$

этот результат справедлив при

$$\frac{dr}{dz} \ll 1, \text{ или } f \gg r, \quad (57.18)$$

что в данном случае хорошо выполняется, поскольку протяженность поля катушки порядка ее диаметра D , поэтому

$$f^{-1} \sim \frac{D}{4\rho_L^2}, \text{ и } \frac{r}{f} \sim \frac{Dr}{4\rho_L^2} \ll 1. \quad (57.19)$$

Именно условие (57.18) и позволяет принять в (57.16) координату частицы r постоянной при пересечении поля ($\Delta r \sim rD/f \sim rD^2/4\rho_L^2 \ll r$), а скорость $v_z \approx v$ ($p_z \approx p$). Такая линза называется *тонкой*.

В § 89 будет показано, что такая система способна передавать изображение (в данном случае с помощью пучка заряженных частиц — «электронная оптика»).

Задача 3. Описать движение частицы, влетающей в цилиндрический соленоид параллельно его оси, если диаметр соленоида D много меньше лармовского радиуса частицы в поле соленоида.

Поскольку граница поля тонкая, движение частицы в области однородного поля описывается уравнением (57.15) с постоянными H и ρ_L . Решение этого уравнения при заданных выше начальных условиях есть

$$r(z) = r(0) \cos \frac{z}{2\rho_L}. \quad (57.20)$$

Таким образом, частица касается оси в точках $z_n = (2n+1)\pi\rho_L$. Этот результат становится очевидным, если рассмотреть движение частицы в плоскости (r, θ) и учесть, что при пересечении тонкой границы поля частица согласно (57.4) приобретает азимутальный импульс $p_\theta = -eHr/2c$, так что $r = 2\rho_\perp = 2|p_\theta|c/eH$ — частица в плоскости (r, θ) описывает окружность, радиус которой $\rho_\perp$ точно вдвое меньше координаты частицы на входе в соленоид (рис. VII.4). Конечно, здесь мы пренебрегли углом $\Delta r' \sim rD/\rho_L^2$ и смещением $\Delta r \sim rD^2/\rho_L^2$, набираемыми частицей при пересечении границы. На выходе из соленоида длины l траектория частицы будет направлена под углом.

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_{\text{вых}} = -\frac{r(0)}{2\rho_L} \sin \frac{l}{2\rho_L}$$

к оси соленоида. Поскольку этот угол пропорционален $r(0)$, то такой соленоид также фокусирует поток частиц. Он является аналогом толстой линзы (см. § 90).

Задача 4. Оценить фокусное расстояние тонкой аксиальной электростатической линзы (рис. VII.5).

Поле линзы обладает аксиальной симметрией, поэтому аналогично (57.2) можно записать

$$E_r = -\frac{1}{r} \int_0^r r' dr' \frac{dE_z}{dz} \approx -\frac{r}{2} \frac{dE_0}{dz},$$

где $E_0(z)$ — поле на оси линзы. Из уравнения движения нерелятивистской частицы, пересекающей линзу,

$$m\ddot{r} = eE_r$$

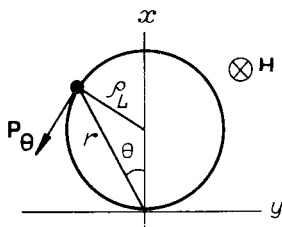


Рис. VII.4. Движение частиц в соленоиде (плоскость (r, θ)).

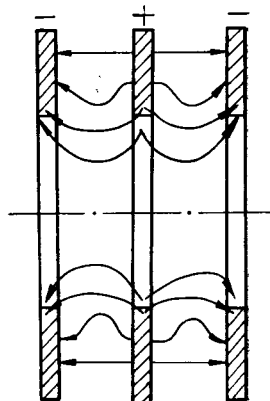


Рис. VII.5. Схема аксиальной электростатической линзы.

найдем изменение ее радиальной скорости на выходе из линзы

$$\Delta v_r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e}{m} E_r \frac{dz}{v_z} \approx -\frac{er}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v_z} \cdot \frac{dE_0}{dz} dz \approx -\frac{er}{2m} \left\{ \frac{E_1}{v_{\text{вх}}} - \frac{E_1 - E_2}{v} - \frac{E_2}{v_{\text{вых}}} \right\},$$

где $v_{\text{вх}} = v_{\text{вых}}$ и v — значения z -компоненты скорости частицы на входе в линзу, выходе из нее и вблизи центральной диафрагмы соответственно, E_1 и E_2 — средние значения напряженности поля на оси линзы в ее левой и правой половинках. Поскольку $E_{1,2} = \pm U/d_{1,2}$, где U , $d_{1,2}$ — разность потенциалов и расстояния между диафрагмами линзы, а $v \approx v_{\text{вх}} + (eU/2mv_{\text{вх}})$, то

$$\frac{\Delta v_r}{v_{\text{вх}}} \approx -\frac{r}{8} \left(\frac{eU}{W_0} \right)^2 \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right),$$

W_0 — кинетическая энергия частицы ($W_0 \gg eU$). Отсюда аналогично (57.17) получим

$$f^{-1} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{eU}{2W_0} \right)^2 \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right).$$

Такая линза пригодна только для фокусировки частиц невысокой энергии, так как в этом случае при технически реализуемых напряженностях полей фокусное расстояние еще не слишком велико. Например, для $W_0 = 100$ кэВ, $d_1 = d_2 = 1$ см и $E \sim 10$ кВ/см фокусное расстояние составляет 4 м. Нарушение условия $eU \ll W_0$ приводит к нелинейной зависимости Δv_r от r , в результате чего фокусное расстояние становится функцией координаты r (абберации линзы).

Рассмотренные выше линзы являются относительно слабыми, длиннофокусными. Это связано с квадратичным характером зависимости фокусного расстояния от малого параметра — отношения энергии (импульса) частицы к напряженности поля в линзе (см. (57.17), (57.19)). Поэтому аксиальные линзы применяются для фокусировки пучков частиц относительно невысоких энергий. Для фокусировки релятивистских частиц применяются линзы с чисто поперечными полями. Подобная «идеальная» магнитная линза должна обладать строго азимутальным полем, линейно возрастающим с радиусом. Однако создать такое поле в пространстве, свободном от тока, не-

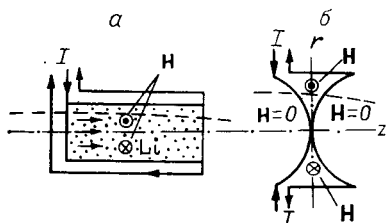


Рис. VII.6. Схема литиевой (а) и параболической (б) линз.

Стрелками показано растекание тока, штриховой линией — траектория частицы.

возможно, так как это противоречит уравнению Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ ($\oint (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \text{const}$). Для ультрарелятивистских частиц, способных проходить значительные толщины вещества без существенных потерь энергии, возможно решение в виде литиевых и параболических линз, предложенных Будкером (рис. VII.6). Первая из них — цилиндр с током постоянной плотности, выполненный из легкого металла — лития в тонкой стальной оболочке, вторая — параболоид вращения.

Задача 5. Найти фокусное расстояние тонких литиевой и параболической линз.

В литиевой линзе $H_0 = 2Ir/ca^2$, a — радиус цилиндра. Частица ($v \approx c$) в линзе набирает угол $dr/dz = -2eI/r/c^2a^2$, откуда

$$f^{-1} = \frac{2eI}{pc^2} \cdot \frac{l}{a^2}.$$

Для параболической линзы поле между токонесущими поверхностями есть $H_0 = 2I/cr$, а угол, набранный частицей при пересечении линзы, линейно

растет с радиусом: $\frac{dr}{dz} = -\frac{e}{pc} \int_{-z}^z H_0 dz = -\frac{4eI}{pc^2} \alpha r$, так что

$$f^{-1} = \frac{4eI}{pc^2} \alpha,$$

где α — постоянная параболоида вращения $z = \alpha r^2$.

Другим возможным решением является применение полей квадрупольной конфигурации. Линзы с такими полями фокусируют по одному направлению и дефокусируют по другому (задача 6). Пара (дублет) квадрупольных линз обладает только фокусирующими свойствами (см. § 90).

Задача 6. Найти фокусное расстояние тонкой квадрупольной линзы (рис. VII.7).

Поле магнитной квадрупольной линзы, полюса которой ограничены гиперболическими поверхностями $y = \pm a^2/2x$ ($2a$ — минимальное расстояние между противоположными полюсами), можно найти, введя скалярный магнитный потенциал $\Psi(x, y) = -Gxy$. Тогда $H_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = Gy$, $H_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -Gx$, т. е. константа G есть градиент поля. Уравнения движения частицы в плоскости (x, y) :

$$\gamma m_0 \ddot{x} = \frac{e}{c} \dot{z} H_y, \quad \gamma m_0 \ddot{y} = -\frac{e}{c} \dot{z} H_x \quad (57.21)$$

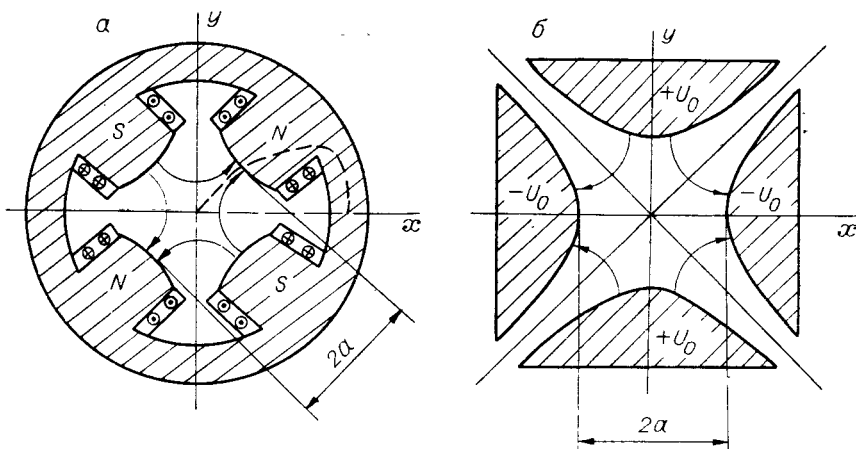


Рис. VII.7. Схемы магнитной (а) и электростатической (б) квадрупольных линз.

Траектории частиц перпендикулярны плоскости рисунка. Штриховой линией показан контур интегрирования для нахождения поля.

дают в приближении тонкой линзы

$$f_{x,y}^{-1} = \mp \frac{eGl}{pc}. \quad (57.22)$$

Связь между градиентом поля линзы и током I в ее обмотках найдем из закона циркуляции поля, выбрав в качестве контура интегрирования отрезки линий $x = y$ и $y = 0$ и пренебрегая полем в ярме (см. рис. VII.7, а):

$$\int_0^a H_l dl = G \frac{a^2}{2}, \quad G = \frac{8\pi I}{ca^2}. \quad (57.23)$$

Поле электростатической линзы (см. рис. VII.7, б) описывается потенциалом $\varphi(x, y) = -G(x^2 - y^2)$.

Аналогично найдем

$$E_x = Gx, \quad E_y = -Gy, \quad f_{x,y}^{-1} = \mp \frac{eGl}{\beta pc}, \quad G = \frac{2V_0}{a^2}, \quad (57.24)$$

где $\beta = v/c$.

При выборе знаков токов и потенциалов полюсов в соответствии с рис. VII.7 обе линзы дефокусируют по x и фокусируют по y .

С помощью электромагнитного поля можно создавать и другие устройства, действующие аналогично оптическим зеркалам и призмам, т. е. отражающие или отклоняющие заряженные частицы. Аналогия между геометрической оптикой и механикой не связана только лишь с «похожестью» действия тех или иных устройств — в ее основе лежат более общие свойства движения электромагнитных волн и заряженных частиц (см. § 88). В частности, поэтому многие представления, развитые в геометрической оптике, были перенесены на появившуюся значительно позднее оптику заряженных частиц.

§ 58. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ФАЗОВОГО ОБЪЕМА ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В предыдущем параграфе мы видели, что с помощью электромагнитного поля можно производить различные преобразования пучков заряженных частиц — сжимать или расширять их, отклонять, изменять энергию частиц и т. д. При этом изменяются как координаты частиц, т. е. размер пучка, так и их скорости (импульсы), в частности угловая расходимость пучка. Оказывается, что все такие изменения не являются произвольными, а подчиняются некоторым общим закономерностям, не зависящим от конкретного вида и величины электромагнитного поля. Эти закономерности проявляются при анализе движения частиц в шестимерном пространстве координат-импульсов $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, которое называется фазовым пространством.

Можно записать уравнение непрерывности для плотности заряда в шестимерном пространстве и шестимерной плотности тока, аналогично тому, как это сделано в трехмерном (координатном) пространстве (см. § 20):

$$\frac{\partial \rho_6}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_6 = 0, \quad (58.1)$$

$$\rho_6 = \lim_{\Delta V_6 \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V_6}, \quad \mathbf{j}_6 = \rho_6 \mathbf{v}_6, \quad \mathbf{v}_6 = \{\mathbf{v}, \dot{\mathbf{p}}\}.$$

Здесь индексом «6» обозначены шестимерные величины, без индекса — трехмерные, а векторы относятся к соответствующему пространству. Выясним, как зависит ρ_6 от времени. Для этого преобразуем полную производную:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_6}{dt} &= \frac{\partial \rho_6}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \rho_6}{\partial x_\alpha} \dot{x}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \rho_6}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha = \\ &= \left\{ \frac{\partial \rho_6}{\partial t} + \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho_6 \dot{x}_\alpha) + \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} (\rho_6 \dot{p}_\alpha) \right\} - \\ &- \rho_6 \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \dot{p}_\alpha}{\partial p_\alpha} \right) = - \rho_6 \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \dot{p}_\alpha}{\partial p_\alpha} \right). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что выражение в фигурных скобках есть левая часть уравнения непрерывности (58.1). Далее, компоненты трехмерной скорости $\dot{x}_\alpha$ однозначно связаны с компонентами импульса p_α ($p_\alpha = \gamma m \dot{x}_\alpha$), т. е. являются функциями только координат p_α , но не x_α . Поэтому $\partial \dot{x}_\alpha / \partial x_\alpha = 0$. Вторую часть оставшейся суммы можно записать в трехмерных величинах:

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \dot{p}_\alpha}{\partial p_\alpha} = \left(\nabla_p, e\mathbf{E} + \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \right).$$

Электрическое и магнитное поля — функции координат x_a , поэтому $\partial E_a / \partial p_a = \partial H_a / \partial p_a = 0$, и в рассматриваемом выражении остается только смешанное произведение $(\nabla_p v, (\mathbf{e}_v \times \mathbf{H}))$, где $\mathbf{e}_v = \mathbf{v}/v$ — единичный вектор, направленный вдоль $\mathbf{v}$. Наконец,

$$\nabla_p v = \sum_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \frac{\partial v}{\partial p_{\alpha}} = \frac{1}{\gamma^3 m} \cdot \frac{\mathbf{p}}{p} \equiv \frac{\mathbf{e}_v}{\gamma^3 m},$$

так что смешанное произведение содержит два одинаковых сомножителя $\mathbf{e}_v$ и, значит, равно нулю. Таким образом,

$$\frac{d\rho_6}{dt} = 0, \quad \rho_6 = \text{const}, \quad (58.2)$$

т. е. плотность заряда в шестимерном фазовом пространстве есть интеграл движения. В пучке конечных размеров число частиц постоянно:

$$N = \int \rho_6 d^3 x d^3 p = \text{const}. \quad (58.3)$$

Записывая это соотношение через среднюю плотность $\bar{\rho}_6$ и учитывая, что $\bar{\rho}_6 = \text{const}$, получим закон сохранения фазового объема пучка частиц (Лиувилль, 1838 г.):

$$\Gamma = \int d^3 x d^3 p = \text{const}. \quad (58.4)$$

Это означает, что в процессе движения пучка его фазовый объем может только деформироваться, но не может изменяться. Например, пучок частиц в свободном пространстве изменяет только свои геометрические размеры (в пренебрежении взаимодействием частиц), а импульсы частиц остаются постоянными. Проекция фазового объема на любую из координатных плоскостей изменяется при этом независимо, так что площадь каждой проекции остается постоянной. В этом случае принято различать два поперечных $((x, p_x)$ и $(y, p_y))$ и продольный (z, p_z) фазовые объемы. Задачи 1, 2 ниже дают примеры применения рассмотренного закона сохранения.

Задача 1. Описать деформацию фазового объема пучка при его фокусировке тонкой линзой. Найти положение и величину минимального размера (кроссовера) пучка. Считать, что на расстоянии a от линзы поперечный фазовый объем пучка имеет вид прямоугольника (рис. VII.8), система аксиально-симметричная.

Поведение поперечного фазового объема пучка удобнее в данном случае описывать в переменных «координата — угол» (рис. VII.8):

$$r, r' \equiv \frac{dr}{dz} = \frac{p_x}{p_z},$$

где r' — угол между импульсом частицы и осью z . Тогда координата и угол частицы перед входом в линзу есть

$$r_a = r_0 + r'_0 a; \quad r'_a = r'_0,$$

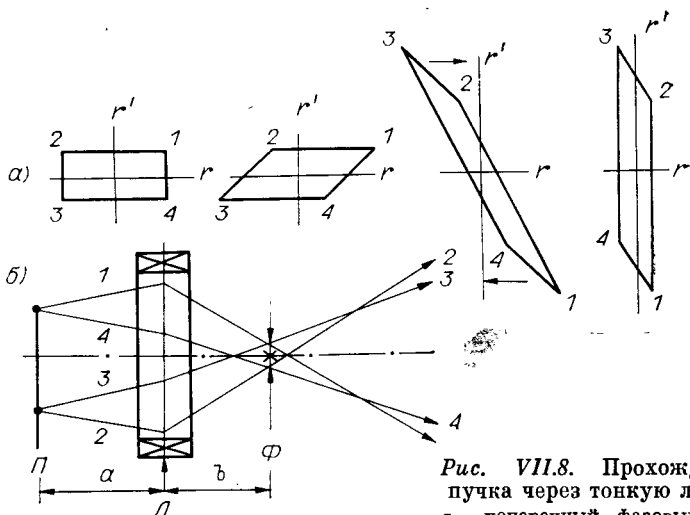


Рис. VII.8. Прохождение пучка через тонкую линзу.

a — поперечный фазовый объем пучка в исходном состоянии; Π — исходный пучок («предмет»), L — линза, Φ — фокальная плоскость, * — фокус; номерами помечены частицы и их траектории в фазовом и координатном пространствах.

где r_0, r'_0 — начальные параметры траектории. За линзой (см. 57.17))

$$r_L = r_a; \quad r'_L = r'_a - \frac{r_a}{f},$$

и, наконец, на расстоянии b от линзы

$$r_b = r_L + r'_L b = r_0 \left(1 - \frac{b}{f}\right) + r'_0 \left(a + b - \frac{ab}{f}\right). \quad (58.5)$$

Кроссовер пучка образуется в точке, где координаты частиц 1 и 2 (а также 3 и 4) одинаковы. Поскольку для частиц 1, 2 значения r_0 и r'_0 соответственно равны

$$r_{01} = r_{0\max}, \quad r'_{01} = r'_{0\max}, \quad r_{02} = -r_{0\max}, \quad r'_{02} = r'_{0\max},$$

то из условия $r_{b1} = r_{b2}$ получим

$$b = f, \quad r_{b1} = r_{b2} = -r_{b3} = -r_{b4} = r'_{0\max} f. \quad (58.6)$$

Таким образом, кроссовер пучка образуется в фокальной плоскости, а размер кроссовера определяется угловым размером пучка и фокусным расстоянием линзы. Для образования кроссовера (фокусировки пучка) линза должна быть достаточно короткофокусной: нужно, чтобы $r_{L1} < 0$, т. е. $f < a + r_0/r'_0$.

Отметим, что на расстоянии b^* от линзы, таком что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b^*} = \frac{1}{f}, \quad (58.7)$$

координаты частиц не зависят от направлений их траекторий в плоскости r'_0 . Это означает, что частицы, проходящие через одну и ту же точку плоскости Π , вновь соберутся в точку в плоскости b^* , где возникает изображение пучка.

Задача 2. Описать изменение продольного фазового объема сгустка нерелятивистских заряженных частиц после пересечения ими короткого участ-

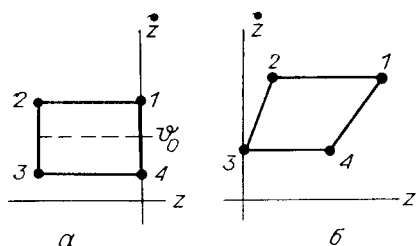


Рис. VII.9. Деформация продольного фазового объема сгустка частиц при прохождении ускоряющей разности потенциалов.

a — фазовый объем сгустка на входе в поле; $б$ — на выходе; точками отмечены границы сгустка.

ка ускоряющего поля. Считать начальный разброс частиц по скоростям и изменение энергии частиц при ускорении малыми.

Примем, что продольный фазовый объем сгустка на входе в поле ($z = 0$) представляет собой прямоугольник $l_0 \times 2\Delta v_0$ (рис. VII.9). После ускорения скорость частицы примет значение $v_{\text{вых}} = \sqrt{v_{\text{нач}}^2 + \varepsilon v_0^2}$, $\varepsilon = 2eU/mv_0^2$, где v_0 — средняя скорость частиц на входе. К моменту, когда наиболее медленная частица задней границы сгустка (точка 3, см. рис. VII.9) пройдет ускоряющий участок, частица ($z_{\text{нач}}, v_{\text{нач}}$) уйдет от участка на расстояние

$$z_{\text{вых}} = \sqrt{v_{\text{нач}}^2 + \varepsilon v_0^2} \left(\frac{l_0}{v_0 - \Delta v_0} - \frac{z_{\text{нач}}}{v_{\text{нач}}} \right), \quad (58.8)$$

и фазовый объем сгустка на выходе примет вид, показанный на рис. VII.9, б. При $\Delta v_0/v_0 \leq 0,2$ все границы объема практически прямолинейны, и его величина на выходе

$$\Gamma_{\text{вых}} = m \left(v_{\text{вых}}^{(1)} - v_{\text{вых}}^{(2)} \right) \frac{z_{\text{вых}}^{(1)} - z_{\text{вых}}^{(2)} - z_{\text{вых}}^{(3)} + z_{\text{вых}}^{(4)}}{2}.$$

Подставляя сюда значения $v_{\text{вых}}^{(i)}$ и $z_{\text{вых}}^{(i)}$, получим после соответствующих вычислений

$$\Gamma_{\text{вых}} = \Gamma_{\text{вх}} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta v_0}{v_0} \right)^4 + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\Delta v_0}{v_0} \right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} \right\},$$

т. е., с точностью до членов четвертого порядка малости по $\Delta v_0/v_0$ (что превышает принятую точность аппроксимации границ прямыми), фазовый объем сгустка сохраняется.

Глава VIII

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 59. РАДИОВОЛНЫ

Радиоволны были открыты и детально изучены экспериментально немецким физиком Герцем (1888 г.). Толчком к его открытию послужила теория Максвелла, предсказывающая существование и свойства электромагнитных волн, а также электромагнитную природу света. Подчеркнем, что опыты Герца были не просто проверкой

одной из теорий, они доказали реальность электромагнитного поля и послужили фундаментом современных представлений об электромагнитных явлениях, а также открыли дорогу их практическим применениям, которые сегодня так изменили условия нашего существования.

Интересно отметить, что сам Герц не только не думал о практическом применении своего открытия, но и отрицал возможность использования радиоволн для связи на расстоянии. Эти возможности ясно понимал другой физик того времени — англичанин Крукс, изложивший в 1892 г. главные, по его мнению, особенности метода радиосвязи, сохранившиеся и до сих пор (в частности, основу современной радиосвязи — избирательность по частоте). Крукс четко сформулировал также основные технические проблемы, которые предстояло решить для практического осуществления радиосвязи. Начало этому важнейшему применению электромагнитных явлений было положено изобретениями Попова и Маркони (1896 г.). Бурное развитие радиотехники началось после 1901 г., когда удалось осуществить первую межконтинентальную радиосвязь Европа — Америка. Основное применение радиоволн остается неизменным. Однако в связи с бурным развитием радиотехники, существенно расширились возможности радиосвязи. Появились телевидение и радиолокация, большие успехи достигнуты в области дальней (космической) радиосвязи на расстояния более миллиарда километров. Интенсивно развивается одна из областей космофизики — радиоастрономия. До недавнего времени наблюдение за небесными телами производилось лишь в оптическом диапазоне. Однако оказалось, что многие «активные» небесные тела — звезды, туманности, квазары, пульсары и пр. — излучают электромагнитные волны в широком диапазоне. Кроме того, были обнаружены «невидимые» источники радиоизлучения, так что картина неба в радиодиапазоне существенно отличается от привычной.

Основной метод генерации радиоволн — возбуждение собственных колебаний в LC -контуре или в резонаторе с последующим их усилением и излучением в пространство через специальное устройство — антенну. Характерной особенностью такого метода является генерация волны, близкой к монохроматической. В конечном счете это связано с использованием явления резонанса как в генераторах, так и в приемниках радиоволн. Методы регистрации принципиально те же: в антенне наводятся электромагнитные колебания, которые затем усиливаются (резонансно) и обрабатываются радиоприемником.

Основной метод передачи информации по радио — модуляция «несущей» радиоволны. Чаще всего применяется амплитудная модуляция, на которой работает большинство радиостанций, а также частотная модуляция. Модулированная волна, конечно, уже не монохроматична, однако, как мы увидим дальше (см. § 79), занимаемую ей полосу частот можно сделать относительно малой ($\Delta\omega \ll \omega$). Благодаря этому возможна одновременная независимая работа многих радиостанций, что лежит в основе современной радиосвязи.

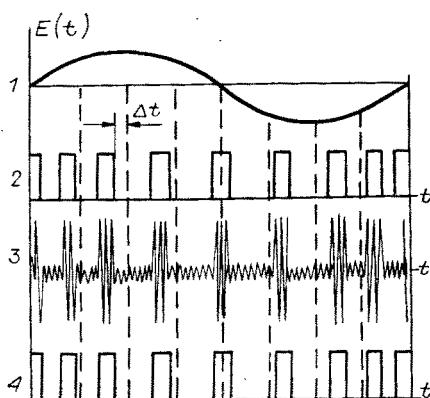


Рис. VIII.1. Фазоимпульсная (широтно-импульсная) модуляция.

1 — передаваемый сигнал; 2 — модулирующие импульсы; 3 — сигналы на выходе радиостанции (на входе приемника); 4 — импульсы в приемнике после ограничения и детектирования.

Соответственно важнейшее свойство радиоприемника — его избирательность, т. е. способность регистрировать радиоволны только в узкой полосе частот.

Подчеркнем, что радиосвязь с помощью почти монохроматических волн, конечно, не явля-

ется единственно возможной. Просто такой метод оказался технически наиболее эффективным благодаря применению резонанса. Отметим, что в настоящее время все большее распространение получают устройства, применяющие совсем немонахроматические волны. Они получаются, например, с помощью особой так называемой фазоимпульсной (или широтно-импульсной) модуляции (рис. VIII.1). Радиостанция излучает пакеты одинаковых прямоугольных видеопульсов, которые смещаются относительно некоторых фиксированных (реперных) моментов времени на интервалы Δt , пропорциональные мгновенному значению передаваемого сигнала. В приемнике после обычного детектирования воспроизводится последовательность импульсов, из которой в специальном фазовом детекторе выделяется полезный (передаваемый) сигнал. Селективность этой системы связана с определенным законом расположения реперных точек. Основным ее преимуществом является высокая помехоустойчивость, так как связь осуществляется в широкой полосе частот.

Другим интересным примером может служить так называемая шумовая радиолокация, в которой используется непрерывный шумовой сигнал с широким спектром.

Опыты с радиоволнами наглядно демонстрируют их оптические свойства: отражение, преломление, поляризацию, интерференцию и дифракцию. Именно такие опыты и были сделаны в свое время Герцем и позволили ему, в частности, установить электромагнитную природу света.

§ 60. ОПТИЧЕСКИЙ ДИАПАЗОН. ИСТОЧНИКИ СВЕТА

Оптика, как и механика, занимает умы людей на протяжении всего времени существования человеческой цивилизации. Основные законы геометрической оптики — прямолинейность световых лучей, законы отражения и преломления — были известны еще во времена Евклида (300 лет до н. э.), но только в наше время, благодаря трудам Максвелла, Герца и Эйнштейна, удалось построить единую кар-

тину электромагнитных волн, включив в нее и видимый свет. Последний представляет собой самый важный для человека диапазон электромагнитных волн, в котором мы получаем наиболее существенную информацию об окружающем нас мире.

В оптике выделяют три поддиапазона:

$$\begin{aligned} \text{инфракрасные лучи (ИК)} \quad & 7400 \text{ \AA} < \lambda < 1 \text{ мм}, \\ \text{световые лучи} \quad & 4000 \text{ \AA} < \lambda < 7400 \text{ \AA}, \\ \text{ультрафиолетовые лучи (УФ)} \quad & 100 \text{ \AA} < \lambda < 4000 \text{ \AA}. \end{aligned}$$

Методы генерации в оптическом диапазоне связаны с возбуждением квантовых осцилляторов — электронов в атомах, молекулах или кристаллах.

Все источники оптического излучения можно разбить на два больших класса:

1. Некогерентные (тепловые) источники, важнейшим из которых является наше Солнце.

2. Когерентные источники, или генераторы оптического излучения, которые называются обычно лазерами или ОКГ (оптическими квантовыми генераторами).

Тепловым источником видимого света можно считать любое тело, нагретое выше, примерно 500°C (электроплитка) при условии, что оно непрозрачно для собственного излучения (так называемое излучение черного тела). В этом случае говорят о тепловом равновесии тела с собственным излучением, т. е. температура тела равна температуре излучения. Спектр теплового излучения непрерывный, с максимумом, смещающимся в сторону коротких волн обратно пропорционально температуре ($T\lambda_{\max} \approx 2,9 \cdot 10^7 \text{ \AA} \cdot \text{K}$ — закон Вина). На рис. VIII.2 приведен спектр солнечного излучения. Максимум излучения приходится на $\lambda_{\max} \approx 5000 \text{ \AA}$, что соответствует температуре поверхности Солнца $T_c = 5800 \text{ K}$. При $T \approx 10^6 \text{ K}$ (температура огненного шара после взрыва атомной бомбы) $\lambda_{\max} \approx 30 \text{ \AA}$, т. е. максимум излучения находится уже в области мягкого рентгена. В рассмотренном случае интенсивность излучения зависит только от температуры и пропорциональна четвертой степени последней (закон Стефана — Больцмана). При $T = 6000 \text{ K}$ мощность излучения составляет $7,35 \text{ кВт}$ с квадратного сантиметра излучающей поверхности, а при $T = 10^6 \text{ K}$ эта мощность (яркость огненного шара) возрастает почти в миллиард раз. Примерно такую же яркость, а значит, и температуру имеют в течение нескольких дней так называемые сверхновые звезды, возникающие вследствие взрыва обычной звезды.

Другим примером некогерентного источника является газовый разряд (неоновая рек-

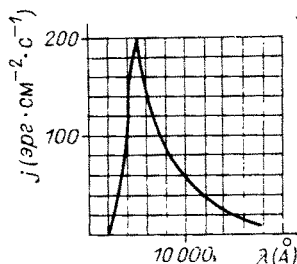


Рис. VIII.2. Спектр солнечного света.

лама, электрическая дуга и пр.). Здесь, как правило, нет равновесия с излучением (газ разрежен), так что спектр может быть самый разнообразный, в том числе и линейчатый. Интенсивность излучения газового разряда зависит не только от температуры плазмы, образующейся при разряде, но и от других условий разряда, и может быть значительно выше, чем у тепловых источников.

Основной особенностью световых источников газоразрядного типа является низкая температура основной массы газа. При этом возбуждение атомов происходит за счет небольшой доли ускоренных в газовом разряде электронов, температура которых много выше температуры плазмы. Отсюда название источников — лампы «холодного» света.

К этому же классу некогерентных источников относятся и люминесцентные источники, преобразующие один вид светового излучения в другой. Обычно люминесцентные источники (лампы) возбуждаются электрическим разрядом внутри колбы, стенки которой покрыты специальным веществом — люминофором, имеющим нужный спектр излучения (обычно — сплошной). Люминесцентные лампы используются как в видимом свете, так и в УФ-лучах. Преимущество люминесцентных источников света — их высокий КПД, достигающий 60 лм/Вт, или 30% (видимая часть спектра). Для сравнения укажем, что КПД ламп накаливания составляет всего около 15 лм/Вт, или 7,5%, из-за относительно низкой температуры нити — около 2500 К. Максимум излучения лежит при этом в инфракрасной области ($\lambda_{\text{max}} \approx 12000 \text{ \AA}$), так что лампы накаливания являются в основном источниками теплового излучения. Недостаток люминесцентных ламп при питании их переменным током — эффект мерцания (с частотой 100 Гц). Этот эффект можно заметить даже визуально при быстром движении глаза. Он оказывает вредное влияние на сетчатку глаза.

§ 61. ГЛАЗ

Самым важным, самым древним и до сих пор одним из самых совершенных приборов, регистрирующих свет, является человеческий глаз. Предельная чувствительность глаза по измерениям Вавилова [11] соответствует поглощению в сетчатке всего лишь около 10 квантов света! Правда, для этого в зрачок глаза должно попасть около 100 квантов, что указывает, по-видимому, на некоторую «недоработанность» этого прибора. Замечательная особенность глаза — его способность работать в огромном диапазоне интенсивности от 10^{-16} до 10^{-4} Вт. Для сравнения укажем, что интенсивность прямого солнечного света, попадающего в зрачок диаметром 2 мм, составляет около $4 \cdot 10^{-3}$ Вт. Такой огромный диапазон интенсивности перекрывается частично благодаря специальной адаптации глаза, т. е. перестройке режима его работы, включающей, в частности, изменение диаметра зрачка (быстрая адаптация), а также сложные биохимические процессы в сетчатке (медленная адаптация).

Однако адаптация сама по себе едва ли обеспечивала бы такой диапазон чувствительности, если бы не фундаментальная особенность работы всех органов чувств, выражающаяся в биофизическом законе Вебера — Фехнера: ощущение пропорционально логарифму интенсивности внешнего воздействия. Точнее, наблюдения показали, что минимально различимое изменение интенсивности воздействия (ΔI) пропорционально самой интенсивности (I):

$$\Delta S \approx A \frac{\Delta I}{I}, \quad (61.1)$$

где ΔS — минимально различимое изменение ощущения. По измерениям Фехнера (1860) для глаза человека $\Delta I/I \approx 10^{-2}$. Соотношение (61.1) можно представить в упомянутой выше интегральной форме:

$$S = A \ln \frac{I}{I_{\min}}, \quad (61.2)$$

где $I_{\min}$ — пороговая интенсивность воздействия. По-видимому, природа «выбрала» такой принцип работы всех органов чувств как раз для обеспечения максимального диапазона. Любопытно, что закон Вебера — Фехнера нашел свое отражение в специальной единице интенсивности звука — децибеле:

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}, \quad (61.3)$$

где I_0 — некоторая единичная интенсивность звука ($I \propto p^2$), соответствующая давлению $p_0 \approx 2 \cdot 10^{-10}$ бар, а L — относительная интенсивность в децибелах. Сейчас эта единица широко используется для измерения относительной интенсивности самых различных величин.

Механизм регистрации света глазом связан со специфическими фотохимическими реакциями в сетчатке. Светочувствительные элементы сетчатки состоят из 130 млн. палочек и 7 млн. колбочек. Палочки являются наиболее чувствительными элементами и позволяют видеть «серую» картину предметов при освещенности до 10^{-6} лк (люкс), что соответствует приблизительно приведенной выше пороговой чувствительности глаза. Это так называемое сумеречное зрение. Одной из замечательных особенностей глаза является его способность к цветовому зрению, которая реализуется с помощью колбочек. Однако чувствительность колбочки примерно в 1000 раз ниже, чем палочки, так что для цветового зрения нужна значительно большая интенсивность, чем для сумеречного. Колбочки обеспечивают также наилучшее пространственное разрешение изображения в глазе, так как в центральной ямке глазного дна (область наилучшего зрения с угловым размером $1 \div 1,5^\circ$) расположены исключительно колбочки с плотностью, достигающей 150 тыс./мм². Это обеспечивает нормальную остроту зрения около одной угловой минуты, или около 0,1 мм на расстоянии нормального зрения 25 см.

Установлено, что существует три типа колбочек, максимумы спектральной чувствительности которых лежат соответственно в си-

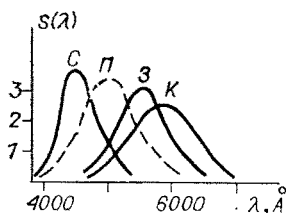


Рис. VIII.3. Относительная спектральная чувствительность элементов сетчатки глаза.

П — палочки, С, З, К — синие, зеленые, красные колбочки.

ней, зеленой и красной частях спектра (рис. VIII.3). Реакция каждого из трех видов колбочек на свет определяется функцией спектральной чувствительности $S_\alpha(\lambda)$ и может быть представлена интегралом:

$$r_\alpha = \int_0^\infty I(\lambda) S_\alpha(\lambda) d\lambda, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (61.4)$$

Анализируя относительные реакции колбочек ($r_1:r_2:r_3$), нервная система имеет возможность выявить некоторые спектральные характеристики света. Разумеется, эта операция неоднозначна, так как по трем величинам нельзя восстановить неизвестную функцию $I(\lambda)$. Это, тем не менее, не мешает различать с довольно высокой степенью точности монохроматические составляющие света, которые дают разное отношение реакций r_α . Спектральное разрешение глаза составляет около $15 \text{ \AA}$ в интервале $4400 \div 6400 \text{ \AA}$. Однако для света с более широким спектральным составом возникают неоднозначности. Характерный пример такой неоднозначности — дополнительные цвета. Известно, что существуют пары цветов, которые, будучи смешанными в определенных пропорциях, дают ощущение белого цвета; это оранжевый ($6000 \text{ \AA}$) и синий ($4900 \text{ \AA}$), зелено-желтый ($5636 \text{ \AA}$) и фиолетовый ($4330 \text{ \AA}$) и др. Поскольку в белом свете $I(\lambda) \approx \text{const}$, а для линии $I_n(\lambda) = I_n \delta(\lambda - \lambda_n)$, то уравнения для дополнительных цветов можно записать в виде

$$\begin{aligned} I_0 \int_0^\infty S_1(\lambda) d\lambda &= I_1 S_1(\lambda_1) + I_2 S_1(\lambda_2), \\ I_0 \int_0^\infty S_2(\lambda) d\lambda &= I_1 S_2(\lambda_1) + I_2 S_2(\lambda_2), \\ I_0 \int_0^\infty S_3(\lambda) d\lambda &= I_1 S_3(\lambda_1) + I_2 S_3(\lambda_2), \end{aligned} \quad (61.5)$$

где I_0, I_1, I_2 — интенсивности белого и дополнительных цветов соответственно. Естественно, что цветовое ощущение зависит лишь от отношения интенсивностей смешиваемых цветов (61.5). Задав λ_1 , можно найти, вообще говоря, из (61.5) значения $\lambda_2, I_1/I_2$ и I_0/I_2 , дающие ощущение белого цвета некоторой интенсивности I_0 . оказы-

вается, что дополнительные цвета связаны приближенно простым соотношением:

$$(\lambda_1 - 5655)(4978 - \lambda_2) = 22302, \quad (61.6)$$

где λ_1, λ_2 — длины волн в ангстремах.

Интересно, что для цвета с длиной волны в интервале $4980 \text{ \AA} < \lambda_1 < 5660 \text{ \AA}$ не существует дополнительного цвета с определенной длиной волны. Однако такой дополнительный цвет можно получить смешением красного и синего цветов, что дает так называемый пурпурный цвет. Аналогичным образом можно имитировать и любое другое цветовое ощущение, например чистый цвет. При имитации двумя цветами один из них не является произвольным, как это видно на примере имитации белого цвета. Чтобы осуществить имитацию любого цветового ощущения с помощью заранее заданных цветов, нужно, по крайней мере, три таких цвета. На этом и основаны, в частности, системы цветовой фотографии и цветового телевидения, а также искусственная окраска. В качестве «базисных» цветов обычно берут синий, зеленый и красный. Поскольку три величины r_α (61.4) характеризуют также интенсивность света, то собственно цветовое ощущение зависит от двух параметров. Его можно характеризовать цветовым тоном и насыщенностью цвета. Цветовой тон определяется, грубо говоря, длиной волны, а насыщенность зависит от примеси белого цвета. Максимальная насыщенность соответствует чистой спектральной линии, минимальная — белому цвету.

Во избежание недоразумений отметим, что линейные соотношения типа (61.5), определяющие законы смешения цветов, не противоречат логарифмическому закону Вебера — Фехнера (61.2) для восприимчивости глаза. Первые характеризуют физико-химическое действие света на каждый из трех рецепторов глаза, тогда как закон (61.2) связан с физиологическим процессом обработки информации мозгом.

Существование определенных пар дополнительных цветов является наиболее прямым доказательством «трехцветности» зрения. Действительно, для двух типов рецепторов два уравнения (61.5) имеют, вообще говоря, решения при любых λ_1, λ_2 . Это значит, что при подходящем соотношении интенсивностей I_1/I_2 два любых цвета были бы дополнительными. Именно так обстоит дело при дальтонизме — болезни зрения, при которой два типа рецепторов слипаются и зрение становится «двухцветным». С другой стороны, при большем числе рецепторов потребовалось бы большее число дополнительных цветов для достижения ощущения белого цвета при их смешении. Это связано с тем, что число уравнений системы (61.5) равно числу различных типов рецепторов.

Интересен вопрос, почему природа не ограничилась «двухцветным» зрением для человека, что было бы в принципе достаточно. Конечно, на этот вопрос никогда нельзя будет ответить определенно, так как мы никогда не узнаем, что «имела в виду» природа, создавая человека. Однако можно высказать предположение, что

трехцветность необходима для получения высокого спектрального разрешения глаза, важного для анализа окружающей обстановки. Средний глаз различает около 2000 спектральных оттенков. Это число складывается примерно из 200 цветовых оттенков, что приблизительно соответствует спектральному разрешению глаза, и около 10 ступеней цветовой насыщенности для каждого из них (см. [12]). При двухцветном зрении с приемниками того же качества это число сокращается, по крайней мере на порядок. Это и есть дальтонизм — дефект зрения, иногда совершенно недопустимый (например, для водителя машины). С другой стороны, из трех цветовых рецепторов один служит фактически для калибровки интенсивности. Кажалось бы, что такую информацию мозг мог бы извлекать и из палочек. Однако в основной области цветового восприятия их нет. Почему?

§ 62. ИЗМЕРЕНИЕ ЦВЕТА, ИЛИ КОЛОРИМЕТРИЯ

Цветовые измерения (колориметрия — не путать с калориметрией, тепловыми измерениями) необходимы в технике искусственной цветопередачи, например для цветной фотографии (кино) или цветного телевидения. Идея измерения цвета, высказанная еще Максвеллом, основана на имитации цветовых ощущений смесью трех специально выбранных цветов в различных пропорциях. В качестве эталонных сейчас приняты три спектрально чистых цвета: красный — $7000 \text{ \AA}$, зеленый — $5461 \text{ \AA}$, синий — $4358 \text{ \AA}$. Эти цвета можно смешивать в различных пропорциях в специальном приборе — колориметре. Сравнивая цветовые ощущения от такой смеси и заданного цвета, некоторый «стандартный наблюдатель» определяет необходимые пропорции основных цветов. Так как цветовое ощущение полностью определяется набором реакций чувствительных элементов глаза r_α (61.4), то условие совпадения ощущений от измеряемого цвета и смеси основных цветов можно записать аналогично (61.5) в виде

$$r_i = \int_0^\infty I(\lambda) S_i(\lambda) d\lambda = S_i(\lambda_k) q_k. \quad (62.1)$$

Здесь q_k — интенсивности эталонных (смешиваемых) цветов, $I(\lambda)$ — спектральное распределение интенсивности измеряемого цвета $S_i(\lambda_k)$ — чувствительность i -го рецептора глаза к свету длины волны λ_k . Таким образом, три числа — q_1, q_2, q_3 — можно рассматривать как количественную характеристику цвета. В геометрической интерпретации цвет можно наглядно представлять себе, как некоторый «вектор», с «координатами» q_k в некотором трехмерном «пространстве». Базисными векторами этого пространства являются три основных цвета: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Чтобы исключить интенсивность, которая непосредственно не связана с цветом, обычно вводят нормированные координаты цвета:

$$Q_k = \frac{q_k}{q_1 + q_2 + q_3}, \quad Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1. \quad (62.2)$$

Отметим, что суммарная интенсивность смешиваемых цветов не равна вообще говоря, интенсивности измеряемого цвета $\left(\int_0^\infty I(\lambda) d\lambda \neq q_1 + q_2 + q_3 \right)$, так как чувствительность глаза зависит от длины волны. Например, изображение, рассматриваемое через желтый светофильтр, кажется более ярким, хотя он и поглощает часть света.

Естественно, что разные наблюдатели будут получать несколько различные значения координат для одного и того же цвета вследствие различий в кривых чувствительности рецепторов $S_i(\lambda)$. Особенно это касается области около 7000 Å (красный эталонный цвет), где чувствительность даже красного рецептора глаза очень мала. Поэтому в 1931 г. Международный осветительный комитет (МОК) определял «нормального наблюдателя» — в качестве характеристики его цветового зрения приняты средние значения цветовых координат спектрально чистых линий, полученные несколькими независимыми наблюдателями с «нормальным зрением». После этого измерение цвета можно производить без участия наблюдателя, например с помощью фотоумножителя с тремя светочувствительными трубками. Таким образом, исключаются субъективные ошибки при измерении цвета.

В качестве базисных можно использовать и другие цвета. В некоторых случаях это даже необходимо. Например, в цветной фотографии спектральные кривые чувствительности трех слоев фотоэмульсии должны обязательно перекрывать, чтобы охватить весь световой диапазон. Именно так обстоит дело для глаза (см. рис. VIII.3). Пусть три базисных цвета характеризуются некоторыми спектральными кривыми $J_i(\lambda)$. Тогда любой цвет эквивалентен некоторой смеси $J_i(\lambda)$:

$$J(\lambda) \leftrightarrow p_i J_i(\lambda). \quad (62.3)$$

Знак $\leftrightarrow$ означает здесь цветовую эквивалентность (эквиколоритность), или тождественность ощущений. Если имеются два цветовых базиса: $J_i(\lambda)$ и $\Phi_i(\lambda)$, то координаты любого цвета по этим базисам (p_i , φ_i) связаны условиями равенства реакций рецепторов глаза:

$$r_i = \int S_i(\lambda) p_k J_k(\lambda) d\lambda = \int S_i(\lambda) \varphi_k \Phi_k(\lambda) d\lambda, \quad (62.4)$$

которые можно сокращенно записать в виде

$$r_i = C_{ik} p_k = D_{ik} \varphi_k. \quad (62.5)$$

Матрицы C_{ik} , D_{ik} характеризуют реакции глаза на базисные цвета, например:

$$D_{ik} = \int S_i(\lambda) \Phi_k(\lambda) d\lambda. \quad (62.6)$$

Естественно, выбрать базисные цвета $\Phi_k(\lambda)$ таким образом, чтобы матрица D_{ik} оказалась диагональной:

$$D_{ik} = R \delta_{ik}, \quad (62.7)$$

где R — некоторая постоянная, имеющая размерность реакции рецептора. Физический смысл такого вида матрицы D_{ik} состоит в том, что каждый из базисных цветов действует только на один рецептор

$$X_i = \frac{r_i}{R}. \quad (62.8)$$

Такой базис получил название физиологического. Он был бы очень удобен в колориметрии, если бы кривые спектральной чувствительности рецепторов глаза $S_i(\lambda)$ были известны с хорошей точностью. Однако последние получаются до сих пор лишь с помощью косвенных данных, например путем сравнения цветовых ощущений людей с нормальным зрением и дальтоников. Поэтому для практических целей в колориметрии принят совершенно другой базис $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$, $Z(\lambda)$. Основные цвета его выбраны таким образом, чтобы максимально упростить цветовые расчеты. Координаты любого цвета в этом базисе нормированы обычным условием:

$$X + Y + Z = 1. \quad (62.9)$$

Так как цветовая эквивалентность определяется тремя независимыми равенствами, то цветовые координаты содержат три произвольных постоянных. Последние выбираются так, чтобы координаты «белого цвета» $I(\lambda) = \text{const}$ были равны: $X_w = Y_w = Z_w = 1/3$. В силу нормировки только две цветовых коор-

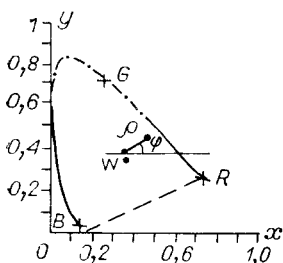


Рис. VIII.4. Диаграмма цветности.

Сплошная линия — область дополнительных цветов; штрихпунктирная — область, для которой нет дополнительных цветов; штриховая — область пурпурных цветов. Эталонные цвета: $R - 7000 \text{ \AA}$, $G - 5461 \text{ \AA}$, $B - 4358 \text{ \AA}$. Точка (ρ, ϕ) внутри граничной кривой соответствует смеси чистого и белого цветов; белый цвет $x = y = 1/3$, точка W .

динаты являются независимыми, и любой цвет можно представить точкой на так называемой диаграмме цветности (рис. VIII.4). Здесь X — координата, характеризующая, грубо говоря, «красную» составляющую света, а Y — «зеленую» составляющую. Третья координата $Z = 1 - X - Y$, не используемая в диаграмме цветности, соответствует «синей» составляющей. Сплошная кривая на диаграмме представляет монохроматические цвета. Крестиками отмечены три эталонных цвета. Штриховая прямая изображает пурпурные цвета — смесь фиолетового и красного цветов, соответствующих двум границам оптического диапазона. Вообще, из линейности цветовых соотношений (62.5) и условия нормировки (62.2) вытекает, что смесь двух любых цветов изображается точкой на прямой линии, соединяющей эти цвета, причем эта точка лежит между смешиваемыми цветами. Отсюда следует, в частности, что все цвета соответствуют на диаграмме точкам внутри линии монохроматических и пурпурных цветов, которую мы будем называть поэтому граничной кривой. Насыщенность цвета растет с удалением от белого и достигает максимума на граничной кривой.

Как видно из диаграммы, цвета основного базиса $X(1, 0, 0)$; $Y(0, 1, 0)$; $Z(0, 0, 1)$ расположены снаружи от граничной кривой и, следовательно, являются фиктивными, т. е. их нельзя реально получить. Это однако, не мешает использовать их в цветовых расчетах. Пусть, например, мы измеряем некоторый цвет $J(\lambda)$ колориметром, базисные цвета которого характеризуются стандартными координатами (в основном базисе $X_k(X, Y, Z)$):

$$J_i(\lambda) \leftrightarrow q_{ik}X_k(\lambda). \quad (62.10)$$

Иными словами, цветовой базис колориметра задается матрицей q_{ik} . Тогда, если координаты измеряемого цвета в колориметре равны p_i ,

$$J(\lambda) \leftrightarrow p_i J_i(\lambda), \quad (62.11)$$

стандартные координаты $X_i(X, Y, Z)$ можно найти из соотношения

$$J(\lambda) \leftrightarrow p_i J_i(\lambda) \leftrightarrow p_i q_{ik} X_k(\lambda), \quad (62.12)$$

откуда

$$x_k = p_i q_{ik}, \quad (62.13)$$

т. е. стандартные координаты цвета выражаются непосредственно через матрицу q_{ik} (62.10). Заметим, что в силу нормировки стандартных координат $\sum_k q_{ik} = 1$. Отсюда и из (62.13) находим $\sum_k x_k = \sum_i p_i \sum_k q_{ik} = \sum_i p_i = 1$, т. е. координаты нормированы.

Если в качестве базисных цветов взять три эталонных цвета, то матрица

$$q_{ik} = \begin{pmatrix} 0,735 & 0,265 & 0 \\ 0,274 & 0,717 & 0,009 \\ 0,167 & 0,008 & 0,825 \end{pmatrix}. \quad (62.14)$$

Рассмотрим теперь другую задачу. Пусть нам известны стандартные координаты некоторого цвета (x_i), и пусть мы хотим имитировать его с помощью каких-то трех основных цветов $J_k(\lambda)$. Как найти координаты такого цвета в базисе J_k ? Для этого нужно, очевидно, разрешить систему трех уравнений

(62.13) относительно p_k . Получим

$$p_k = x_i q_{ik}^{-1}, \quad (62.15)$$

где q_{ik}^{-1} — матрица, обратная q_{ik} , т. е. $q_{ik} q_{kl}^{-1} = \delta_{il}$. Обратная матрица существует, если детерминант

$$|q_{ik}| \neq 0. \quad (62.16)$$

Только тогда данные три цвета $J_k(\lambda)$ могут быть использованы в качестве базиса. Физический смысл этого условия состоит в том, что ни один из этих цветов не может быть представлен в виде смеси двух других. Иными словами, базисные цвета должны быть независимыми. Интересно отметить, что три любых монохроматических цвета являются независимыми и могут, следовательно, применяться в качестве базиса, что непосредственно следует из выпуклости граничной кривой на диаграмме цветности (см. рис. VIII.4).

В качестве примера решения обратной задачи найдем представление основного базиса $X_k(\lambda)$ через эталонные цвета. Обращая соотношение (62.10), получим

$$X_i(\lambda) \leftrightarrow q_{ik}^{-1} J_k(\lambda). \quad (62.17)$$

Матрица, обратная (62.14), имеет вид

$$q_{ik}^{-1} = \begin{pmatrix} 1,577 & -0,583 & 0,006 \\ -0,599 & 1,617 & -0,018 \\ -0,313 & 0,102 & 1,211 \end{pmatrix} \quad (62.18)$$

Заметим, что некоторые элементы этой матрицы отрицательны, что соответствует отрицательной интенсивности в сумме (62.17). Поэтому нельзя непосредственно создать цвета X_i , однако можно использовать их в измерениях косвенным образом, причем не только формально математически. Действительно, например, соотношение

$$X_1 \leftrightarrow 1,577J_1 - 0,583J_2 + 0,006J_3$$

эквивалентно другому соотношению

$$x_1 + 0,583J_2 \leftrightarrow 1,577J_1 + 0,006J_3,$$

которое осуществимо.

Цветное телевидение является хорошей иллюстрацией основных особенностей цветового зрения, которые оно грубо имитирует [13]. Пусть R , G , B — интенсивности красной, зеленой и синей компонент элемента изображения. В принципе можно было бы передавать отдельно все три сигнала, однако технически проще передавать два других сигнала — яркостный и цветовой. Первый из них передает суммарную яркость элемента изображения, связанную с интенсивностями цветовых компонент соотношением

$$V = 0,3R + 0,6G + 0,1B. \quad (62.19)$$

Значения коэффициентов определяются здесь главным образом спектральными характеристиками передающей и приемной аппаратуры. Цветовой сигнал $U(t)$ формируется согласно соотношениям

$$\begin{aligned} U &= \rho \cos(\omega_0 t + \varphi), \\ \rho^2 &= (R - V)^2 + (B - V)^2, \\ \operatorname{tg} \varphi &= (R - V)/(B - V), \end{aligned} \quad (62.20)$$

где ω_0 — несущая частота цветового сигнала. Основная характеристика цветового изображения — так называемый цветовой тон — зависит от фазы сигнала φ и задается некоторым отношением интенсивностей компонент изображения. Амплитуда сигнала ρ дает насыщенность цвета, которая определяется примесью белого цвета. При этом насыщенность тем больше, чем больше ρ . Если $\rho = 0$, то интенсивности всех трех компонент одинаковы ($R = G = B = V$), что соответствует белому (серому) цвету. Серый цвет может изменяться от

белого до черного в зависимости от относительной яркости соседних элементов изображения. Таким образом, при отсутствии цветового сигнала ($\rho = 0$) мы имеем черно-белое изображение.

Такая система цветопередачи в телевидении очень близка к механизму восприятия цвета глазом. Действительно, если на диаграмме цветности (см. рис. VIII.4) ввести новые полярные координаты с центром в точке W (белый цвет), то цветной тон будет определяться азимутальным углом ϕ , а насыщенность — радиусом ρ .

§ 63. ИСКУССТВЕННЫЕ ПРИЕМНИКИ СВЕТА

Наиболее чувствительными из искусственных приемников света являются электронно-оптические устройства — фотоэлектронный умножитель (ФЭУ) и электронно-оптический преобразователь (ЭОП), применяемые во всем оптическом диапазоне. В них используется усиление первоначального светового сигнала потоком электронов. Остановимся на устройстве этих приборов несколько подробнее.

ФЭУ позволяет преобразовать световой сигнал в электрический, пропорциональный потоку фотонов. Попадая через прозрачное окошко на светочувствительный слой (фотокатод), фотоны выбивают из него электроны, которые ускоряются в электрическом поле ФЭУ и «размножаются» при соударениях с электродами (динодами); материал динодов имеет коэффициент вторичной эмиссии $\sigma > 1$ (рис. VIII.5). Обычно диноды делают из сплавов медь — бериллий, медь — магний и т. д., для них $\sigma \sim 3 \div 10$. Коэффициент усиления ФЭУ достигает 10^6 , что позволяет регистрировать отдельные фотоны. Действительно, если выходная емкость порядка 100 пФ (см. рис. VIII.5), один фотоэлектрон создает на выходе сигнал в $10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} / 10^{-10} \approx 1,6$ мВ, что вполне надежно измеряется. Однако здесь имеется ограничение, связанное со статистическим характером фотоэффекта: в среднем на 10 фотонов, попавших на фотокатод, выходит 1 фотоэлектрон.

ЭОП применяется для получения изображения слабосветящихся объектов, излучающих в невидимой части оптического диапазона. Простейший однокамерный ЭОП показан на рис. VIII.6. Принцип его действия понятен из подписи к рисунку. Усиление яркости (в несколько десятков раз) происходит благодаря энергии, которую фотоэлектроны набирают в электрическом поле ЭОПа. Многокамерные ЭОПы, представляющие собой последовательно соединенные однокамерные, дают усиление до 10^8 раз, так что можно наблюдать вспышку от одного фотоэлектрона. ЭОПы, применяющиеся для ско-

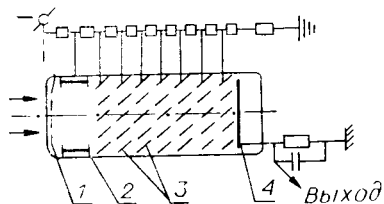
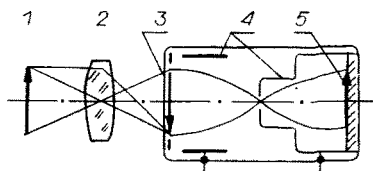


Рис. VIII.5. Схема фотоэлектронного умножителя (ФЭУ).

1 — фотокатод; 2 — фокусирующий электрод; 3 — диноды; 4 — анод.

Рис. VIII.6. Схема однокамерного электронно-оптического преобразователя (ЭОП).

1 — предмет; 2 — объектив, создающий изображение на фотокатоде 3; 4 — электроды, фокусирующие поток электронов; 5 — изображение, создаваемое электронами на люминесцентном экране.



ростной фотографии, имеют отклоняющие пластины, позволяющие перемещать изображение по экрану. Эти же пластины могут играть роль затвора. Временное разрешение таких систем достигает 10^{-9} с.

Наиболее простым регистратором света является болометр — термочувствительный элемент, регистрирующий интегральную (по спектру) интенсивность светового потока по тепловому эффекту. Как правило, это проводящий слой толщиной 0,1—1 мкм с зависящим от температуры сопротивлением.

Упомянем еще полупроводниковые фотоэлементы — фотодиоды и фотосопротивления, их характеристики зависят от освещения.

Один из наиболее распространенных методов регистрации световой информации — фотографирование. Механизм образования изображения связан с определенными химическими превращениями в фотоэмульсии (точнее, в кристаллах AgBr) под действием света. Хорошо известно, что простейшие фотоэмульсии, содержащие чистый AgBr, совершенно нечувствительны к красному свету. Интересно, что это, по-видимому, наиболее наглядное проявление квантовых свойств света. Энергия «красного» кванта слишком мала, чтобы вызвать химическое превращение, и это не может быть скомпенсировано простым увеличением интенсивности света. Современные фотоматериалы, чувствительные ко всему видимому спектру, содержат специальные сенсibilизаторы, трансформирующие световую энергию из одного диапазона в другой, наподобие флюоресценции.

Упомянем, что фотоэмульсия чувствительна не только к свету, но и к заряженным частицам. С этим связано одно из наиболее замечательных достижений современной экспериментальной физики — фотографирование следов «элементарных» частиц и наблюдение за их превращениями (рис. VIII.7).

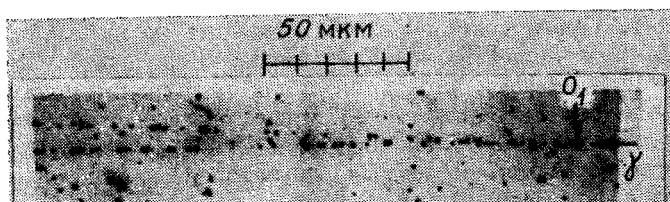


Рис. VIII.7. Фотография треков электрон-позитронной пары, образованной в фотоэмульсии жестким γ -квантом.

O_1 — точка рождения пары (первое различимое зерно изображения); направление γ -кванта показано стрелкой. Эмульсия Ильф-Форд G5.

Длина волны γ -лучей настолько мала, что их волновые свойства проявляются лишь в исключительных условиях. Обычно они ведут себя как частицы. Поэтому более естественно характеризовать γ -излучение не длиной волны, а энергией γ -квантов, измеряя ее в атомных единицах — электрон-вольтах: $\mathcal{E} = \hbar\omega = hc/\lambda$. Излучению с длиной волны $100 \text{ \AA}$ — условная граница между γ -лучами и УФ излучением — соответствует энергия квантов 124 эВ . Укажем для сравнения, что энергия светового кванта ($5000 \text{ \AA}$) составляет $2,5 \text{ эВ}$. Максимальная энергия γ -квантов, зарегистрированная в космических лучах, порядка 10^{20} эВ , что соответствует $\lambda \sim 10^{-24} \text{ см}$.

Открытие излучения в этом диапазоне связано с именем немецкого физика Рентгена (1895 г.). Отсюда и часто встречающееся название «рентгеновские лучи». В 1912 г. Лауэ и сотрудники впервые осуществили дифракцию рентгеновских лучей на кристалле, с несомненностью доказав тем самым их волновые свойства. Название γ -лучи возникло в ядерной физике для обозначения одного из трех видов естественной радиоактивности, который впоследствии оказался электромагнитным излучением ядер (Беккерель, 1896 г.).

γ -лучи генерируются в трех видах процессов:

1. Тормозное излучение заряженных частиц — это и есть рентгеновские лучи. В лабораторных условиях их получают в рентгеновских трубках ($\mathcal{E} \leq 150 \text{ кэВ}$) и в ускорителях электронов всех типов (линейные, бетатрон, синхротрон и др.). Предельная энергия γ -лучей, полученных таким способом, составляет около 30 ГэВ .

2. Излучение возбужденных ядер: так же как возбужденные атомы, высвечиваясь, излучают свет, возбуждаемые ядра излучают γ -кванты. Энергия ядерных γ -квантов лежит в диапазоне примерно от 10 кэВ до 10 МэВ . Время жизни ядер в возбужденном состоянии (длительность γ -излучения) изменяется в широких пределах от $\tau \sim 10^{-17} \text{ с}$ до сотен лет.

3. Процессы взаимного превращения элементарных частиц. Например: $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, в системе центра масс γ -кванты имеют энергию по $67,6 \text{ МэВ}$ каждый. Другим примером является аннигиляция позитрона: $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$.

Методика регистрации γ -лучей основана на их взаимодействии с электронами вещества. γ -квант может передать электрону всю энергию (фотоэффект, рождение пары электрон — позитрон) или часть (комптоновское рассеяние). Возникший в результате такого взаимодействия относительно быстрый электрон регистрируется далее одним из многочисленных детекторов заряженных частиц, в частности фотометодом (см. § 63).

СТРУКТУРА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

§ 65. СВОБОДНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Существование свободного электромагнитного поля было теоретически предсказано Максвеллом на основе анализа системы уравнений электромагнитного поля. Для этого достаточно рассмотреть два уравнения без зарядов и токов:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (65.1)$$

Источниками полей в данном случае являются так называемые «токи» смещения ($\partial \mathbf{B}/\partial t$, $\partial \mathbf{D}/\partial t$), т. е. поля как бы поддерживают друг друга. Прочитанные справа налево эти уравнения можно рассматривать как «уравнения движения» электромагнитного поля.

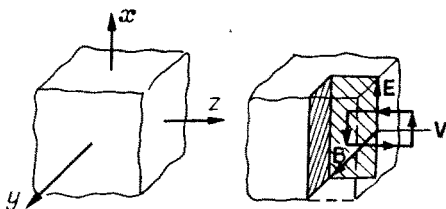
Рассмотрим вначале некоторые общие свойства свободного электромагнитного поля, вытекающие из (65.1). Прежде всего, такое поле должно быть переменным во времени и неоднородным в пространстве. Далее, обязательно должны присутствовать оба поля — как электрическое, так и магнитное. Более того, энергия обоих полей должна быть одной и той же, так как согласно (65.1) поля как бы переходят друг в друга: $\varepsilon E^2 = \mu H^2$ (в простейшем случае однородной и изотропной среды). Отсюда получаем соотношение между полями:

$$\sqrt{\varepsilon} E = \sqrt{\mu} H = \frac{B}{\sqrt{\mu}} \quad \left(\frac{B}{E} = \sqrt{\varepsilon \mu} \equiv n \right). \quad (65.2)$$

В частности, в вакууме оба поля просто равны друг другу.

Далее, оба поля взаимно ортогональны ($(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = 0$). Действительно, первое из уравнений (65.1) представляет собой закон Фарадея, согласно которому переменный магнитный поток возбуждает вихревое электрическое поле. Второе уравнение (65.1) представляет аналогичный закон для возбуждения магнитного поля переменным электрическим полем, т. е., в сущности, закон Био — Савара для тока смещения. С помощью этих законов легко найти скорости движения свободного электромагнитного поля. Для этого рассмотрим простейший случай «куска» электромагнитного поля (рис. IX.1).

Рис. IX.1. Распространение «куска» электромагнитного поля в пространстве.



Точнее, мы рассмотрим плоский «слой» поля неограниченных поперечных размеров (в плоскости x, y). Примем далее, что поля **E** и **B** однородны в пределах слоя и направлены соответственно вдоль осей x, y . В этом случае вектор Пойнтинга направлен вдоль оси z и также постоянен в пределах слоя. Отсюда можно заключить, что рассматриваемый «кусок» поля будет перемещаться как целое также вдоль оси z .

Заметим, что если бы «кусок» поля был ограничен также и в поперечных направлениях, то его движение было бы гораздо сложнее. Оказывается, что такой «кусок» начал бы «растекаться» во все стороны — явление, известное в оптике под названием дифракции волн.

Найдем теперь скорость перемещения поля. Для этого рассмотрим замкнутый контур в плоскости x, z в виде единичного квадрата, пересекающий переднюю поверхность «слоя» поля (см. рис. IX.4). На основании закона Фарадея можем написать

$$\mathcal{E} = -E = -\frac{1}{c} Bv, \quad (65.3)$$

где v — скорость перемещения поля. Взяв аналогичный контур в плоскости y, z и используя закон сохранения циркуляции магнитного поля (см. § 33), найдем

$$\Gamma = H = \frac{1}{c} Dv. \quad (65.4)$$

Используя соотношения $D = \epsilon E$ и $B = \mu H$ и исключая из двух уравнений (65.3), (65.4) одно из полей, получим

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (65.5)$$

В частности, в вакууме $v = c$. Величина $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ называется по оптической терминологии *показателем преломления* среды. Из этих же уравнений можно получить соотношение между полями (65.2).

Мы неслучайно употребляли выше жаргонный термин «кусок» поля. Этим мы хотели подчеркнуть принципиальное различие между свободным электромагнитным полем, которое называют обычно электромагнитными волнами, и механическими волнами (упругие волны — звук, волны на поверхности воды и др.). Последние всегда представляют собой колебания некоторой среды, в то время как электромагнитные волны — свободное электромагнитное поле — являются самостоятельным физическим объектом. Его следовало бы рассматривать как одну из форм вещества, хотя по исторической традиции последний термин употребляется в более узком смысле. Это терминологическое различие возникло еще в эпоху классической физики (до создания квантовой механики), когда волновые свойства были известны только у электромагнитного поля, тогда как электроны и протоны рассматривались как частицы. С появлением квантовой механики это различие потеряло физический смысл. Увлечение аналогией с механическими волнами привело в прошлом столе-

тии к усиленному поиску особой среды — эфира, колебания которого и должны были являться электромагнитными волнами. На самом же деле, как это видно из рассмотренного выше простого примера, вполне можно представлять себе, что электромагнитные волны не распространяются в некоей среде, а летят в вакууме наподобие свободного «тела».

§ 66. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОЛЕЙ

Произвольное электромагнитное поле описывается полной системой уравнений Максвелла. При этом пара уравнений (65.1) описывает изменение поля во времени (без токов). Их нужно решать для заданного начального состояния поля ($\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$). Если мы хотим ограничиться свободным полем, то начальное поле должно удовлетворять дополнительным условиям:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (66.1)$$

Эти условия есть не что иное, как вторая пара уравнений Максвелла в частном случае отсутствия зарядов.

Один из методов решения системы (65.1) состоит в исключении какого-либо из полей, в результате чего получается так называемое волновое уравнение. Для этого возьмем rot от обеих частей, например первого из уравнений (65.1), преобразуем оператор $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = -\Delta + \nabla \operatorname{div}$ с учетом (66.1) и используем второе уравнение (65.1). Ограничиваясь по-прежнему случаем однородной и изотропной среды ($\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\epsilon, \mu = \text{const}$), получим

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (66.2)$$

Такое же уравнение можно получить и для $\mathbf{B}$. Это и есть волновое уравнение.

Задолго до теории Максвелла волновое уравнение, методы его решения и общие свойства волновых процессов были подробно изучены в механике и акустике. По-видимому, впервые это было сделано французским математиком д'Аламбером (1747 г.) и русским математиком Эйлером (1748 г.) для упругих колебаний струны. Отсюда и возникла аналогия с механическими волнами, упомянутая в конце предыдущего параграфа. Эта аналогия значительно облегчила и ускорила изучение различных процессов распространения электромагнитных волн, но задержала понимание их природы.

Волновое уравнение (66.2), определяющее эволюцию свободного электромагнитного поля, совсем не похоже на уравнение движения в механике. Но в одном отношении они совпадают — и там и здесь уравнения содержат только вторую производную по времени. Отсюда вытекает важное свойство движения как частиц, так и волн — так называемая обратимость (во времени). Это значит, что если формально изменить знак времени ($t \rightarrow -t$), то уравнения не

изменятся и, значит, при одинаковых начальных условиях движение будет одинаковым в обоих случаях. Отсюда следует, что воображаемое движение назад во времени (при $t \rightarrow -t$) действительно возможно, если в качестве начальных условий взять конечные условия прямого движения, изменив в механике знак скоростей частиц, а в случае электромагнитного поля — знак $\mathbf{B}$.

§ 67. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ

Выведем волновое уравнение для потенциалов. Для этого выразим поля через потенциалы

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \quad (67.1)$$

и подставим их во второе из уравнений (65.1), добавив в него ток (см. § 45). Считая, как и выше, $\epsilon, \mu = \text{const}$, имеем

$$\frac{1}{\mu} \text{rot rot } \mathbf{A} = -\frac{\epsilon}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{\epsilon}{c} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Раскрывая оператор rot rot , найдем

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \nabla \left(\text{div } \mathbf{A} + \frac{\epsilon \mu}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}. \quad (67.2)$$

Наложим теперь на потенциалы дополнительное условие, определяющее их калибровку (см. § 31):

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{\epsilon \mu}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (67.3)$$

Тогда для вектор-потенциала справедливо такое же волновое уравнение, как и для полей:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}. \quad (67.4)$$

Чтобы определить волновое уравнение для скалярного потенциала φ , возьмем дивергенцию от обеих частей второго из соотношений (67.1):

$$\text{div } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A} - \Delta \varphi = 4\pi \rho / \epsilon.$$

Используя связь между потенциалами (67.3), получим волновое уравнение для φ :

$$\Delta \varphi - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho. \quad (67.5)$$

Соотношение (67.3) носит название условия Лоренца на потенциалы. При выполнении этого условия говорят о потенциалах в лоренцевской калибровке.

Другая удобная калибровка потенциалов определяется условием

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (67.6)$$

вместо (67.3). Она называется кулоновской калибровкой. Хотя уравнение для $\mathbf{A}$ при этом усложняется (см. (67.2)):

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{\varepsilon \mu}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi) = -\frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}, \quad (67.7)$$

но зато скалярный потенциал описывается теперь просто уравнением Пуассона

$$\Delta \varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \quad (67.8)$$

как и в статическом поле. Отметим, однако, что решение этого уравнения отличается от статического, так как необходимо учесть запаздывание потенциалов относительно источников (см. § 119). Кулоновская калибровка особенно удобна в случае свободного электромагнитного поля ($\rho \equiv 0$, $\mathbf{j} \equiv 0$; фактически достаточно $\varphi \equiv 0$). В этом случае (в однородном пространстве) решение уравнения (67.8) есть просто $\varphi = 0$, так что свободное поле можно описать только векторным потенциалом, который удовлетворяет уравнению (67.4).

§ 68. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

Простейшим типом волн являются так называемые плоские волны, в которых все величины ($\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$) зависят только от одной координаты, например z . Именно такая волна была рассмотрена в § 65. Сейчас мы исследуем ее свойства на основе волнового уравнения. Название «плоская волна» связано с тем, что волновые поверхности $\mathbf{A}(z) = \text{const}$ в этом случае являются плоскостями $z = \text{const}$.

Волновое уравнение для плоской волны без источников принимает вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \quad (68.1)$$

а калибровочное условие дает для плоской волны $A_z = \text{const}$, и постоянную можно положить равной нулю, так как A_z не дает вклада в поле.

Плоская волна, по определению, распространяется вдоль нормали к волновой поверхности (вдоль оси z), так как смещение волны в поперечных направлениях просто не изменяет поля. Линии, ортогональные к волновым поверхностям, называются *лучами*. Для плоской волны лучи образуют семейство параллельных прямых. Условие $A_z = 0$ означает, что волна является поперечной, т. е. как вектор-потенциал, так и поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ перпендикулярны направлению распространения волны. Таким образом, плоская волна описывается двумерным вектором.

Как же найти решение волнового уравнения (68.1)? По-видимому, читатель уже свыкся с мыслью, что решение нужно просто угадать. Чтобы сделать это, вернемся к § 65, где мы видели, что поле плоской волны перемещается в пространстве как целое. Следовательно, решение уравнения (68.1) можно попытаться искать в форме

$$A(z, t) = f(z - vt). \quad (68.2)$$

Функция $f(z)$ описывает так называемый профиль волны (в момент $t = 0$), который перемещается со скоростью v . Чтобы найти эту скорость, подставим выражение (68.2) в уравнение (68.1). Возьмем одну из компонент A и учтем, что $\partial A_x / \partial z = f'_x$, $\partial A_x / \partial t = f'_x \cdot (-v)$, где $f'_x = df_x(u)/du$, $u = z - vt$ — аргумент функции $f(u)$. Получаем

$$v = \pm \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (68.3)$$

т. е. мы пришли к тому же результату, что и в § 65. Но здесь содержится и нечто большее. Во-первых, скорость волны может иметь оба знака, т. е. волна может распространяться в обе стороны. Последний результат, впрочем, заранее очевиден, так как оба направления в пространстве равноправны (пространство изотропно). Во-вторых, видно, что само по себе волновое уравнение не накладывает никаких ограничений на вид функции $f(u)$, т. е. на форму поля. Таким образом, полное решение волнового уравнения (68.1) имеет вид

$$A(z, t) = f_1(z - |v|t) + f_2(z + |v|t), \quad (68.4)$$

где f_1, f_2 — произвольные функции.

Появление в решении произвольных функций является характерной особенностью уравнений в частных производных. Посмотрим, как обстоит дело в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, например уравнения движения частицы в механике. Решение последнего уравнения содержит две произвольные постоянные, которые в каждом конкретном случае определяются начальными условиями, т. е. положением и скоростью частицы в некоторый момент времени. Точно так же произвольные функции f_1, f_2 в решении волнового уравнения (68.4) должны быть связаны с начальным состоянием электромагнитного поля. Прежде чем найти эту связь, введем описание поля плоской волны с помощью комплексных величин. Любую комплексную величину

$$A = A_x + iA_y \quad (68.5)$$

можно рассматривать как двумерный вектор. Посмотрим теперь, как действует оператор rot на комплексное поле. Поскольку все величины зависят только от одной координаты z , получим

$$(\text{rot } A)_x = -\frac{\partial A_y}{\partial z}; \quad (\text{rot } A)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}. \quad (68,6)$$

В комплексной форме это можно записать как

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = (\operatorname{rot} \mathbf{A})_x + i (\operatorname{rot} \mathbf{A})_y = -\frac{\partial A_y}{\partial z} + i \frac{\partial A_x}{\partial z} = i \frac{\partial A}{\partial z}. \quad (68.7)$$

Таким образом, действие оператора rot на комплексное поле сводится к взятию производной и умножению на i .

Вернемся теперь к полному решению (68.4) и найдем электрическое и магнитное поля плоской волны:

$$E(z, t) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{v}{c} (f'_1 - f'_2), \quad B(z, t) = i \frac{\partial A}{\partial z} = i (f'_1 + f'_2). \quad (68.8)$$

Отсюда по заданной начальной конфигурации поля ($E(z, 0)$; $B(z, 0)$) находим неизвестные функции f_1, f_2 :

$$f'_1(u_+) = \frac{1}{2} (\sqrt{\epsilon\mu} E(u_+, 0) - i B(u_+, 0)), \quad (68.9)$$

$$f'_2(u_-) = -\frac{1}{2} (\sqrt{\epsilon\mu} E(u_-, 0) + i B(u_-, 0)),$$

где $u_{\pm} = z \mp vt$. В правой части (68.9) мы заменили z на $u_{\pm}$ соответственно, так как при $t=0$ $u_+ = u_- = z$. Сами функции f_1, f_2 находятся интегрированием правых частей (68.9), при этом появляется еще одна произвольная постоянная, которая связана с неоднозначностью выбора вектор-потенциала: $A \rightarrow A + C$.

В общем случае начальное электромагнитное поле распадается на две волны. В специальных случаях

$$\sqrt{\epsilon} E(z, 0) = \pm i \sqrt{\mu} H(z, 0) \quad (68.10)$$

возникает только одна волна. Это условие как раз соответствует соотношению (65.2) между полями в плоской волне.

Скорость волны (68.3), которую можно записать в виде

$$v = \frac{c}{n}, \quad (68.11)$$

где n — показатель преломления среды, называется обычно фазовой скоростью. Название связано с тем, что это есть скорость движения определенной фазы волны, например максимума поля или его нуля (подробнее см. § 84).

§ 69. МОНОХРОМАТИЧЕСКАЯ ВОЛНА. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВОЛНЫ

Рассмотрим важный частный случай плоской волны, когда в начальный момент времени зависимость полей от координаты z описывается гармонической функцией

$$E(z, 0) = E_0 e^{ikz}. \quad (69.1)$$

Пусть для простоты $B(z, 0) = i \sqrt{\epsilon\mu} E(z, 0)$, т. е. имеется только одна волна, распространяющаяся в положительном направлении оси z .

Постоянная k в (69.1) называется волновым числом и характеризует пространственный период поля, который именуется обычно длиной волны:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (69.2)$$

Величину k называют также пространственной частотой волны. Иногда пользуются величиной $\lambda = \lambda/2\pi$.

Чтобы найти поле в произвольный момент времени, достаточно в (69.1) заменить z на $z - vt = u_+$ (одна волна):

$$E(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad (69.3)$$

где мы ввели новую величину

$$\omega = kv = \frac{2\pi v}{\lambda}, \quad (69.4)$$

которая называется частотой (временной) волны и характеризует временной период поля

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{v}. \quad (69.5)$$

Результат (69.3) можно получить и формально с помощью соотношений (68.9), подставляя в последние (69.1). Такая волна называется *монохроматической*, что в буквальном переводе на русский язык означает «одноцветная волна». Термин этот возник в оптике, где световая волна с определенной частотой (и длиной волны) вызывает в глазу ощущение чистого цвета (см. § 64). Заметим, что монохроматическая волна не обязательно является плоской. Монохроматичность означает определенную частоту волны, в то время как ее пространственная конфигурация может быть различной. Например, монохроматической может быть волна, расходящаяся от источника малого размера.

Плоская волна описывается двумерным вектором (например, A). Поэтому при заданных частоте и направлении распространения у волны остается еще одна, внутренняя, степень свободы, которая называется поляризацией.

В случае (69.3) говорят о *круговой (или циркулярной) поляризации волны*, так как в каждой точке пространства вектор A , а также векторы E и B вращаются с частотой ω , не изменяясь по абсолютной величине. В любой момент времени пространственную конфигурацию такого поля можно представить себе как правую спираль (рис. IX.2). Эта ситуация соответствует правой круговой поляризации. Левая поляризация отличается изменением знаков при k и ω . В общем случае имеет место суперпозиция обеих поляризаций:

$$A(z, t) = A_n e^{i(kz - \omega t)} + A_d e^{-i(kz - \omega t)}, \quad (69.6)$$

где A_n , A_d — некоторые комплексные постоянные. Такая поляризация называется *эллиптической*, так как при этом конец вектора A описывает эллипс (рис. IX.3) (см. задачу 2 ниже). В частных слу-

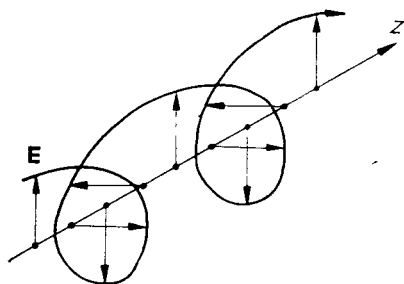


Рис. IX.2. Пространственная конфигурация плоской монохроматической волны с правой круговой поляризацией.

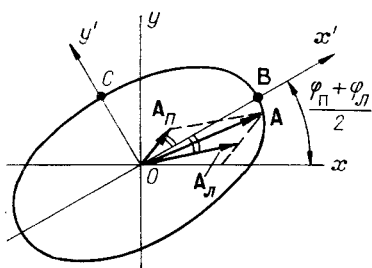


Рис. IX.3. Эллиптическая поляризация: вектор волны $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\parallel} + \mathbf{A}_{\perp}$ описывает эллипс.

чаях $A_{\perp} = 0$ или $A_{\parallel} = 0$ этот эллипс превращается в круг (круговая поляризация).

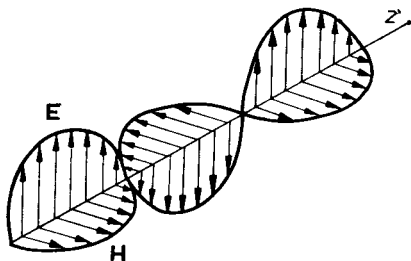
Не менее важной является так называемая линейная поляризация, когда эллипс вырождается в прямую линию, т. е. его малая полуось обращается в нуль. Это происходит, если $A_{\perp} = \pm A_{\parallel} = A_0/2$. Тогда вектор-потенциал волны (69.6) описывается одним из двух выражений:

$$\begin{aligned} A_1(z, t) &= A_0 \cos(kz - \omega t), \quad A_{\perp} = A_{\parallel}, \\ A_2(z, t) &= iA_0 \sin(kz - \omega t), \quad A_{\perp} = -A_{\parallel}. \end{aligned} \quad (69.7)$$

При линейной поляризации вектор $\mathbf{A}$, а также векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ изменяются только по величине (и по знаку) вдоль направления вектора $\mathbf{A}_0$ или перпендикулярного ему вектора $i\mathbf{A}_0$ соответственно. Пространственная конфигурация линейно поляризованной волны показана на рис. IX.4. Мы видим, что все векторы $\mathbf{E}$ вдоль луча лежат в одной плоскости, которая называется *плоскостью колебаний волны*. Исторически плоскостью поляризации волны была названа, однако, другая плоскость — та, в которой лежат векторы $\mathbf{B}$. В дальнейшем под направлением колебаний волны — *поляризацией волны* — мы будем понимать направление вектора $\mathbf{E}$. Отметим, что линейно поляризованную волну называют также *плоскополяризованной*.

Произвольная (эллиптическая) поляризация волны может быть представлена как суперпозиция либо двух круговых поляризаций (69.6), либо двух линейных (69.7). Направление последних естест-

Рис. IX.4. Пространственная конфигурация линейно поляризованной плоской монохроматической волны.



венно принять за оси x, y , тогда получаем

$$A(z, t) = A_x \cos(kz - \omega t + \varphi_x) + iA_y \cos(kz - \omega t + \varphi_y), \quad (69.8)$$

где A_x, A_y — действительные амплитуды, φ_x, φ_y — фазы.

Задача 1. Найти связь между постоянными линейной (69.9) и круговой (69.8) поляризации.

Представляя косинус через комплексные экспоненты $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$, запишем (69.8) в виде

$$A(z, t) = \frac{1}{2} (A_x e^{i\varphi_x} + iA_y e^{i\varphi_y}) e^{i(kz - \omega t)} + \frac{1}{2} (A_x e^{-i\varphi_x} + iA_y e^{-i\varphi_y}) e^{-i(kz - \omega t)},$$

откуда

$$A_{\Pi} = \frac{1}{2} (A_x e^{i\varphi_x} + iA_y e^{i\varphi_y}), \quad A_{\perp} = \frac{1}{2} (A_x e^{-i\varphi_x} + iA_y e^{-i\varphi_y}). \quad (69.9)$$

Обратные соотношения получаются из $A_{\Pi} + A_{\perp}^* = A_x e^{i\varphi_x}$, $A_{\Pi} - A_{\perp}^* = iA_y e^{i\varphi_y}$, где звездочка обозначает операцию комплексного сопряжения.

Задача 2. Определить параметры эллипса поляризации (см. рис. IX.3). Запишем комплексные амплитуды круговых поляризаций в виде

$$A_{\Pi} = |A_{\Pi}| e^{i\varphi_{\Pi}}, \quad A_{\perp} = |A_{\perp}| e^{i\varphi_{\perp}}$$

и повернем оси x, y таким образом, чтобы новые $\varphi'_{\Pi}, \varphi'_{\perp}$ удовлетворяли условию $\varphi'_{\Pi} = -\varphi'_{\perp}$ (см. рис. IX.3). Очевидно, что для этого новую ось x' нужно направить по биссектрисе угла между $A_{\Pi}, A_{\perp}$. Тогда $\varphi'_{\Pi} = -\varphi'_{\perp} = (\varphi_{\Pi} - \varphi_{\perp})/2 = \varphi_0$ и (69.6) принимает вид

$$A(z, t) = |A_{\Pi}| e^{i(\theta + \varphi_0)} + |A_{\perp}| e^{-i(\theta + \varphi_0)} = (|A_{\Pi}| + |A_{\perp}|) \cos(\theta_0 + \varphi_0) + i(|A_{\Pi}| - |A_{\perp}|) \sin(\theta + \varphi_0),$$

где $\theta = kz - \omega t$. Но это есть уравнение эллипса с полуосями

$$a = |A_{\Pi}| + |A_{\perp}|, \quad b = |A_{\Pi}| - |A_{\perp}|, \quad (69.10)$$

причем большая полуось составляет с осью x угол $\varphi_a = (\varphi_{\Pi} + \varphi_{\perp})/2$. Параметры эллипса можно получить из следующих простых соображений. Согласно (69.6) вектор A равен сумме двух векторов, вращающихся с одинаковой угловой скоростью в противоположных направлениях. При $\theta = 0$ эти векторы совпадают с комплексными амплитудами (см. рис. IX.3). В таком случае в процессе вращения они окажутся параллельными друг другу как раз на биссектрисе угла между их начальными положениями ($\theta = 0$) и антипараллельными еще через четверть оборота.

Найдем соотношение между векторами A, B, E для различных поляризаций. Используя выражение (68.7) для ротора комплексного вектора и разложив поля B, E по круговым поляризациям, определим связь между амплитудами:

$$B_{\Pi} = -kA_{\Pi}; \quad B_{\perp} = kA_{\perp}; \quad E_{\Pi} = ikA_{\Pi}; \quad E_{\perp} = -ikA_{\perp}. \quad (69.11)$$

Интересно отметить, что направление вектора A совпадает (с точностью до знака) с направлением магнитного поля (рис. IX.5).

Поляризация электромагнитной волны была открыта впервые для света военным инженером Малюсом в 1808 г. Наблюдение поляризации света производится с помощью особых анизотропных кристаллов, которые сильно погло-

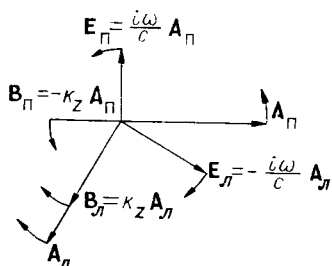


Рис. IX.5. «Звезда» амплитуд монохроматической волны.

Волна распространяется «на нас», стрелки-дуги показывают направление вращения вектора.

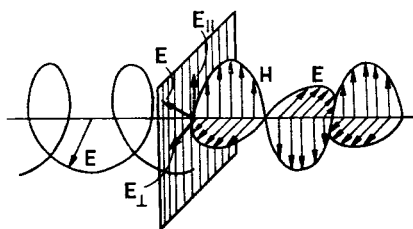


Рис. IX.6. Прохождение циркулярно поляризованной электромагнитной волны сквозь металлический «забор». Отраженная волна на рисунке не показана.

щают линейно поляризованную волну с определенной ориентацией вектора $\mathbf{E}$. Такие кристаллы изготавливаются обычно в виде тонкой пленки — поляриоида. Для радиоволн аналогом поляриоида может служить решетка параллельных металлических нитей. Составляющая волны с колебаниями вдоль нитей возбуждает в них токи и практически полностью отражается (рис. IX.6).

§ 70. ВОЛНОВОЙ ВЕКТОР. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в произвольном направлении (необязательно вдоль оси z). Как описать такую волну?

Пусть направление распространения волны характеризуется единичным вектором $\mathbf{n}$. Введем вектор

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n}, \quad (70.1)$$

модуль которого равен волновому числу (69.2), а направление совпадает с направлением распространения волны. Вектор $\mathbf{k}$ называется *волновым вектором*. Фазу волны, распространяющейся вдоль оси z (69.3), можно записать теперь в виде

$$\theta = k_z z - \omega t, \quad (70.2)$$

где k_z — компонента вектора $\mathbf{k}$. Повернем теперь оси координат произвольным образом. Очевидно, что фаза волны θ не может зависеть от направления осей координат, т. е. она является инвариантом такого поворота. Это значит, что она должна зависеть только от инвариантного выражения, содержащего векторы $\mathbf{k}$, $\mathbf{r}$ и переходящего в (70.2) при $k_x = k_y = 0$. Таким выражением является скалярное произведение $(\mathbf{k}, \mathbf{r})$. Отсюда получаем

$$\theta = (\mathbf{k}, \mathbf{r}) - \omega t, \quad (70.3)$$

и общее выражение для плоской монохроматической волны принимает вид (69.6)

$$A(\mathbf{r}, t) = A_n e^{i\theta} + A_n e^{-i\theta}. \quad (70.4)$$

С введением вектора $\mathbf{k}$ вместо одной пространственной частоты k возникают три: k_x, k_y, k_z , которые характеризуют скорость изменения фазы волны по определенным направлениям. Модуль $|\mathbf{k}| = k$ равен максимальной пространственной частоте вдоль направления распространения волны. В произвольном направлении, характеризуемом единичным вектором $\mathbf{n}'$, пространственная частота

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)_{\mathbf{n}'} = (\mathbf{k}, \mathbf{n}') = k(\mathbf{n}, \mathbf{n}'), \quad (70.5)$$

где s — координата вдоль $\mathbf{n}'$.

Посмотрим теперь, как изменяются частота и волновой вектор при переходе из одной системы отсчета в другую. Для этого координаты и время в (70.3) выразим через координаты и время $(\mathbf{r}', t')$ другой системы отсчета, движущейся относительно исходной со скоростью V вдоль оси x . Получаем

$$\begin{aligned} \theta &= k_x x - \omega t + k_y y + k_z z = k_x \gamma(x' + Vt') - \omega \gamma(t' + Vx'/c^2) + \\ &+ k_y y' + k_z z' = \gamma(k_x - \omega V/c^2)x' - \gamma(\omega - k_x V)t' + k_y y' + k_z z'. \end{aligned} \quad (70.6)$$

Мы видим, что в новой системе отсчета волна остается плоской и монохроматической, но ее частота (множитель при t') и волновой вектор (множитель при $\mathbf{r}'$) изменяются:

$$\omega' = \gamma(\omega - k_x V); \quad k'_x = \gamma\left(k_x - \frac{\omega V}{c^2}\right); \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z. \quad (70.7)$$

Это и есть закон преобразования $\omega, \mathbf{k}$ при переходе из одной системы отсчета в другую. Из этих соотношений следует, что величины $\mathbf{k}, \omega$ образуют 4-вектор

$$k_l = \left(\mathbf{k}, \frac{i\omega}{c}\right). \quad (70.8)$$

Результат, описываемый формулой (70.8), можно получить и из следующих физических соображений. Достаточно заметить, что фаза волны θ есть инвариант, т. е. не зависит от системы отсчета. Действительно, рассмотрим, например, волну $E = E_0 \cos \theta$. Тогда инвариантность фазы означает просто, что в любой системе отсчета максимум волны соответствует $\theta = 0$. Здесь, конечно, неявно предполагается, что в любой системе отсчета волна остается монохроматической, что является следствием линейности преобразований Лоренца (70.6). Заметим, что выше, при выводе (70.7) мы, в сущности, неявно уже использовали (быть может, незаметно для читателя) инвариантность фазы θ . Но если фаза (70.3) инвариантна, а величины $(\mathbf{r}, ict)$ образуют, как мы знаем, 4-вектор, то величина $\left(\mathbf{k}, \frac{i\omega}{c}\right)$ также должна быть 4-вектором, чтобы получилось инвариантное скалярное произведение $(\mathbf{k}, \mathbf{r}) - \omega t = 0$.

Изменение частоты волны при переходе из одной системы отсчета в другую называется эффектом Доплера. Этот эффект был предсказан впервые теоретически чешским физиком Доплером в

1842 г. и вскоре был экспериментально подтвержден для звуковых волн Бейс-Баллотом на голландской железной дороге. В этих опытах независимые наблюдатели оценивали высоту тона звуков, издаваемых музыкантами, размещенными на платформе поезда. Уже в 1867 г. эффект Доплера был обнаружен в оптических спектрах звезд.

Для звука эффект Доплера описывается нерелятивистской формулой

$$\omega = \omega' \left(1 + \frac{V}{u'} \cos \alpha' \right), \quad (70.9)$$

где $u' = \omega'/k'$ — скорость звука в движущейся системе отсчета, α' — угол между векторами k' , V . Отметим, что для звука существует выделенная система отсчета, связанная со средой, в которой распространяются звуковые волны. Поэтому движение источника звука по отношению к среде приводит к другим результатам, чем движение приемника. То же самое, кстати, относится и к электромагнитным волнам в среде (см. § 71).

Нерелятивистский эффект Доплера (70.9) допускает наглядное объяснение. Пусть, например, наблюдатель движется навстречу волне со скоростью V относительно среды. Используя обратное преобразование и учитывая, что в этом случае $\alpha = \pi$, найдем

$$\frac{\omega'}{\omega} = 1 + \frac{V}{u} = \frac{u + V}{u},$$

где u — скорость звука, ω — частота звуковых колебаний в неподвижной системе, ω' — частота колебаний, воспринимаемая движущимся наблюдателем. Увеличение частоты в этом случае объясняется просто тем, что движущийся навстречу волне наблюдатель «натывается» на максимумы волны тем чаще, чем больше его скорость.

Для электромагнитной волны в вакууме эффект Доплера описывается первым из соотношений (70.7)

$$\omega' = \gamma \omega \left(1 - \frac{V}{c} \cos \alpha \right), \quad \omega = \frac{\omega'}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c} \cos \alpha \right)}. \quad (70.10)$$

В нерелятивистском случае это выражение совпадает с (70.9) ($u' \rightarrow c$) и имеет такой же наглядный физический смысл, как и для механических волн. В этом случае говорят о линейном эффекте Доплера, или об эффекте Доплера первого порядка ($(\omega - \omega')/\omega \sim \sim V/c$). Кроме того, имеется еще так называемый квадратичный эффект Доплера, связанный с множителем $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$. Природа его совершенно иная: он связан с релятивистским изменением масштаба времени в разных системах отсчета. В этом случае говорят также о поперечном эффекте Доплера. Такое название связано с тем, что при наблюдении электромагнитной волны перпендикулярно направлению движения излучателя линейный эффект Доплера обращается в нуль, и все изменение частоты волны связано с релятивистским эффектом.

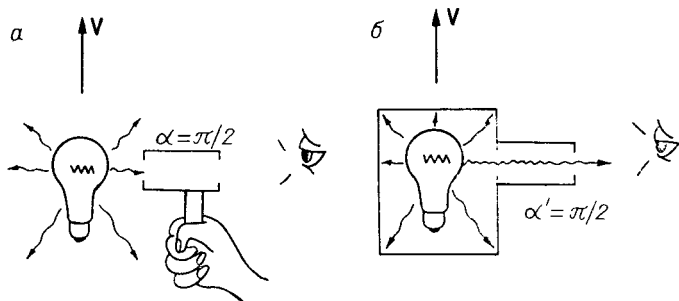


Рис. IX.7. Наблюдение эффекта Доплера.

a — источник излучает изотропно, а наблюдатель воспринимает свет, приходящий под углом 90° к направлению движения источника: $\lambda = \gamma\lambda'$; b — источник излучает в своей системе в направлении, поперечном направлению движения, а наблюдатель воспринимает свет с $\lambda = \lambda'/\gamma$.

Задача. Найти частоту и угловое распределение излучения движущегося источника (рис. IX.7).

Квадратичный эффект Доплера соответствует наблюдению излучения под углом $\alpha = \pi/2$ (рис. IX.7, a). Используя первое из преобразований (70.10), найдем

$$\omega = \omega'/\gamma, \quad \lambda = \gamma\lambda', \quad (70.11)$$

т. е. свет «краснеет». В данном случае ω' есть частота излучателя в собственной системе, так что преобразование частоты (70.11) в точности эквивалентно преобразованию времени, например периода колебаний ($T = 2\pi/\omega$, $\tau = 2\pi/\omega'$): $T = \gamma\tau$.

На рис. IX.7, b показано излучение, перпендикулярное направлению движения в системе источника, $\alpha' = \pi/2$, и имеет место обратное соотношение $\omega = \gamma\omega'$, т. е. свет «синееет». Это связано с линейным эффектом Доплера в системе наблюдателя, который видит свет под углом $\alpha \neq \pi/2$. Найдем этот угол. Комбинируя первые два из выражений (70.7), получим ($\cos \alpha = ck_\pi/\omega$):

$$\cos \alpha = \frac{\frac{V}{c} + \cos \alpha'}{1 + \frac{V}{c} \cos \alpha'}; \quad \sin \alpha = \frac{\sin \alpha'}{\gamma \left(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha'\right)}. \quad (70.12)$$

В частности, при $\alpha' = \pi/2$ имеем $\cos \alpha = V/c$. Подставляя это выражение в (70.7), получим прежний результат:

$$\omega' = \gamma\omega \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \omega/\gamma.$$

В ультрарелятивистском случае ($V \rightarrow c$) половина всего излучения (излучение в переднюю полусферу в системе источника, $\alpha' < \pi/2$) сосредоточена в системе наблюдателя в узком конусе $\alpha < 1/\gamma$ в направлении движения излучателя (70.12). С другой стороны, в заднюю полусферу в системе наблюдателя ($\pi/2 < \alpha < \pi$) излучается лишь незначительная часть энергии из узкого конуса в системе источника ($|\pi - \alpha'| < 1/\gamma$) вокруг направления, противоположного направлению движения излучателя. Это непосредственно вытекает из обратного преобразования углов:

$$\sin \alpha' = \sin \alpha / \gamma \left(1 - \frac{V}{c} \cos \alpha\right).$$

Эффект Доплера находит широкое применение как в научных исследованиях, так и в технике. Одним из таких применений явля-

ется измерение радиальной составляющей скорости движущегося объекта в радиолокации. Вместе с измерением перпендикулярной к лучу локатора составляющей скорости по изменению направления на объект и дальности это дает полную информацию о его движении. В частности, такой метод используется для контроля движения космических кораблей.

В астрономических наблюдениях (точнее, в радиоастрономии) эффект Доплера используется для измерения скорости вращения планет вокруг своей оси по разбросу частоты (уширение линии) отраженного от планеты радиосигнала. Таким образом был найден, например, период вращения Меркурия, который оказался равным 59 земным суткам. Интересно отметить, что отношение меркурианского года (88 земных суток) к его суткам очень близко к $3/2$. Это дало повод для гипотезы о резонансе между орбитальным движением Меркурия и его собственным вращением.

Оказывается, что с помощью эффекта Доплера можно осуществлять и гораздо более тонкие исследования. Измеряя сдвиг частоты отраженного от планеты сигнала и его запаздывание, можно определить даже рельеф планеты. Вместе с интенсивностью отражения это дает возможность снять карту планеты.

Еще одно интересное применение эффекта Доплера — измерение радиальных скоростей звезд и галактик по смещению спектральных линий излучения элементов, входящих в состав звезды (главным образом, водорода и гелия). Такие измерения, проведенные еще в 30-х гг. американским астрономом Хабблом, привели к поразительному результату. Он обнаружил, что помимо более или менее хаотического движения звезд и галактик, все они удаляются от Земли со скоростью, пропорциональной расстоянию (закон Хаббла). В настоящее время этот закон проверен как в оптическом, так и в радиодиапазоне до расстояния в 10 млрд. световых лет, где частоты излучения уменьшаются («красное смещение» линий спектра) более чем в четыре раза, что соответствует скорости разлета далеких галактик, составляющей около 90% от скорости света. На основании закона Хаббла возникла гипотеза, что вся наблюдаемая Вселенная образовалась около 10 млрд. лет назад в результате какого-то гигантского взрыва, и сейчас мы видим разлетающиеся от него осколки («расширяющаяся Вселенная»).

Обращаясь теперь к совершенно иной области явлений, упомянем о применении эффекта Доплера для измерения температуры электронов горячей плазмы. Измерение производится по разбросу частоты электромагнитной волны, рассеянной в плазме. Среднее смещение частоты можно использовать при этом для измерения скорости упорядоченного движения в плазме.

§ 71. АНОМАЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА. ЧЕРЕНКОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Рассмотрим теперь эффект Доплера для электромагнитной волны в среде. Величины ω , k и в этом случае образуют 4-вектор $k_i = (k, i\omega/c)$, так как фаза волны $\theta = (k, r) - \omega t$ по-прежнему яв-

ляется инвариантом преобразований Лоренца (см. § 70). Следовательно, остается в силе и закон (70.7) преобразования величин k , ω . Единственное изменение касается связи между k и ω , которая в системе отсчета среды имеет вид (см. (65.5), (69.4))

$$\frac{\omega_0}{k_0} = v_0 = \frac{c}{n}, \quad n = \sqrt{\epsilon\mu}, \quad (71.1)$$

где n — показатель преломления среды. Скорость волны v зависит теперь от системы отсчета ($\omega'/k' = v' \neq v_0$), так как в отличие от вакуума она уже не совпадает с предельной скоростью c (в смысле теории относительности). Чтобы подчеркнуть выделенность системы отсчета среды, мы будем отмечать величины в этой системе индексом ноль.

Задача. Найти скорость света в движущейся среде (опыт Физо).

Опыт Физо (1851 г.) состоял в измерении скорости света, распространяющегося вдоль текущей в трубе жидкости. Если скорость жидкости равна V , то по релятивистскому закону сложения скоростей получим для скорости света в лабораторной системе отсчета

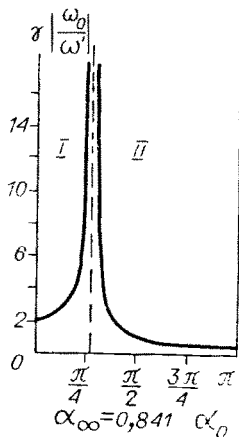
$$v = \frac{v_0 \pm V}{1 \pm Vv_0/c^2} \approx \frac{c}{n} \pm V \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad (71.2)$$

где знак зависит от направления скорости и принято, что $V \ll v_0$. Теория относительности, таким образом, естественно объясняет появление «загадочного» для классической (нерелятивистской) физики множителя $(1 - 1/n^2)$ обнаруженного Физо.

Рассмотрим теперь излучение источника, движущегося относительно среды со скоростью u (вдоль оси x). Используем первое из соотношений (70.7) и будем считать, что штрихованные величины относятся к системе источника. Тогда $V \rightarrow u$, $k_x \rightarrow k_0 \cos \alpha$, $\omega \rightarrow \omega_0$. Получим

$$\omega_0 = \frac{\omega'}{\gamma \left(1 - \frac{u}{v_0} \cos \alpha_0\right)}. \quad (71.3)$$

Это выражение переходит в (70.10), если положить $v_0 = c$ ($u = V$).



Наиболее интересная особенность эффекта Доплера в среде связана с тем, что здесь источник может двигаться со «сверхсветовой» скоростью: $c > u \geq v_0 = c/n$. Это — область так называемого аномального эффекта Доплера (рис. IX.8 область I). В этой области частоты абсолютное значение ω_0 увеличивается с ростом угла наблюдения α_0 , тогда как в области нормального эффекта Доплера (рис. IX.8 область II) так же, как и в случае досветовой

Рис. IX.8. Зависимость отношения частот излучения в системе среды (ω_0) и системы источника (ω') от направления распространения волн в системе среды $u/v_0 = 1,5$; среда без дисперсии.

скорости источника ($u < v_0$), ω_0 падает с ростом α_0 . Граница между областями I, II соответствует углу α_∞ так называемого *черенковского излучения* (§ 135):

$$\cos \alpha_\infty = \frac{v_0}{u}, \quad (71.4)$$

где частота ω_0 обращается в бесконечность. На самом деле, разумеется, никаких бесконечных частот не получается, так как при достаточно больших частотах обязательно имеет место так называемая дисперсия (см. § 84), т. е. зависимость показателя преломления, а следовательно, и скорости волны в среде от частоты: $v_0 = v_0(\omega_0)$. При этом для $\omega_0 \rightarrow \infty$ $v_0 \rightarrow c$. Это значит, что при некоторой частоте $\omega_0 = \omega_1$, такой что $v_0(\omega_1) = u$, область аномальной дисперсии исчезает.

Другая особенность аномальной дисперсии связана с тем, что отношение частот $\omega_0/\omega' < 0$, т. е. одна из частот отрицательна. Согласно квантовым законам это значит, что в одной из систем отсчета энергия излучаемого кванта становится отрицательной. Так как в системе среды мы имеем обычные волны с положительной энергией, то, очевидно, $\omega_0 > 0$ и, следовательно, $\omega' < 0$. Иными словами, в области аномальной дисперсии внутренняя энергия источника увеличивается при излучении (!), разумеется, за счет энергии поступательного движения источника или среды.

Рассмотрим теперь случай $\omega' = 0$, означающий, что в источнике отсутствуют какие-либо колебания, а его внутренняя энергия не изменяется. Примером такого случая может служить пролетающая через среду заряженная частица. При досветовых скоростях ($u < v_0$) — $\omega_0 = 0$ (71.3), и излучение отсутствует. Однако, если $u > v_0$, то при $\alpha_0 = \alpha_\infty$ знаменатель (71.3) также обращается в нуль, и ω_0 может иметь любые значения, ограниченные только условием $v_0(\omega_0) < u$. Это значит, что в этом случае возникает излучение, энергия которого «перекачивается» из поступательного движения источника. Этот особый вид излучения и называется *черенковским излучением*. Оно было открыто экспериментально в 1934 г. советскими физиками Вавиловым и Черенковым и объяснено в 1937 г. также советскими физиками Таммом и Франком. В настоящее время это излучение широко применяется в ядерной физике для детектирования быстрых заряженных частиц с помощью так называемых черенковских счетчиков.

Интересно отметить, что черенковское излучение было предсказано теоретически немецким физиком Зоммерфельдом еще в 1904 г. для сверхсветового движения частиц в вакууме. Однако после появления теории относительности работа эта была прочно забыта. В последние годы зоммерфельдовское излучение опять заинтересовало некоторых физиков в связи с поиском гипотетических частиц — тахионов, которые, по предположению, всегда движутся быстрее света. Существование таких частиц не противоречит теории относительности. Тахионы, однако, нарушают принцип причинности. Во всяком случае, если они и существуют, то должны, по

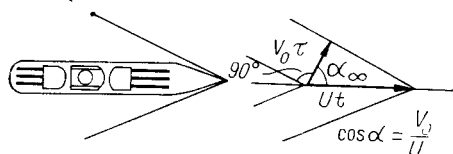


Рис. IX.9. Черенковское излучение на поверхности мелкой воды.

Зоммерфельду, интенсивно излучать электромагнитные волны. По такой короткой вспышке излучения их и надеются обнаружить в эксперименте. Любопытно, что при уменьшении энергии ($W \rightarrow 0$) тахивон ускоряется ($v \rightarrow \infty$).

Для механических волн черенковское излучение было известно (под другим названием!) с незапамятных времен. Мы имеем в виду так называемую носовую волну корабля, образующую на поверхности достаточно мелкой воды характерную картину, похожую на клин, угол раствора которого тем меньше, чем больше скорость корабля (рис. IX.9). Носовая волна является основным источником сопротивления при движении корабля. Отсюда характерная, похожая на плуг, форма носовой части быстроходных кораблей, рассчитанная на «отваливание» волны и уменьшение ее высоты. Отметим, что для подводных лодок черенковское излучение отсутствует, так как нет медленных поверхностных волн, а звуковые волны в воде — слишком быстрые. Это значит, что подводные лодки при сравнимой мощности двигателей могут развивать значительно большие скорости. Соответственно изменяется и форма носа подводной лодки. Другой пример механического черенковского излучения — образование так называемой ударной волны (резкий скачок плотности, давления и температуры воздуха) при сверхзвуковом полете самолета. Сопротивление при этом резко возрастает и требует специальных мер, главным образом приминения характерного заостренного носа самолета. Звуковое черенковское излучение воспринимается наблюдателем как взрыв. При излучении механических волн возможен также аномальный эффект Доплера, приводящий, как мы видели выше, к возбуждению источника. В авиации это явление известно под названием флаттер (от английского *flutter* — дрожать).

Глава X

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Свободная электромагнитная волна в вакууме, т. е. «чистое» электромагнитное поле без зарядов и токов, является частным примером электромагнитных волновых процессов. Обычно электромагнитная волна распространяется в некоторой среде, взаимодействуя с заряженными частицами этой среды (главным образом с электро-

нами). В простейшем случае однородной среды, как известно, такое взаимодействие приводит в основном к изменению скорости волны и соотношения между электрическим и магнитным полями. Кроме того, как мы увидим дальше, из-за дискретности среды происходит рассеяние электромагнитной волны. Однако если длина волны много больше межатомных расстояний, рассеяние незначительно.

В неоднородной среде картина распространения волны сложнее, главным образом из-за явления дифракции (см. гл. XV). Поэтому вначале рассмотрим простейший случай неоднородной среды, состоящей из разных однородных сред, разделенных бесконечно тонкой плоской границей. Неоднородность среды приводит при этом к отражению и преломлению волны. Частным примером является отражение электромагнитной волны от металлической плоскости.

§ 72. ЗЕРКАЛО

Как известно, все зеркала сделаны из металла, поскольку только металлы обладают достаточно высоким коэффициентом отражения. Распространенное в быту представление о стеклянном зеркале основано на недоразумении — стекло лишь предохраняет отражающий металлический слой от механических повреждений.

Рассмотрим отражение плоской электромагнитной волны ($\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$), падающей по нормали к плоской металлической поверхности (рис. X.1). Примем вначале, что металл является идеально проводящим ($\sigma = \infty$). Отраженная волна ($\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$) находится из граничных условий на поверхности металла ($z = 0$). Так как $\sigma = \infty$, то электрическое поле внутри металла равно нулю. В силу непрерывности тангенциальной составляющей этого поля можно написать

$$E(0) + E'(0) = 0. \quad (72.1)$$

Это значит, что интенсивность отраженной волны равна интенсивности падающей, т. е. коэффициент отражения

$$R = \frac{S'}{S} = \left| \frac{E'}{E} \right|^2 = 1, \quad (72.2)$$

где S , S' — векторы Пойнтинга падающей и отраженной волн соответственно. Этот результат является очевидным ввиду отсутствия потерь в зеркале. Отметим, что направление поляризации волны (направление вектора $\mathbf{E}$) изменяется при отражении на обратное. В результате отражения возникает давление на зеркало, которое в данном случае объясняется скачком магнитного поля на поверхности металла,

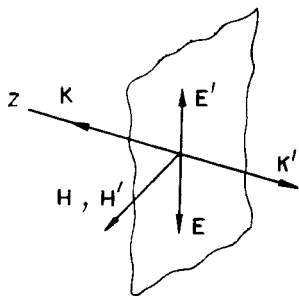


Рис. X.1. Отражение плоской электромагнитной волны от поверхности металла (нормальное падение).

так как снаружи магнитное поле равно $2H$ (см. рис. X.1), а внутри — нулю (подробнее см. § 87). Скачок магнитного поля связан с поверхностным током (на единицу длины):

$$I_1 = \frac{c}{4\pi} 2H. \quad (72.3)$$

Давление поля волны

$$p = \frac{(2H)^2}{8\pi} = \frac{H^2}{2\pi}. \quad (72.4)$$

Этот же результат можно получить и исходя из представления об импульсе поля (см. § 55). Поскольку поле движется с предельной скоростью c , плотность потока его импульса (т. е. давление) равна плотности потока энергии S , деленной на c . Эту величину нужно удвоить за счет давления отраженной волны (отдача). В результате получаем

$$p = 2 \frac{S}{c} = \frac{H^2}{2\pi}; \quad p (\text{г/см}^2) \approx 0,65 \cdot 10^{-3} S \left(\frac{\text{кВт}}{\text{см}^2} \right). \quad (72.5)$$

Мы видим, что давление электромагнитной волны обычно очень мало. Так, давление солнечного света составляет всего около 10^{-7} г/см². Даже для современного лазера непрерывного действия с мощностью до десятка киловатт полная сила давления всего ~ 10 мг. И только для импульсных лазеров с мощностью до 10^{10} Вт мгновенная сила достигает величины порядка 10 кг.

Из-за конечной проводимости коэффициент отражения металла R хотя и уменьшается, но остается близким к единице во всем диапазоне частот. Даже для видимого света коэффициент отражения для многих металлов близок к единице, однако на таких больших частотах проводимость существенно отличается от статической. Так, наилучший коэффициент отражения оказывается у натрия (0,97), затем идет серебро (0,94), из которого обычно изготавливаются оптические зеркала высокого качества. Отражающим слоем в зеркалах массового употребления служит обычно напыленный алюминий ($R \approx 0,8$).

Пусть теперь волна падает на зеркало под произвольным углом к нормали (рис. X.2). Эту задачу удобно решать для двух случаев линейной поляризации волны. В первом случае вектор $\mathbf{E}$ лежит в плоскости $(\mathbf{k}, \mathbf{n})$, а вектор $\mathbf{H}$ перпендикулярен ей — так называемая *ТМ-волна* (*Transverse Magnetic*). Во втором случае вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен плоскости $(\mathbf{k}, \mathbf{n})$ — *ТЕ-волна* (*Transverse Electric*).

Как и для нормального падения, отраженная волна находится из граничных условий, но теперь нужно рассмотреть обе составляющие полей: нормальную (E_n, H_n) и тангенциальную (E_t, H_t). Граничные условия имеют вид

$$E_t + E'_t = 0, \quad H_n + H'_n = 0. \quad (72.6)$$

Первое условие повторяет (72.1), а второе связано с тем, что магнитные силовые линии совершенно не проникают в глубь идеаль-

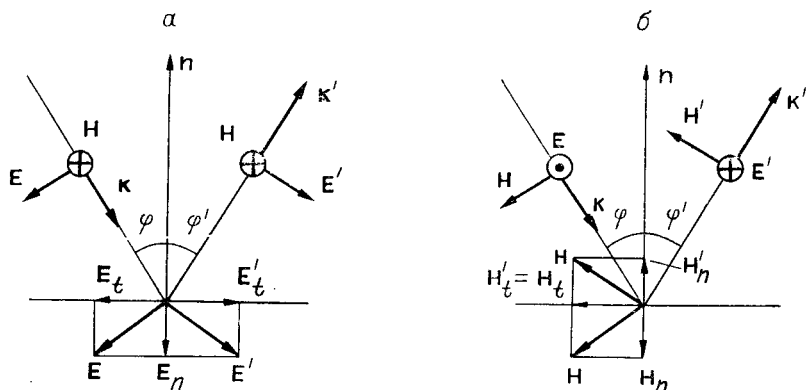


Рис. X.2. Отражение плоской электромагнитной волны от поверхности металла (косое падение).

ного проводника. Что же касается H_t и E_n , то эти составляющие полей могут быть любыми, так как их скачок на поверхности проводника компенсируется соответственно поверхностным током и зарядом. Значения H'_t , E'_n находятся из условия сохранения энергии волны ($R=1$), т. е. $E'=E$, $H'=H$, откуда

$$E'_n = -E_n; \quad H'_t = H_t. \quad (72.7)$$

Знаки полей выбраны здесь из условия, чтобы отраженная волна распространялась в обратном направлении.

Из условий (72.6, 7) следует, что *угол падения волны равен углу отражения* (см. рис. X.2). Более «хитро» обстоит дело с поляризацией. Это связано с тем, что только составляющая E_t изменяет знак. Поэтому поворот вектора E в пространстве зависит как от угла падения φ , так и от поляризации волны по отношению к плоскости $(\mathbf{k}, \mathbf{n})$. Но если поворот вектора E является тем не менее вполне определенным, то вопрос об изменении фазы волны при отражении не может быть решен однозначно, а зависит от произвольного соглашения об отсчете фазы. Рассмотрим, например, отражение, проиллюстрированное рис. X.2, а. При скользющем падении ($\varphi \rightarrow \pi/2$) направление вектора E почти не изменяется, поэтому естественно считать, что фаза волны не изменяется. При отражении, показанном на рис. X.2, б, наоборот, естественно считать, что фаза изменяется на π , так как вектор E изменяет направление на противоположное. С другой стороны, столь же естественно считать, что изменение фазы не зависит от угла падения φ , так как при изменении последнего не происходит никакого поворота E , H вокруг оси $\mathbf{k}$. Но тогда при нормальном падении ($\varphi=0$) возникает неопределенность в выборе фазы. Тем самым абсолютное значение фазы волны после отражения теряет смысл, и при рассмотрении конкретных задач, особенно интерференционных (см. § 92), нужно следить за направлением вектора E .

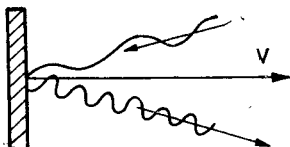


Рис. X.3. Отражение от движущегося зеркала.

Задача. Найти частоту отраженной волны при нормальном падении на движущееся зеркало.

Пусть скорость движения зеркала V направлена по оси x . Тогда частота волны в системе зеркала (см. § 70) $\omega' = \gamma\omega(1 \pm V/c) = \omega'_{\text{отр}}$ и совпадает с частотой отраженной волны в этой системе; верхний знак соответствует встречному движению. Обратное преобразование дает частоту отраженной волны в лабораторной системе

$$\omega_{\text{отр}} = \gamma^2 \omega \left(1 \pm \frac{V}{c}\right)^2. \quad (72.8)$$

В случае ультрарелятивистского зеркала, роль которого может играть ультрарелятивистский электрон (или пучок электронов), длина волны уменьшается в $4\gamma^2$ раза при встречном столкновении и во столько же раз увеличивается при столкновении «вдогонку» (рис. X.3).

§ 73. ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим теперь поведение волны на границе двух прозрачных (без потерь) сред с разными ϵ , μ (рис. X.4). В этом случае происходит, как известно, не только отражение, но и преломление волны, т. е. волна проходит частично во вторую среду. Интенсивность и поляризация как отраженной, так и преломленной волн находятся по-прежнему из граничных условий на поля. Для TM -волны (с учетом выбора положительных направлений, как показано на рис. X.4) запишем

$$-E_t + E'_t = E''_t; \quad -\epsilon_1(E_n + E'_n) = -\epsilon_2 E''_n; \quad H + H' = H''. \quad (73.1)$$

Последнее условие можно выразить через E , используя связь полей в волне $\sqrt{\epsilon}\epsilon E = \sqrt{\mu}\mu H$. Получаем

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}(E + E') = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}E''. \quad (73.2)$$

Так как TM -волна не содержит нормальных составляющих магнитного поля, граничные условия дают только три уравнения (73.1) для четырех неизвестных: E'_t, E''_t, E'_n, E''_n . Недостающее уравнение можно получить из баланса энергии. Однако было бы неправильно написать это уравнение просто для векторов Пойнтинга $S = S' + S''$, так как поперечные сечения пучков, вообще говоря, различны (рис. X.5). Поэтому баланс энергии имеет вид $FS = F'S' + F''S''$. Если F_0 — площадь пересечения пучков на границе двух сред, то $F = F_0 \cos \varphi$, $F' = F_0 \cos \varphi'$, $F'' = F_0 \cos \varphi''$. Окончательно имеем

$$S \cos \varphi = S' \cos \varphi' + S'' \cos \varphi''. \quad (73.3)$$

Формально это уравнение можно было бы вывести, вычисляя пото-

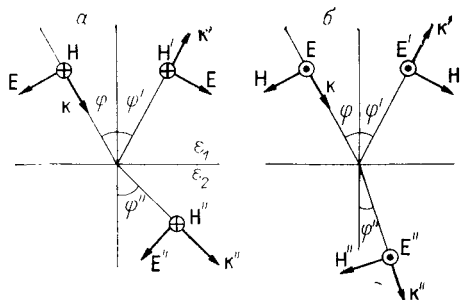


Рис. X.4. Прохождение электромагнитной волны через границу двух диэлектриков.

ки энергии непосредственно на границе двух сред. Однако мы уже знаем, что в общем случае векторы Пойнтинга нельзя складывать по обычным правилам из-за явления интерференции. Выражая составляющие полей через их абсолютные величины и углы, получим окончательную систему уравнений:

$$\begin{aligned} E \cos \varphi - E' \cos \varphi' &= E'' \cos \varphi''; \\ \epsilon_1 (E \sin \varphi + E' \sin \varphi') &= \epsilon_2 E'' \sin \varphi''; \\ \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (E + E') &= \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E''; \\ \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E^2 \cos \varphi &= \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (E')^2 \cos \varphi' + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} (E'')^2 \cos \varphi''. \end{aligned} \quad (73.4)$$

Чтобы упростить решение этой системы, сделаем естественное предположение (которое проверим ниже), что

$$\varphi = \varphi', \quad (73.5)$$

как и при отражении от металла. Тогда второе и третье уравнения дают закон преломления:

$$n_1 \sin \varphi' = n_2 \sin \varphi'', \quad (73.6)$$

где $n = \sqrt{\epsilon \mu}$ — показатель преломления. Теперь из первого и третьего уравнений можем найти E' , E'' :

$$\begin{aligned} E'_M &= E_M \frac{\lambda_\mu \cos \varphi - \lambda_e \cos \varphi''}{\lambda_\mu \cos \varphi + \lambda_e \cos \varphi''}; \\ E''_M &= E_M \frac{2\lambda_e \cos \varphi}{\lambda_\mu \cos \varphi + \lambda_e \cos \varphi''}; \end{aligned} \quad (73.7)$$

$$\lambda_e = \sqrt{\epsilon_1 / \epsilon_2}; \quad \lambda_\mu = \sqrt{\mu_1 / \mu_2}; \quad \cos \varphi'' = \sqrt{1 - \lambda_e^2 \lambda_\mu^2 \sin^2 \varphi}.$$

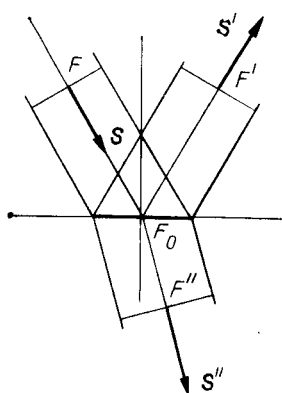


Рис. X.5. Баланс энергии при прохождении волны через границу двух диэлектриков.

Коэффициент отражения, определенный как отношение полного потока энергии в отраженной волне к этой же величине в падающей,

$$R_M = \left(\frac{E'_M}{E_M} \right)^2 = \left(\frac{\lambda_\mu \cos \varphi - \lambda_e \cos \varphi''}{\lambda_\mu \cos \varphi + \lambda_e \cos \varphi''} \right)^2 \quad (73.8)$$

Определенный аналогичным образом коэффициент прохождения

$$T_M = \frac{\lambda_\mu}{\lambda_e} \left(\frac{E'_M}{E_M} \right)^2 \frac{\cos \varphi''}{\cos \varphi} = \frac{4\lambda_e \lambda_\mu \cos \varphi \cos \varphi''}{(\lambda_\mu \cos \varphi + \lambda_e \cos \varphi'')^2}. \quad (73.9)$$

Закон сохранения энергии требует, чтобы $R_M + T_M = 1$, что действительно выполняется. Этим самым проверено, что полученное решение удовлетворяет четвертому уравнению (73.4) и оправдана принятая выше гипотеза (73.5).

Обращаясь теперь к TE -волне, заметим, что она отличается от TM -волны заменой $E \rightarrow H$, $H \rightarrow -E$ (см. рис. X.4, б). Граничные условия для E и H также переходят друг в друга, если заменить $\epsilon \rightarrow \mu$, $\mu \rightarrow \epsilon$. Поэтому можем сразу написать решение для TE -волны, произведя указанные замены в (73.7) — (73.9):

$$\begin{aligned} H'_E &= H_E \frac{\lambda_e \cos \varphi - \lambda_\mu \cos \varphi''}{\lambda_e \cos \varphi + \lambda_\mu \cos \varphi''}; \\ H''_E &= H_E \frac{2\lambda_\mu \cos \varphi}{\lambda_e \cos \varphi + \lambda_\mu \cos \varphi''}; \\ R_E &= \left(\frac{H'_E}{H_E} \right)^2 = \left(\frac{\lambda_e \cos \varphi - \lambda_\mu \cos \varphi''}{\lambda_e \cos \varphi + \lambda_\mu \cos \varphi''} \right)^2; \\ T_E &= \frac{\lambda_e}{\lambda_\mu} \left(\frac{H''_E}{H_E} \right)^2 \frac{\cos \varphi''}{\cos \varphi} = \frac{4\lambda_e \lambda_\mu \cos \varphi \cos \varphi''}{(\lambda_e \cos \varphi + \lambda_\mu \cos \varphi'')^2}. \end{aligned} \quad (73.10)$$

Соотношения (73.7) — (73.10) называются формулами Френеля по имени французского физика, получившего их в 1823 г.

Отметим следующие особенности отражения и преломления волны на границе двух сред. Во-первых, интенсивность преломленной волны обращается в нуль при $\varphi = \pi/2$, т. е. «скользящий луч» полностью отражается. Это почти очевидно. Менее очевидно, что волна может полностью отражаться и при наклонном падении, если выполнено условие

$$\sin \varphi > \frac{1}{\lambda_e \lambda_\mu} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (73.11)$$

Это явление называется *полным внутренним отражением*, так как оно возможно только при $n_2 < n_1$, т. е. при переходе в оптически менее плотную среду. Мы рассмотрим это явление подробнее в § 74.

Явление полного внутреннего отражения хорошо известно. Менее известно, что при определенном угле падения возможно пол-

ное прохождение волны. Рассмотрим сначала TM -волну. Полагая $R_M = 0$, найдем этот угол:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_M = \frac{\lambda_e^2 - \lambda_\mu^2}{\lambda_e^2 (\lambda_e^2 \lambda_\mu^2 - 1)} > 0. \quad (73.12)$$

Последнее неравенство есть условие существования эффекта. Если $\mu = 1$, соотношение (73.12) принимает более простой вид ($n = \sqrt{\epsilon}$):

$$\operatorname{tg} \varphi_M = \frac{1}{\lambda_e} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (73.13)$$

Это явление было открыто в начале прошлого века Малюсом, Био и Брюстером. В связи с этим угол φ_M , определяемый соотношением (73.13), называют обычно *углом Брюстера*. Отметим, что полное прохождение волны не зависит от ее направления, а углы Брюстера для прямого и обратного направлений связаны простым соотношением $\operatorname{tg} \varphi_M^+ \operatorname{tg} \varphi_M^- = 1$, откуда $\varphi_M^+ + \varphi_M^- = \pi/2$. С другой стороны, в силу обратимости законов распространения волны (см. § 66) угол падения φ_M^- должен быть одновременно углом преломления для φ_M^+ . Таким образом, последнее соотношение связывает также углы падения и преломления при полном прохождении волны:

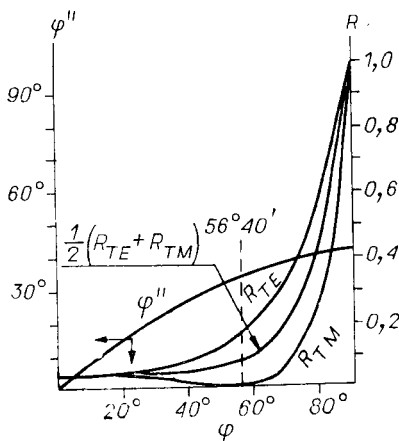
$$(\varphi_M^\pm)' + (\varphi_M^\pm)'' = \frac{\pi}{2}. \quad (73.14)$$

Для TE -волны в среде с $\mu = 1$ такое полное прохождение волны невозможно. Действительно, из (73.12) с заменой $\epsilon \rightleftharpoons \mu$ получаем $\operatorname{tg}^2 \varphi_E = - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 < 0$.

Пример зависимости коэффициента отражения от угла падения для границы воздух — стекло приведен на рис. X.6. При достаточно больших φ коэффициенты отражения R_M и R_E заметно отличаются. Поэтому плоскость поляризации, вообще говоря, поворачивается. Если падающая волна «неполяризована», т. е. представляет собой

Рис. X.6. Характеристические кривые прохождения света через границу воздух — стекло.

$n_1 = 1$, $n_2 = 1,52$; R_{TE} , R_{TM} — коэффициенты отражения для TE - и TM -поляризации; $(R_{TE} + R_{TM})/2$ — коэффициент отражения неполяризованного света; φ'' — угол преломления; φ — угол падения; угол Брюстера равен $56^\circ 40'$.



суперпозицию волн со всевозможными направлениями поляризации и случайными фазами, то после отражения возникает некоторая преимущественная поляризация. При отражении под углом Брюстера неполяризованная волна превращается в чистую TE -волну.

При нормальном падении поле отраженной волны для обеих поляризаций ($\mu = 1$)

$$E' = E \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}, \quad (73.15)$$

и векторы E и E' антипараллельны при $n_2 > n_1$ и параллельны при $n_2 < n_1$ (еще раз подчеркнем, что положительными считаются направления E, E' , при которых соответствующая волна распространяется в «правильном» направлении). Коэффициенты отражения и прохождения при нормальном падении

$$R_E = R_M = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2; \quad T_E = T_M = \frac{4n_2 n_1}{(n_2 + n_1)^2}. \quad (73.16)$$

Например, для перехода воздух — стекло $R \approx 0,04$; $T \approx 0,96$.

В заключение этого параграфа отметим, что все полученные выше формулы справедливы для любой зависимости полей от времени, т. е. для любого спектра волны, в частности для белого света. Это связано с тем, что граничные условия должны выполняться в каждый момент времени. Отсюда вытекает, что все три волны на границе двух сред должны иметь одинаковую зависимость от времени (для неподвижной границы). В частности, частоты всех трех волн должны быть одинаковы.

§ 74. ПОЛНОЕ ВНУТРЕННЕЕ ОТРАЖЕНИЕ. ТУННЕЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ

При условии полного внутреннего отражения

$$\sin \varphi \geq n_2/n_1 \quad (74.1)$$

преломленная волна отсутствует. Это не означает, что во второй среде нет поля. Действительно, граничные условия (73.1) нельзя удовлетворить только с помощью двух волн. Однако $R = 1$, поэтому $E = E'$ и $H = H'$. Из баланса энергии (73.3) следует тогда, что $\cos \varphi'' = 0$, поскольку $S'' \neq 0$, как мы увидим ниже. Граничные условия (73.4) принимают здесь вид

$$\cos \varphi = \cos \varphi'; \quad E_M'' = 2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_M \sin \varphi; \quad H_M'' = 2H_M. \quad (74.2)$$

Четвертое условие (73.4) мы уже использовали выше ($E = E', H = H'$), а третье записали для H, H'' , как в исходной системе (73.1), так как поле во второй среде не является плоской волной, и поэто-

му $H'' \neq \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} E''$. Отношение полей можно найти из уравнения (74.2):

$$\frac{E_M''}{H_M''} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{\varepsilon_2} \sin \varphi. \quad (74.3)$$

Отметим, что при $\varphi \rightarrow \varphi_0$, где $\sin \varphi_0 = n_2/n_1$ (φ_0 — угол полного внутреннего отражения), $E_M''/H_M'' \rightarrow \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}$, т. е. отношение полей становится таким же, как и в свободной волне.

Вектор $\mathbf{E}_M''$ направлен по нормали к поверхности раздела, как было показано выше, а вектор $\mathbf{H}_M''$ — вдоль поверхности. Поэтому вектор Пойнтинга направлен вдоль границы в направлении падающей волны и равен

$$S_M'' = 4 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} S_M \sin \varphi. \quad (74.4)$$

Для TE -волны заменой $E \rightarrow H$, $H \rightarrow -E$ получим

$$\frac{H_E''}{E_E''} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{\mu_2} \sin \varphi; \quad S_E'' = 4 \frac{\mu_1}{\mu_2} S_E \sin \varphi. \quad (74.5)$$

Граничные условия определяют поле непосредственно у поверхности раздела. Как выглядит поле во второй среде вдали от поверхности? Ограничимся случаем монохроматической волны. Используя связь между частотой и волновым вектором в среде $\omega = kv = kc/n$ и разлагая $\mathbf{k}$ на нормальную и тангенциальную компоненты, можем написать

$$k_{1n}^2 + k_{1t}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2; \quad k_{2n}^2 + k_{2t}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2. \quad (74.6)$$

Используем теперь закон преломления (73.6), который на языке волнового вектора означает сохранение его тангенциальной составляющей:

$$k_{1t} = k_{2t}. \quad (74.7)$$

Заметим попутно, что закон отражения $\varphi' = \varphi$ можно записать в аналогичной форме: $k_t' = k_t$. Исключая из (74.6) k_{2t} с помощью (74.7), найдем

$$k_{2n}^2 = k_2^2 \left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \varphi \right). \quad (74.8)$$

При условии полного внутреннего отражения ($\sin \varphi > n_2/n_1$) $k_{2n}^2 < 0$, и, следовательно, $k_{2n} = \pm i |k_{2n}|$ становится мнимым. Это означает, что волна экспоненциально затухает в глубь второй среды. Действительно, поле во второй среде можно представить в виде

$$E''(z) = E_0'' e^{i k_{2n} z} = E_0'' e^{-|k_{2n}| z}, \quad (74.9)$$

где z — координата вдоль нормали к поверхности; E_0'' — поле на границе (74.2). Знак в экспоненте выбран из условия $E'' \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Это условие означает, в сущности, что волна приходит из первой среды. Таким образом, при полном внутреннем отражении поле проникает во вторую среду на глубину

$$\Delta z \sim l = \frac{1}{|k_n|} = \frac{\lambda_2}{2\pi \sqrt{\left(\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0}\right)^2 - 1}} \quad (74.10)$$

где φ_0 — угол полного внутреннего отражения. Для φ , не слишком близких к φ_0 , глубина проникновения оказывается порядка длины волны λ_2 во второй среде.

Теперь легко понять, почему энергия во второй среде течет вдоль поверхности. Рассмотрим предельный случай скользящего падения ($\varphi \rightarrow \pi/2$), когда волна в первой среде распространяется почти параллельно поверхности. В силу граничных условий фаза поля во второй среде должна совпадать с фазой падающей волны. Отсюда получается неожиданный результат: поле во второй среде будет распространяться с фазовой скоростью волны в первой среде. Это, однако, не противоречит соотношению (74.6), так как, хотя волна во второй среде распространяется вдоль поверхности, $k_{2n} \neq 0$ из-за затухания волны. Для фазовой скорости поля во второй среде получим

$$v_2 = \frac{\omega}{k_{2t}} = \frac{\omega}{k_{1t}} = \frac{c/n_1}{\sin \varphi} \rightarrow v_1 \quad (\varphi \rightarrow \pi/2). \quad (74.11)$$

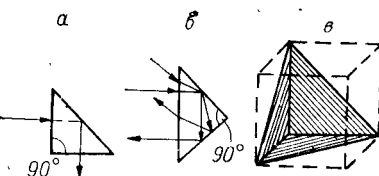
При произвольном φ ($\sin \varphi > n_2/n_1$) скорость v_2 равна «проекции» $v_{1t} = v_1/\sin \varphi$. При $\varphi \rightarrow \varphi_0$ фазовая скорость во второй среде становится «нормальной»: $v_2 \rightarrow c/n_2$. Физический смысл полученного результата состоит в том, что поле во второй среде не является независимой (свободной) волной, а как бы жестко «скреплено» (граничными условиями) с полем падающей волны.

При скользящем падении ($\varphi \rightarrow \pi/2$) возникает еще один парадокс: поле вблизи поверхности в первой среде удваивается (см. рис. X.4), а плотность энергии возрастает в четыре раза. Откуда берется дополнительная энергия? Обсуждение этого парадокса будет дано в главе о дифракции. Аналогичный парадокс возникает и в случае скользящего падения без полного внутреннего отражения. В этом случае поле отраженной волны направлено противоположно полю падающей, так что полное поле в первой среде вблизи границы обращается в нуль. Куда же передается энергия падающей волны? Интересно отметить, что в этом случае поле во второй среде также равно нулю, т. е. полное отражение (при $\varphi = \pi/2$) происходит без проникновения волны во вторую среду.

Полное внутреннее отражение используется в оптической технике для поворота луча. Примером могут служить призмы, изображенные на рис. X.7. Первая из них (а) работает как обычное зеркало: угол падения (по отношению к косой грани) равен углу

Рис. X.7. Примеры использования призмы полного внутреннего отражения.

a — поворот пучка света на 90° ; *б* — поворот пучка света на 180° ; *в* — «угловой отражатель» — отражение произвольно направленного пучка света на 180° .



отражения. Вторая призма (*б*) оказывается более «хитрой»: она поворачивает луч на 180° независимо от угла падения, если луч лежит в плоскости рисунка. Призма (*в*) избавлена от этого ограничения: она отражает луч точно назад, независимо от его направления. Она представляет собой трехгранную пирамиду, получающуюся отсечением угла куба. В проекции на любую боковую грань призмы отражение происходит от двух взаимно перпендикулярных плоскостей, т. е. аналогично случаю (*б*). Отражатель из нескольких десятков призм типа (*в*) установлен американскими космонавтами на Луне и позволяет с огромной точностью (~ 15 см) измерять траекторию Луны по отражению лазерного луча.

Проникновение волны во вторую среду в условиях полного внутреннего отражения приводит к интересному явлению при наличии третьей среды (рис. X.8). Пусть, например, две стеклянные пластинки разделены щелью шириной d . Если $d \gg \lambda$, граничные условия на второй пластинке будут слабо влиять на полное внутреннее отражение в первой. Поэтому для оценки можно воспользоваться выражением (74.9). Пренебрегая разницей между E и E'' , а также отражением на входе во вторую пластинку, получим оценку для коэффициента прохождения через щель:

$$T \sim e^{-2|k_n|d} = e^{-\frac{4\pi d}{\lambda} \sqrt{1-n^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (74.12)$$

Явление это получило название *туннельного эффекта*. Смысл такого названия выяснится в § 88. Туннельный эффект связан с другим важным понятием *оптического контакта* двух сред. Последний имеет место, если ширина щели $d \ll \lambda$, когда волна проходит из одной среды в другую без существенного отражения, независимо от угла. Так как для света $\lambda \sim 0,5$ мкм, то для достижения оптического контакта требуется очень тщательная при шлифовка поверх-

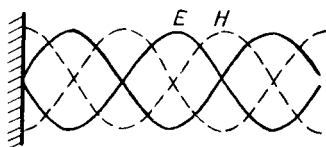
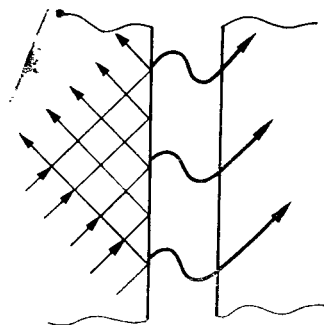


Рис. X.9. Образование стоячей волны при отражении.

Рис. X.8. Туннельный эффект при полном внутреннем отражении.

ностей. По этой же причине наблюдение туннельного эффекта для света является очень тонким экспериментом. Однако его легко провести в диапазоне сантиметровых длин волн, используя, например, парафиновые пластинки.

§ 75. СТОЯЧАЯ ВОЛНА

Рассмотрим отражение плоской монохроматической волны с круговой поляризацией от идеального зеркала при нормальном падении (рис. X.9). В результате суперпозиции падающей и отраженной волн в пространстве перед зеркалом электромагнитное поле будет описываться выражениями

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E_0 e^{i(-kz - \omega t)} - E_0 e^{i(kz - \omega t)} = -2iE_0 e^{-i\omega t} \sin kz, \\ H(z, t) &= -iE_0 e^{i(-kz - \omega t)} - iE_0 e^{i(kz - \omega t)} = -2iE_0 e^{-i\omega t} \cos kz. \end{aligned} \quad (75.1)$$

Такое поле называется *стоячей волной*. Действительно, оно представляет собой модулированную по амплитуде волну, огибающая которой неподвижна в пространстве. Период огибающей равен $\lambda/2$, причем огибающие E и H сдвинуты на $\lambda/4$. Нули поля называются узлами стоячей волны. Узлы E расположены в точках $z_n = n\lambda/2$. Один из узлов в соответствии с граничными условиями приходится на зеркало ($z = 0$).

Из (75.1) вытекает еще одна интересная особенность поля стоячей волны с круговой поляризацией (75.1): $\mathbf{H} = \pm \mathbf{E}$, т. е. эти векторы параллельны в отличие от бегущей волны, где они взаимно перпендикулярны.

В случае линейной поляризации падающую волну можно представить в виде

$$\begin{aligned} E_{\text{пад}}(z, t) &= \frac{E_0}{2} (e^{-i(kz + \omega t)} + e^{i(kz + \omega t)}) = E_0 \cos(kz + \omega t); \\ H_{\text{пад}}(z, t) &= -iE_{\text{пад}}(z, t). \end{aligned} \quad (75.2)$$

Стоячая волна описывается теперь выражением

$$E(z, t) = -2E_0 \sin kz \cdot \sin \omega t; \quad H(z, t) = -2iE_0 \cos kz \cdot \cos \omega t. \quad (75.3)$$

Таким образом, векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ оказываются взаимно перпендикулярными, как и в бегущей волне.

Для волны круговой поляризации вектор Пойнтинга тождественно равен нулю в силу параллельности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. В случае линейной поляризации

$$S(z, t) = \frac{cE_0^2}{4\pi} \sin 2kz \cdot \sin 2\omega t, \quad (75.4)$$

энергия поля «болтается» между соседними узлами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Средний поток энергии как по z , так и по t равен нулю. Полученный результат приводит на первый взгляд к парадоксу: суперпозиция

двух циркулярно поляризованных волн с нулевым вектором Пойнтинга дает волну с ненулевым потоком энергии. Это еще одна иллюстрация отмеченного ранее факта, что векторы Пойнтинга, вообще говоря, нельзя складывать по обычным правилам.

Если зеркало обладает конечной проводимостью, появляется поток энергии, направленный в сторону зеркала и соответствующий потерям энергии в нем.

Рассмотрим теперь отражение волны от идеального зеркала, движущегося с некоторой скоростью $v \ll c$. Тогда в первом приближении можно считать, что стоячая волна (75.1) будет просто смещаться вместе с зеркалом: $z \rightarrow z - vt$. Неподвижный наблюдатель будет регистрировать модуляцию амплитуды волны во времени с частотой $\Omega_M = 2kv$. С другой стороны, это есть не что иное, как эффект Доплера, в результате которого частота отраженной волны смещается. В системе отсчета зеркала частота как падающей, так и отраженной волн $\omega' = \omega + kv$. В результате частота отраженной волны в неподвижной системе $\omega_{отр} = \omega + 2kv$. Суперпозиция волн с разными частотами приводит к появлению модуляции с разностной частотой $\Omega_M = \omega_{отр} - \omega = 2kv$. Последняя легко выделяется с помощью детектирования, что позволяет измерять с большой точностью скорость отражателя. Любопытный пример использования эффекта Доплера — измерение скорости движения ледников в Антарктиде. Оказалось, что средняя скорость движения одного из ледников в районе ст. Молодежная $v = 10^{-5}$ см/с ≈ 3 м/год (частота модуляции 0,3 Гц). Кроме того, ледник совершает пульсирующее движение со скоростью 100 м/год (частота 10 Гц).

§ 76. РЕЗОНАТОРЫ

Если в один из узлов стоячей волны (75.1) поместить второе зеркало, параллельное первому, поле между зеркалами не изменится. Это простейший пример *резонатора* — так называемый резонатор Фабри — Перо. При заданном расстоянии между зеркалами L стоячая волна, векторы E , H которой параллельны зеркалам, образуется при условии

$$L = n\lambda/2, \quad \omega_n = n\pi c/L, \quad (76.1)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Второе соотношение дает так называемый *спектр резонатора*, или набор его *собственных частот*. В дальнейшем мы увидим, что любое поле в резонаторе можно представить как суперпозицию полей с собственными частотами, которые называются *собственными колебаниями поля* в резонаторе, или его *модами*. В этом отношении резонатор похож на колебательную систему с бесконечным числом степеней свободы.

Характерной особенностью мод является стационарность их амплитудной модуляции. Это означает, что амплитуды собственных колебаний зависят только от координат, но не от времени. В рас-

смаатриваемом простейшем примере резонатора

$$|E| = E_0 \left| \sin \frac{n\pi z}{L} \right|. \quad (76.2)$$

Название «резонатор» связано с тем, что реакция этого устройства на внешнее поле резко зависит от частоты: легче всего «раскачать» резонатор на одной из его собственных частот. Делается это с помощью вводимого в резонатор штыря, на который подается переменное напряжение, или с помощью петли с переменным током (так называемая петля связи).

Можно возбудить резонатор и другим, не менее важным, способом — при помощи пучка электронов с переменным током

$$I = I_0 + I_1 \sin(\Omega t + \theta_0); \quad I_1 < I_0. \quad (76.3)$$

Пусть такой пучок малого диаметра $d \ll \lambda$ проходит сквозь резонатор параллельно электрическому полю плоскополяризованной волны (рис. X.10). Для ограничения области взаимодействия волны с пучком мы ввели вторую пару плоскостей, перпендикулярных вектору E и потому не влияющих на волны этой поляризации. Очевидно, что возбуждение резонатора модулированным пучком будет наиболее эффективно в случае резонанса, т. е. когда частота модуляции Ω совпадает с частотой одной из мод:

$$\Delta\omega = \omega_n - \Omega \rightarrow 0, \quad (76.4)$$

а разность фаз модуляции пучка и колебаний поля θ_0 соответствует торможению пучка ($\theta_0 = 0$, см. (75.3)). Если в начальный момент колебания в резонаторе отсутствовали, то они автоматически возбуждаются в нужной фазе.

Средняя мощность, передаваемая резонатору пучком,

$$P = \frac{dW_n}{dt} = -\overline{IE}h = I_1 E_n h \left| \sin \frac{n\pi z_0}{L} \right| \overline{\sin^2 \omega t_0} = \frac{I_1 E_n h}{2} \left| \sin \frac{n\pi z_0}{L} \right|, \quad (76.5)$$

где z_0 — координата оси пучка, а

$$W_n = \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV = \frac{E_n^2}{16\pi} Llh \quad (76.6)$$

— энергия поля в резонаторе при условии, что возбуждается только одна мода колебаний с амплитудой E_n . В (76.6) мы использовали выражение (75.3) с $E_n = 2E_0$. Подставляя (76.6) в (76.5), найдем

$$E_n = \frac{4\pi I_1}{Ll} \left| \sin \frac{n\pi z_0}{L} \right| t. \quad (76.7)$$

Таким образом, амплитуда колебаний поля в резонаторе растет пропорционально времени. Чем же определяется ее максимум? Один из факторов — торможение электронов, которое ограничивает амплитуду поля величиной

$$E_n \sim \frac{eV}{h \left| \sin \frac{n\pi z_0}{L} \right|}, \quad (76.8)$$

где eV — кинетическая энергия электронов на входе в резонатор.

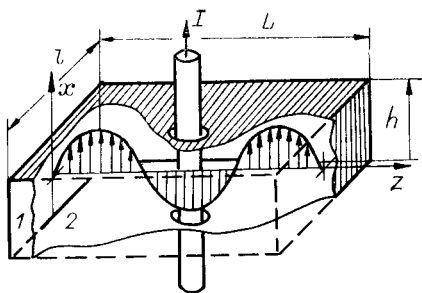


Рис. X.10. Возбуждение простейшего резонатора электронным пучком.

1 — «зеркала»; 2 — крышки резонатора; стрелками показано поле E.

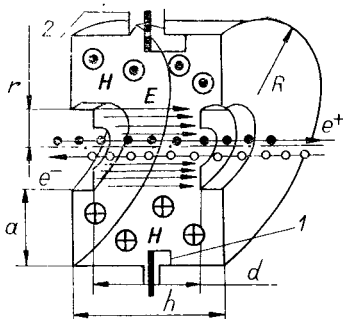


Рис. X.11. Резонатор накопителя электронов и позитронов ВЭПП-4 ИЯФ СО АН СССР.

Рабочая частота 182 МГц ($\lambda_0 = 1,648$ м). 1 — петля обратной связи с генератором; 2 — ввод мощности; $R = 59$ см, $r = 12,75$ см, $h = 70$ см, $d = 49$ см. Напряжение на ускоряющем зазоре до 2 млн. вольт.

Другой фактор — расстройка частоты ($\Delta\omega \neq 0$). Это приводит к уходу фазы, так что через время

$$t \approx \frac{\pi}{\Delta\omega} \quad (76.9)$$

электроны начинают ускоряться, и раскачка резонатора прекращается. Максимальную амплитуду колебаний поля можно оценить, подставляя (76.9) в (76.7):

$$E_n \sim \frac{4\pi^2 I_1}{Ll|\Delta\omega|} \left| \sin \frac{n\pi z_0}{L} \right|. \quad (76.10)$$

Отметим, что при $t \ll \pi/|\Delta\omega|$ расстройка частоты не влияет на резонанс, т. е. амплитуда колебаний нарастает согласно (76.7), резонатор как бы не «чувствует» этой расстройки. Можно сказать поэтому, что частота колебаний пучка является в смысле взаимодействия его с резонатором неопределенной, причем эта неопределенность $\Delta\Omega$ тем больше, чем меньше время существования пучка:

$$|\Delta\Omega|t \sim \pi. \quad (76.11)$$

Это один из примеров так называемого соотношения неопределенности между частотой и длительностью колебаний. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в § 79.

Наконец, необходимо учесть потери энергии в стенках резонатора за счет их конечной проводимости. Максимальная амплитуда колебаний поля определяется из равенства мощности потерь и мощности «накачки» (76.5).

Потери в резонаторе, как и в контуре (см. § 52), характеризуются его добротностью Q_n , которая определяет скорость затухания собственных колебаний резонатора:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\omega_n}{Q_n} W. \quad (76.12)$$

Щелевой резонатор, рассмотренный выше (см. рис. X.10), напоминает одновитковый контур с емкостью между стенками 2. Эта аналогия становится еще более близкой для реальных резонаторов, используемых в накопителях электронов и позитронов Института ядерной физики в Новосибирске (рис. X.11). Точный расчет полей в таком резонаторе представляет собой весьма сложную математическую задачу, однако основную (наинизшую) частоту такого резонатора можно приближенно найти, рассматривая его как контур (см. задачу ниже).

Задача. Оценить частоту основной моды колебаний для резонатора, изображенного на рис. X.11.

В этом резонаторе электрическое и магнитное поля можно считать приближенно разделенными в пространстве. Рассматривая резонатор как последовательно включенные емкость $C \sim r^2/4d$ и индуктивность $L \sim 2ah/r$, найдем $\lambda_0 = c/f_0 \sim 130$ см, $f_0 = \omega_0/2\pi = c/(2\pi\sqrt{LC}) \sim (c/2\pi)\sqrt{2d/rah} \sim 230$ МГц. Численные значения даны для следующих реальных размеров резонаторов ВЭПП-4: $r = 12,75$ см; $a = 46,25$ см; $h = 70$ см; $d = 49$ см. Точные значения равны: $f_0 = 182$ МГц; $\lambda_0 = 164,8$ см.

Рассмотрим теперь резонатор более простой геометрии, поддающийся точному расчету. Пусть, например, он представляет собой прямоугольный параллелепипед со сторонами a , b , d (рис. X.12). В общем случае волновой вектор имеет все три составляющие вдоль сторон резонатора: k_a , k_b , k_d . Тогда граничные условия дают три соотношения:

$$k_a a = l\pi; \quad k_b b = m\pi; \quad k_d d = n\pi, \quad (76.13)$$

где l , m , n — целые числа. Отсюда частота моды lmn

$$\omega_{lmn} = ck = \pi c \sqrt{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{d^2}} \quad (76.14)$$

так как $k^2 = k_a^2 + k_b^2 + k_d^2$. Наинизшая (основная) частота такого резонатора, очевидно, соответствует наименьшим возможным значениям чисел l , m , n . Одно из этих чисел можно положить равным нулю, например $n = 0$. Это значит, что поля не зависят от координаты вдоль стороны d , что возможно, если вектор $\mathbf{E}$ направлен вдоль этой стороны, а вектор $\mathbf{H}$ ему перпендикулярен. Остальные два числа l , $m \neq 0$, как это вытекает из граничных условий: $E_t = 0$, $H_n = 0$. Таким образом, частота основной моды

$$\omega_{110} = \pi c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}; \quad a, b > d. \quad (76.15)$$

Реальные резонаторы имеют обычно сложную геометрию, например резонатор магнетрона (рис. X.13). Однако при любой геометрии всегда имеется дискретный спектр собственных частот, зависящих от трех целых чисел, — по числу пространственных координат.

Основное применение резонаторов — генерация и усиление электромагнитных колебаний в радиодиапазоне. В приборах такого типа энергия электронного пучка передается полю резонатора.

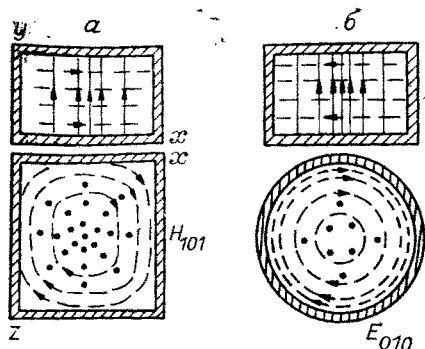


Рис. X.12. Структура электромагнитного поля в прямоугольном (а) и цилиндрическом (б) резонаторах (основная мода колебаний). Силовые линии: E — сплошные, H — пунктир.

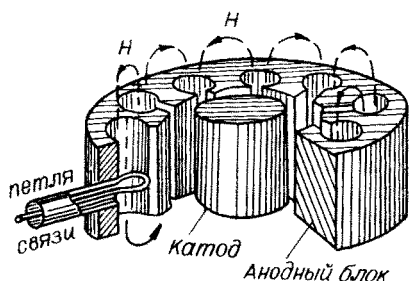


Рис. X.13. Многокамерный магнетрон (в разрезе).

Другое его важное применение — ускорение заряженных частиц высокочастотным электрическим полем. Ускоритель представляет собой, по существу, обращенный генератор. При конструировании резонаторов для этих приборов встречаются две основные трудности: достижение минимальных потерь и максимальной напряженности электрического поля. Например, резонатор ВЭПП-4 (см. рис. X.11) имеет добротность $Q_1 \approx 3 \cdot 10^4$ ($\lambda_1 = 164,8$ см). В специальных случаях используются сверхпроводящие резонаторы, добротность которых достигает 10^{10} . Несмотря на полное отсутствие электрического сопротивления ($\sigma = \infty$), эти резонаторы имеют конечную добротность из-за излучения электромагнитного поля через неизбежные технические отверстия, например для ввода энергии в резонатор, а также из-за потерь на несверхпроводящих примесях. Получение высоких напряженностей электрического поля также представляет собой сложную техническую проблему. Максимальные поля в вакуумных резонаторах превышают 1 МВ/см. Это приблизительно на порядок больше, чем статические поля в лучших изоляторах. Такая разница связана с высокой частотой колебаний электрического поля, что затрудняет развитие разряда.

Глава XI

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

§ 77. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ. ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Свойства электромагнитной волны (как, вообще говоря, и любой другой волны), ее взаимодействие со средой, методы генерации и наблюдения существенно зависят от ее частоты или длины волны. Простейшими свойствами обладает, как правило, монохрома-

тическая волна, поле которой изменяется во времени и в пространстве по гармоническому закону; иными словами, такая волна имеет определенные частоту и волновое число. Что же делать, если волна немонохроматическая? Как исследовать ее свойства, например ее взаимодействие с веществом? Оказывается, что такую волну всегда можно представить как суперпозицию конечного или бесконечного числа мономонхроматических волн. Такой метод исследования называется спектральным разложением (волны), или, более точно, фурье-разложением (Жан Батист Жозеф Фурье, 1822 г.). Последнее предполагает разложение именно на гармонические составляющие, тогда как термин спектральное разложение подразумевает более общую процедуру разложения по самым различным функциям (например, сферические, функции Бесселя и др.). Отметим, что спектральное разложение составляет основу квантово-механического описания физических явлений.

Как же производится фурье-разложение? Рассмотрим плоскую волну. Пусть в начальный момент времени задан ее вектор-потенциал $A(x, 0) = A(x)$. Пусть, далее, поле $A(x)$ является периодическим с периодом l . Оказывается, что такую функцию можно представить в виде ряда

$$A(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{l}} e^{ik_n x}; \quad k_n = \frac{2\pi n}{l}. \quad (77.1)$$

Действительно, каждый член этого ряда имеет период l/n , а значит и l . Иными словами, такой ряд представляет некоторую функцию с периодом l . Условия сходимости таких рядов выясняются в математической теории фурье-разложения. Основным результатом этой теории сводится, по существу, к тому, что любое реальное поле можно разложить в ряд Фурье.

Постоянные коэффициенты A_n характеризуют амплитуды и фазы фурье-гармоник (или фурье-компонент) поля $A(x)$. Если описывать поле действительной функции $A(x)$, то коэффициенты A_n должны удовлетворять дополнительному соотношению

$$A_n = A_{-n}^*, \quad (77.2)$$

где звездочка означает комплексно-сопряженную величину. В случае плоской волны можно, однако, рассматривать комплексную величину $A(x)$ как полный двумерный вектор поля в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны (см. § 69). В таком случае ограничение (77.2) отпадает.

Для вычисления коэффициента A_m умножим обе части равенства (77.1) на $e^{-ik_m x}$ и проинтегрируем по периоду. Найдем

$$A_m = \int_0^l \frac{A(x)}{\sqrt{l}} e^{-ik_m x} dx = |A_m| e^{i\varphi_m}. \quad (77.3)$$

Все остальные слагаемые в (77.1) исчезают, поскольку интеграл

от $e^{i(k_n - k_m)x}$ не равен нулю только для $k_n = k_m$. Множитель $1/\sqrt{l}$ введен для того, чтобы выражения (77.1) и (77.3) выглядели более симметрично. Эта симметрия станет полной в случае непрерывного спектра (см. § 78). Введение такого множителя не обязательно и не является общепринятым. Можно, например, исключить этот множитель из (77.1), тогда в (77.3) появится множитель $1/l$.

Для действительной функции $A(x)$ ряд Фурье можно записать также в виде

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos k_n x + b_n \sin k_n x). \quad (77.4)$$

Коэффициенты обоих рядов связаны друг с другом следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} a_n &= 2|A_n| \cos \varphi_n; \quad b_n = -2|A_n| \sin \varphi_n; \\ a &= A_0; \quad A_n = |A_n| e^{i\varphi_n}. \end{aligned} \quad (77.5)$$

Набор коэффициентов A_n , который можно рассматривать как некоторую функцию $A_n = A(k_n)$, называют фурье-спектром поля $A(x)$, или просто *спектром* (поля). Иногда различают *амплитудный* ($|A_n|$) и *фазовый* (φ_n) спектры. В рассмотренном случае периодического поля спектр называется дискретным, или точечным, так как волновое число принимает лишь отдельные (дискретные) значения.

Совершенно аналогично производится фурье-разложение по времени, приводящее к представлению колебаний поля в некоторой точке пространства в виде набора гармонических функций от аргументов $\omega_n t$, где $\omega_n = 2\pi n/T$, T — период колебаний поля.

Поскольку каждая из гармонических составляющих как по x , так и по t представляет монохроматическую волну, величины k_n , ω_n связаны обычным соотношением

$$k_n = \pm \frac{\omega_n}{c} = \pm \frac{n\omega_0}{c}; \quad \omega_0 = ck_0 = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{l}{c}, \quad (77.6)$$

где знаки соответствуют разным направлениям распространения волны, причем в общем случае имеет место суперпозиция волн обоих направлений.

Задача 1. Найти зависимость диэлектрической проницаемости среды от частоты поля.

Зависимость диэлектрической проницаемости от частоты определяется динамикой атомных электронов. Характерной особенностью этой динамики являются гармонические колебания электронов с разными частотами, как это вытекает из вида атомных спектров. Поэтому в качестве простейшей модели диэлектрика можно взять набор различных осцилляторов с собственными частотами ω_l и плотностью соответствующих осцилляторов n_l . Уравнение движения электрона для каждого осциллятора:

$$\ddot{\mathbf{r}}_l + 2\lambda_l \dot{\mathbf{r}}_l + \omega_l^2 \mathbf{r}_l = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\Omega t}, \quad (77.7)$$

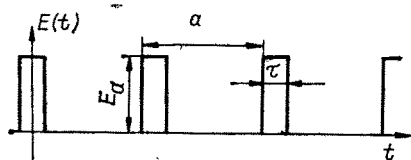
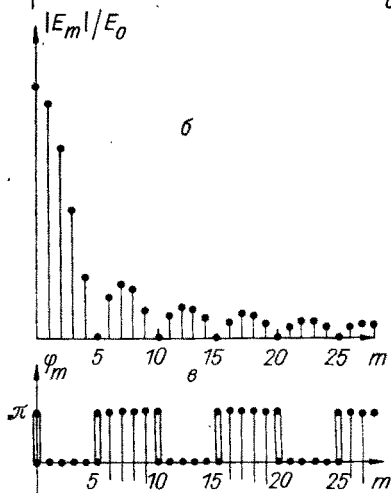


Рис. XI.1. Бесконечная последовательность прямоугольных импульсов и ее спектр.

a — функция $E(t)$; b — амплитудный спектр для $T/\tau = 5$; c — фазовый спектр для $T/\tau = 5$.



где λ_l — коэффициенты трения, характеризующие потери энергии в диэлектрике. Решая уравнение (77.7) и суммируя по всем осцилляторам, найдем вектор поляризации

$$P = \sum_l e n_l r_l = \sum_l \frac{n_l e^2 E / m}{\omega_l^2 - \Omega^2 - 2i\lambda_l \Omega}. \quad (77.8)$$

Ограничимся далее случаем среды малой плотности (газ), когда действующее поле приближенно равно среднему. Тогда

$$\varepsilon(\Omega) - 1 = \sum_l \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_l^2 - \Omega^2 - 2i\lambda_l \Omega}, \quad (77.9)$$

где $\omega_{pl}^2 = 4\pi n_l e^2 / m$ — «плазменная» частота осцилляторов сорта l . В плазме $\omega_l = 0$ и

$$\varepsilon_p(\Omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\Omega^2 + 2i\lambda_l \Omega}. \quad (77.10)$$

Коэффициент трения λ связан со статической ($\Omega = 0$) проводимостью плазмы:

$$\sigma_p = \frac{j}{E} = \frac{n_p e^2}{2m\lambda_p} = \frac{\omega_p^2}{8\pi\lambda_p}. \quad (77.11)$$

Соотношения (77.10), (77.11) справедливы и для металлов, которые можно рассматривать в определенных пределах как своеобразную плазму (ср. § 21).

Задача 2. Найти спектр поля, которое представляет собой периодическую (период T) последовательность прямоугольных импульсов с амплитудой E_a и длительностью τ (рис. XI.1, a).

«Основная» частота поля равна $\omega_0 = 2\pi/T$. Спектр поля содержит частоты $\omega_m = m\omega_0$. Используя (77.3), найдем:

$$|E_m| = \frac{E_a}{\sqrt{T}} \left| \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{im\omega_0 t} dt \right| = \frac{2E_a}{\sqrt{T}} \frac{\left| \sin \frac{m\omega_0 \tau}{2} \right|}{m\omega_0}, \quad E_0 = E_a \frac{\tau}{\sqrt{T}}.$$

Фазовый спектр зависит от выбора начала отсчета. Для данного сигнала ($T/\tau = 5$) получим

$$\varphi_m = \begin{cases} 0; & 10l \leq m \leq 5(2l+1); \\ \pi; & 5(2l+1) \leq m \leq 10(l+1); \end{cases} \quad (77.12)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

Фурье-разложение поля имеет вид

$$E(t) = \frac{E_a}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(m\omega_0\tau/2)}{m} e^{-im\omega_0 t} = E_a \frac{\tau}{T} + \\ + \frac{2E_a}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(m\omega_0\tau/2)}{m} \cos m\omega_0 t. \quad (77.13)$$

Это разложение содержит так называемую постоянную составляющую $E = E_a\tau/T$, поскольку функция $E(t)$ положительна.

Фурье-разложение может иметь как форму (77.1), так и форму (77.4). В последнем случае в разложении присутствуют только косинусы в силу симметрии поля ($E(t) = E(-t)$). Пример спектра показан на рис. XI.1 для частного случая $T/\tau = 5$. Если же, например, $T/\tau = 1$, то из всего спектра остается одна постоянная составляющая $E = E_a$. В пределе $T \rightarrow \infty$ спектр становится «сплошным» (см. § 78), так как расстояние между соседними линиями $\Delta\omega = \omega_0 \rightarrow 0$. В другом предельном случае $\tau \rightarrow 0$ спектр становится однородным: $E_m \rightarrow E_a\tau/\sqrt{T}$, т. е. фурье-амплитуды не зависят от частоты $\omega_m = m\omega_0$.

Операция фурье-разложения допускает простую и далеко идущую геометрическую аналогию с разложением вектора по координатным осям. Действительно, в выражении (77.1) любую комплексную периодическую функцию $f(x)$ можно рассматривать как «вектор». Совокупность всех таких «векторов» называется гильбертовым пространством. Определим скалярное произведение двух векторов гильбертова пространства как

$$(f, F) = \int_0^l f(x) F^*(x) dx, \quad (77.14)$$

где l — период, одинаковый для всех функций.

Рассмотрим теперь любые гармонические функции:

$$e_1 = e^{ik_1 x} / \sqrt{l}; \quad e_2 = e^{ik_2 x} / \sqrt{l}; \quad k_{1,2} = 2\pi n_{1,2} / l,$$

где $n_{1,2}$ — целые (условие периодичности). Из определения (77.14) вытекает, что «векторы» e_1, e_2 «ортогональны» $((e_1, e_2) = 0)$, если $k_1 \neq k_2$, и «нормированы» на единицу, так как их «модули» $(e_1, e_1) = (e_2, e_2) = 1$. Значит, набор таких гармонических функций со всевозможными k_m образует ортонормированный базис гильбертова пространства. Но тогда должна иметь место общая формула разложения вектора по базисным ортам с «проекциями» f_n вектора f на «оси координат»:

$$f(x) = \sum_n f_n e_n, \quad f_n = (f, e_n), \quad (77.15)$$

которая в точности совпадает с (77.3), в то время как само фурье-разложение (77.1) совпадает с (77.15). Отметим, что все сказанное выше не есть вывод фурье-разложения, но всего лишь наглядная аналогия. Основной вопрос теории рядов Фурье — является ли множество гармонических функций полным базисом в гильбертовом пространстве, т. е. всякую ли периодическую функцию можно раз-

ложить в ряд Фурье. Ответ на него дает математический анализ.

Используя векторную аналогию, можно легко получить новое соотношение для фурье-амплитуд. Рассмотрим квадрат «вектора» $f(x)$. По общим формулам векторной алгебры имеем

$$(f, f) = \int_0^l |f|^2 dl = \sum_n |f_n|^2. \quad (77.16)$$

В случае, когда f — напряженность поля, это соотношение имеет простой физический смысл: энергия волны равна сумме энергий ее гармонических составляющих. Иначе говоря, различные гармоники волны не интерферируют между собой (см. § 92).

Равенство (77.16) будем называть *балансом энергии поля*. В математической теории фурье-разложения оно называется равенством Парсевалья.

§ 78. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ. ИМПУЛЬСНОЕ ПОЛЕ

Периодическое поле является некоторым идеализированным пределом, который в действительности никогда не достигается хотя бы потому, что любое поле ограничено в пространстве и во времени. Такое ограниченное поле называется импульсным. На рис. XI.2 приведен пример импульсного поля, возникающего при движении ультрарелятивистского электрона в магнитном поле (так называемое синхротронное излучение, § 134). Можно ли представить такое поле как суперпозицию монохроматических волн? Для изучения этого вопроса применим следующий довольно общий прием. Представим себе, что поле на рис. XI.2 периодически повторяется через некоторый период T , достаточно большой, чтобы можно было пренебречь перекрытием «хвостов» поля. Тогда можно произвести фурье-разложение, а затем, положив $T \rightarrow \infty$, вернуться к исходной задаче об импульсном поле. При $T \rightarrow \infty$ получаем

$$A(t) = \sum_n \frac{A_n}{\sqrt{T}} e^{-in\omega_0 t} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{A_n}{\sqrt{T}} e^{-in\omega_0 t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega; \quad (78.1)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}; \quad n = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad dn = \frac{d\omega}{\omega_0}; \quad A(\omega) = A_n \sqrt{\frac{T}{2\pi}}.$$

Хотя введение дифференциала dn не вполне корректно, так как n — целое, но это удобно в такого рода предельных переходах. Таким образом, мы получили для импульсного поля фурье-разложение, но не в виде суммы, а в виде интеграла. В этом случае говорят о *непрерывном спектре* поля, т. е. частота гармоник ω пробегает теперь непрерывный ряд значений.

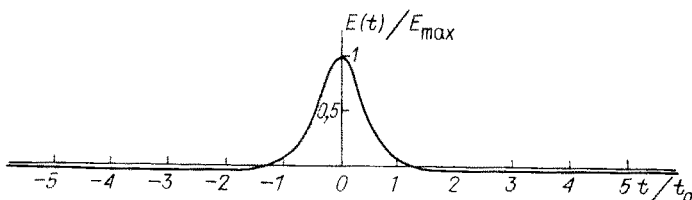


Рис. XI.2. Импульс синхротронного излучения электрона, движущегося в накопителе ВЭПП-3.

Энергия 1,5 ГэВ, радиус кривизны траектории 8 м, $t_0 = 10^{-18}$ с.

Спектр $A(\omega)$ вычисляется из (77.3) с помощью аналогичного предельного перехода:

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} A_n|_{T \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A(t) e^{i\omega_0 t}}{\sqrt{T}} dt |_{T \rightarrow \infty} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{i\omega t} dt. \quad (78.2)$$

Калибровка спектра $A(\omega)$ (множитель $1/\sqrt{2\pi}$) выбрана таким образом, чтобы подчеркнуть симметрию соотношений (78.1), (78.2). Как и в случае соотношений (77.1), (77.3), такая калибровка не является общепринятой. Говорят также о *фурье-преобразовании*, причем спектр $A(\omega)$ называется *фурье-образом* функции $A(t)$, и, наоборот, $A(t)$ является *фурье-образом* $A(\omega)$. Отметим еще, что амплитуда постоянной составляющей ($\omega = 0$) с точностью до множителя совпадает с интегралом от поля $A(t)$ (78.2).

Задача 1. Найти спектр одиночного прямоугольного импульса поля (ср. с задачей 2, § 77 при $T \rightarrow \infty$, рис. XI.1).

По формуле (78.2) имеем

$$E(\omega) = \frac{E_a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{i\omega t} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E_a \frac{\sin \frac{\omega \tau}{2}}{\omega}. \quad (78.3)$$

Амплитудный спектр $|E(\omega)| = \sqrt{2} E_a |\sin \omega \tau / 2| / |\omega| \sqrt{\pi}$ изображен на рис. XI.3, б (см. § 79).

Найдем теперь спектр поля частоты ω_0 , существующего конечное время τ : $E(t) = E_a(t) e^{-i\omega_0 t}$, где $E_a(t) = E_a$ при $-\tau/2 < t < \tau/2$ и $E_a(t) = 0$ в остальное время. Иначе говоря, $E_a(t)$ — только что рассмотренный прямоугольный импульс. Подставляя вместо $E_a(t)$ его фурье-разложение, мы видим, что спектр поля $E(t)$ просто сдвинут относительно спектра $E_a(t)$ на ω_0 : $E(\omega) = E_a(\omega - \omega_0)$.

Пусть теперь мы сместили поле во времени на интервал t_1 : $E_1(t) = E(t - t_1)$. Тогда в его фурье-разложении появится дополнительный множитель $e^{i\omega t_1}$: $E_1(\omega) = E(\omega) e^{i\omega t_1}$. Иными словами, фаза фурье-гармоники сместится на величину ωt_1 .

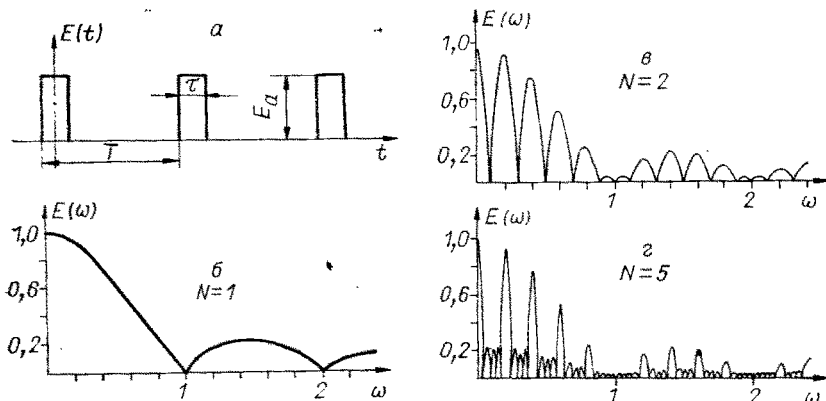


Рис. XI.3. Амплитудные спектры последовательности N прямоугольных импульсов.

Задача 2. Найти спектр затухающих колебаний.

Пусть колебания, «включенные» в момент $t=0$, затухают по экспоненциальному закону: $A(t) = A_0 e^{-i\omega_0 t - (t/\tau)}$; $t > 0$. С помощью (78.2) получаем (ср. (52.10)):

$$A(\omega) = \frac{A_0/\sqrt{2\pi}}{\frac{1}{\tau} - i(\omega - \omega_0)}; \quad |A(\omega)| = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\tau}{\sqrt{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau^2}}; \quad (78.4)$$

$$|\varphi(\omega)| = \text{Arc tg } (\omega - \omega_0)\tau.$$

При $\tau \rightarrow \infty$ имеем незатухающие колебания, «включенные» в момент $t=0$. При $\omega \neq \omega_0$ их спектр найдем из (78.4), положив $1/\tau = 0$:

$$A(\omega) = \frac{iA_0}{\sqrt{2\pi}(\omega - \omega_0)}, \quad \omega \neq \omega_0. \quad (78.5)$$

Чтобы найти поведение спектра при $\omega \rightarrow \omega_0$, произведем предельный переход $\tau \rightarrow \infty$ более аккуратно:

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\tau + i\tau^2(\omega - \omega_0)}{1 + \tau^2(\omega - \omega_0)^2}. \quad (78.6)$$

Покажем теперь, что первое слагаемое $\tau/(1 + \tau^2\Omega^2) \rightarrow \pi\delta(\Omega)$ при $\tau \rightarrow \infty$ ($\Omega = \omega - \omega_0$). Для этого вычислим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau d\Omega}{1 + \tau^2\Omega^2} = \text{Arc tg } (\tau\Omega) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi,$$

откуда

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{1 + \tau^2\Omega^2} = \delta(\Omega). \quad (78.7)$$

Второе слагаемое в (78.6) при $\tau \rightarrow \infty$ дает (78.5). В результате получаем спектр незатухающих колебаний в виде

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} A_0 \delta(\omega - \omega_0) + \frac{iA_0}{\sqrt{2\pi}(\omega - \omega_0)}. \quad (78.8)$$

Второе слагаемое в этом выражении возникает вследствие включения колебаний в момент $t=0$. Если рассмотреть нарастающие колебания, которые выключаются при $t=0$: $A_1(t) = A_0 e^{-i\omega_0 t + (t/\tau)}$, $t > 0$, то их спектр будет отличаться от (78.4) знаком при i , т. е. $A_1(\omega) = A^*(\omega)$. То же относится и к предельному спектру (78.8). Если теперь сложить оба колебания, то в пределе $\tau \rightarrow \infty$ получатся монохроматические колебания $A_\Sigma = A + A_1 \rightarrow A_0 e^{-i\omega_0 t}$, спектр которых есть δ -функция:

$$A_\Sigma(\omega) = \sqrt{2\pi} A_0 \delta(\omega - \omega_0). \quad (78.9)$$

При $\omega_0 = 0$ получим из (78.8) спектр «ступеньки», т. е. постоянного поля, включенного в момент $t=0$, а из (78.9) — спектр статического поля.

Задача 3. Найти спектр поля гауссовой конфигурации: $A(x) = A_0 e^{-x^2/2l^2}$.

Интеграл в (78.2) берется с помощью следующего приема. В показателе экспоненты выделяем полный квадрат:

$$-\frac{x^2}{2l^2} - ikx = -\left(\frac{x}{\sqrt{2}l} + \frac{ikl}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{k^2 l^2}{2}$$

и переходим к новой переменной $y = (x/\sqrt{2}l) + (ikl/\sqrt{2})$, имеем

$$A(k) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-k^2 l^2/2} \sqrt{2} l \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = A_0 l e^{-k^2 l^2/2}, \quad (78.10)$$

т. е. фурье-образ поля также имеет гауссову форму.

Обратим внимание на характерную особенность спектров во всех трех задачах: чем уже (короче) поле во времени или в пространстве, тем шире его спектр. Мы вернемся к этому вопросу в § 79.

Для непрерывного спектра также справедлива векторная аналогия фурье-разложения, но теперь уже с непрерывным множеством базисных векторов $e^{-i\omega t}/\sqrt{2\pi}$. В этом случае условие их ортонормируемости становится нетривиальным. Оно может быть получено с помощью двойного фурье-преобразования:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' A(\omega') \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{it(\omega - \omega')} \right] \equiv A(\omega). \end{aligned} \quad (78.11)$$

Но последнее равенство будем справедливым для любой $A(\omega)$, только если выражение в квадратных скобках является δ -функцией:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega')t} dt = \delta(\omega - \omega'). \quad (78.12)$$

Это и есть условие ортонормируемости базисных векторов в непрерывном спектре. Кроме того, такое выражение дает полезное

представление δ -функции. В частности, с его помощью сразу получается спектр монохроматической волны (78.9).

Используя (78.12), можно написать баланс энергии, аналогичный (77.16), и для непрерывного спектра:

$$\begin{aligned}(A(x), A(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} |A(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int dx dk dk' |A(k)|^2 e^{i(k-k')x} = \\ &= \int dk dk' |A(k)|^2 \delta(k-k') = \int_{-\infty}^{\infty} |A(k)|^2 dk.\end{aligned}\quad (78.13)$$

В заключение проиллюстрируем векторную аналогию фурье-преобразования:

Векторное пространство	Гильбертово пространство
$\mathbf{r}$	$f(t)$
$\mathbf{e}_n$	$e^{-i\omega t}/\sqrt{2\pi}$
$(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_k) = \delta_{nk}$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega')t} dt = \delta(\omega - \omega')$
$\mathbf{r} = x_n \mathbf{e}_n$	$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$
$x_n = (\mathbf{r}, \mathbf{e}_n)$	$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$
$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_n x_{1n} x_{2n}$	$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t) dt =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega) f_2^*(\omega) d\omega$

§ 79. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В предыдущем параграфе мы уже обратили внимание на характерную особенность фурье-спектра, ширина которого во всех трех примерах оказалась обратно пропорциональной размеру поля. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

В первом примере длительность прямоугольного импульса является вполне определенной и равной τ . Ширина же спектра, по существу, неоднозначна. В рассматриваемом случае можно, например, считать ширину спектра $\Delta\omega = 4\pi/\tau$ (между нулями функции $E(\omega)$ в (78.3)). Тогда соотношение между длительностью поля и шириной его спектра примет вид $\Delta\omega \cdot \Delta t = 4\pi$. Во втором примере оба параметра неоднозначны, примем (см. (78.4)) $\Delta t = \tau$; $\Delta\omega =$

$= 2/\tau$, откуда $\Delta\omega \cdot \Delta t = 2$. Наконец, для гауссовой конфигурации поля естественно положить (см. (78.10)) $\Delta x = 2l$; $\Delta k = 2/l$, так что $\Delta x \cdot \Delta k = 4$. Мы видим, что в каждом конкретном случае произведение «размеров» поля и его спектра есть константа порядка единицы, точное значение которой зависит от формы поля и способа определения ширины. Оказывается, что этот закон имеет универсальный характер, который можно пояснить следующим образом. Физический смысл фурье-спектра состоит в том, что он характеризует взаимодействие волны с различными осцилляторами (резонанс). В предельном случае бесконечно узкого спектра (линии) резонанс имеет место только с одним осциллятором. При этом говорят о (идеально) монохроматической волне, амплитуда и частота которой постоянны неограниченно долго. В общем случае поле можно записать в виде $E(t) = E_0(t) e^{-i\omega_0 t}$, где $E_0(t)$ — переменная амплитуда, включающая также и комплексную фазу, а значит, и переменную частоту. Фурье-компонента такого поля

$$E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt \quad (79.1)$$

и характеризует энергию, переданную осциллятору с частотой ω , так как можно считать, что $E(t)$ пропорционально силе, а $e^{i\omega t}$ — скорости осциллятора. Если характерное время изменения амплитуды $E_0(t)$ есть Δt (например, длительность поля), то при расстройке $\Delta\omega \ll 1/\Delta t$ резонансная фаза $\Delta\omega \cdot t$ не успеет «уйти» за указанное время, резонанс не нарушится и, значит, взаимодействие волны со всеми осцилляторами в этом интервале частот будет примерно одинаковым. Взаимодействие начнет падать, когда фаза уйдет примерно на π , т. е. когда $\Delta\omega \gtrsim \pi/\Delta t$. Поэтому для ширины спектра $\Delta\omega$ можно принять

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \sim \pi. \quad (79.2)$$

Это и есть знаменитое соотношение неопределенности для длительности и частоты. Неопределенность последней означает, что волне конечной длительности нельзя приписать какое-то одно значение частоты, так как она взаимодействует примерно одинаково с целым набором различных осцилляторов. Иначе говоря, неопределенность частоты нужно понимать не в смысле неполного описания (как, например, неопределенность тепловой скорости молекулы), а в смысле одновременного присутствия всех частот в интервале $\Delta\omega$. Поэтому такую волну называют часто волновым пакетом или группой волн (см. § 84). Аналогично, для размера и волнового числа: $\Delta k \cdot \Delta x \sim \pi$.

Соотношение неопределенности можно применить и к самому осциллятору. Дело в том, что даже для идеальной монохроматической волны время взаимодействия с осциллятором ($\tau_{вз}$) является конечным либо вследствие его затухания ($\tau_{вз} \sim \tau_{зат}$), либо вследствие его включения на конечное время, либо, наконец, из-за изменения частоты, если измерение спектра производится не с по-

мощью нескольких независимых осцилляторов, а посредством одного, но с перестраиваемой частотой. В любом случае неопределенность частоты осциллятора выражается тем же соотношением (79.2) с $\Delta t \sim \tau_{из}$. Это может приводить, в частности, к тому, что осциллятор с достаточно большим $\Delta\omega$ будет «воспринимать» дискретный спектр как непрерывный.

Особенностью соотношения неопределенности является то обстоятельство, что оно справедливо в общем случае лишь по порядку величины. Однако несмотря на это, оно оказывается очень полезным при анализе самых различных волновых процессов, в чем мы будем в дальнейшем неоднократно убеждаться. В принципе вместо равенства по порядку величины (79.2) можно написать точное неравенство:

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \geq \frac{1}{2}, \quad (79.3)$$

где $\Delta\omega$, Δt — среднеквадратичные ширины распределений. Однако применение такого неравенства менее удобно, так как оно может оказаться очень сильным (см. ниже, задача 2).

Задача 1. Оценить полосу частот, необходимую для передачи телевизионного изображения (625 строк, 25 кадров в секунду).

Принимая, что число элементов изображения в строке примерно равно числу строк в кадре, получим для длительности одного элемента изображения $\tau_0 \sim 1/25 \cdot (625)^2 \approx 10^{-7}$ с, откуда $\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi \sim 5$ МГц. Такую полосу можно было бы в принципе разместить и в диапазоне коротких волн для дальних телепередач. Однако тогда пришлось бы закрыть более ста радиостанций ради одного телевизионного канала. Поэтому с самого начала телевидение было вытеснено в УКВ диапазон, а дальние телепередачи стали возможными лишь недавно с использованием различных ретрансляторов, включая спутники связи.

С первого взгляда кажется, что для цветного телевидения необходима тройная полоса частот в соответствии с тремя составляющими цветопередачи (см. § 62). Однако современная система цветного телевидения использует тот же канал, что и для черно-белого телевидения (около 6 МГц). Это оказывается возможным по двум причинам. Во-первых, цветовое разрешение глаза примерно в четыре раза меньше яркостного, так что для передачи цветового сигнала отводится всего 1,6 МГц. Во-вторых, вышеприведенная оценка дает в действительности верхнюю границу необходимой полосы частот, соответствующую такому крайнему случаю, когда все элементы изображения и все кадры резко различаются. Естественно, что в большинстве случаев это не так. Поэтому реальный спектр телевизионного сигнала имеет «квазидискретную» структуру, периоды которой соответствуют частоте строчной развертки ($\approx 15,6$ кГц) и кадровой частоте (25 Гц) (см. задачу 2). В образовавшихся таким образом щелях и размещается цветовой сигнал. Это означает, конечно, что ширина спектра черно-белого телевидения могла бы быть существенно сужена.

Задача 2. Проанализировать спектр поля в виде группы из N одинаковых прямоугольных импульсов длительностью τ , отстоящих друг от друга на расстоянии T (см. рис. XI.3).

Спектр одиночного импульса дается выражением (78.3) с фазовым множителем $e^{in\omega T}$, где n — номер импульса. Спектр сигнала равен сумме спектров импульсов, так что получается спектр (78.3) умноженный на сумму

$$S(\omega) = \sum_{n=0}^N e^{in\omega T} = \frac{1 - e^{iN\omega T}}{1 - e^{i\omega T}}. \quad (79.4)$$

$$|E(\omega)| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E_0 \left| \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} \right| \cdot \left| \frac{\sin \frac{N\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right|. \quad (79.5)$$

Вид этого спектра для $N = 1, 2, 5$ изображен на рис. XI.3. Он характеризуется тремя параметрами. Полная ширина спектра $\Delta\omega \sim \pi/T$ определяется одиночным импульсом. Положение линий определяется периодичностью импульсов T или нулями знаменателя (79.5): $\omega_m = 2\pi m/T$, при этом $S_m = N$. Наконец, ширина линий зависит от полной длины сигнала: $\delta\omega \sim \pi/NT$. В частности, при $N \rightarrow \infty$ получается дискретный спектр (ср. задачу 2, § 77).

В зависимости от характеристик осциллятора, с которым взаимодействует такое поле, его сложный спектр «воспринимается» совершенно по-разному. Очень «плохой» осциллятор с временем затухания $\tau_{\text{зат}} \ll T$ реагирует на отдельный импульс, и для него этот спектр — непрерывный с шириной $\Delta\omega \sim \pi/\tau$. Осциллятор получше ($T \ll \tau_{\text{зат}} \ll NT$) регистрирует дискретный спектр, «не замечая» конечной ширины линий. Наконец, высокочастотный осциллятор ($\tau_{\text{зат}} \gg NT$) регистрирует полную структуру спектра, изображенную на рис. XI.3.

Из этого примера видно, что в общем случае спектр характеризуется несколькими масштабами $\Delta\omega$, отражающими через соотношение неопределенности сложную структуру поля (разные Δt). В частности, дискретный спектр можно характеризовать некоторой полной шириной, которая в данном примере $\sim \pi/\tau$.

В качестве более «хитрого» примера применения соотношения неопределенности рассмотрим частотно-модулированную волну

$$E(t) = E_0 e^{-i\theta(t)}; \quad \theta(t) = \omega_0 t + \theta_0 \sin \Omega t, \quad (79.6)$$

где $\theta(t)$ — фаза волны, изменяющаяся непропорционально времени, и поэтому такая волна называется также и фазово-модулированной. Обычно под частотой такой волны понимают мгновенную скорость изменения фазы

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + (\theta_0 \Omega) \cos \Omega t, \quad (79.7)$$

которая является вполне определенной функцией времени. Где же здесь неопределенность частоты? Можно было бы предположить, что эта неопределенность задается полным интервалом изменения частоты $2\theta_0 \Omega$. Однако это также противоречит соотношению неопределенности, так как при заданной Ω , которая здесь определяет масштаб Δt , неопределенность частоты неограниченно убывает при $\theta_0 \rightarrow 0$. С другой стороны, если считать, в соответствии с соотношением неопределенности, что $\Delta\omega \sim \Omega$, то как же тогда быть с полной шириной спектра, которая при $\theta_0 \gg 1$ может быть значительно больше?

Прежде всего ясно, что имеются, по крайней мере, две разные физические величины, называемые одним и тем же словом — частота. Первую из них (79.7) можно было бы назвать кинематической частотой, она характеризует форму колебаний и никак не связана с соотношением неопределенности. В последнее входит частота, которую можно было бы назвать динамической, так как она определяет взаимодействие волны с системой осцилляторов.

Рассмотрим отдельно два случая: $\theta_0 \ll 1$ (слабая модуляция) и $\theta_0 \gg 1$ (сильная модуляция). Наиболее интересен второй случай, когда интервал изменения кинематической частоты $2\theta_0\Omega$ много больше неопределенности динамической частоты ($\Delta\omega \sim \Omega$). В этом случае можно говорить о приближенной зависимости динамической частоты от времени с точностью, даваемой соотношением неопределенности $\omega(t) \approx d\theta/dt$.

В случае слабой модуляции $\theta_0 \ll 1$ выражение (79.6) можно разложить по θ_0 , и частотная модуляция сведется к амплитудной

$$E(t) \approx e^{-i\omega_0 t} (1 - i\theta_0 \sin \Omega t) = e^{-i\omega_0 t} + \frac{\theta_0}{2} (e^{-i(\omega_0 + \Omega)t} + e^{-i(\omega_0 - \Omega)t}). \quad (79.8)$$

Неопределенность частоты можно считать здесь $\sim \Omega$, а понятие переменной частоты $\omega(t)$ теряет смысл, поскольку амплитуда ее изменения $\theta_0\Omega$ много меньше ее неопределенности.

С частотной модуляцией связано поучительное заблуждение Флеминга, который был в свое время научным консультантом фирмы Маркони. Он считал, что в случае $\theta_0 \ll 1$ ширина спектра будет по-прежнему определяться диапазоном изменения кинематической частоты $2\theta_0\Omega$, т. е. может быть сделана произвольно малой, что, по мнению Флеминга, могло бы решить проблему «тесноты» в эфире. Это вызвало в свое время (1920—1930 гг.) многолетнюю дискуссию; результатом которой было, во-первых, выяснение ошибочности такого представления, а во-вторых, внедрение в радиосвязь частотной модуляции. Выяснилось, что она обладает высокой помехоустойчивостью при $\theta_0 \gg 1$, что связано с передачей сигнала в широкой полосе частот (примерно в 10 раз больше, чем для АМ-радиосвязи).

С первого взгляда проблема кажется тривиальной, хотя бы из выражения (79.8). В действительности, однако, дискуссия велась, в основном, вокруг вопроса о физической реальности фурье-представления поля. Любопытно отметить, что знаменитый Герц отрицательно относился к спектральным представлениям.

§ 80. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ. СТОХАСТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Перейдем теперь к изучению более реального случая стационарной волны с непрерывным спектром. Типичным примером такого поля является солнечный свет, который характеризуется широким непрерывным спектром. Другим крайним случаем можно считать автоколебательную систему (генератор). В первом приближении такая система генерирует гармонические колебания, т. е. ее спектр сводится к одной линии. Однако в силу тех или иных возмущений эта линия всегда имеет конечную ширину, так что спектр будет непрерывным, хотя и очень узким. Например, лучшие лазеры имеют ширину линии $\Delta\omega/\omega \sim 10^{-14}$.

Прежде всего оказывается, что обычное фурье-разложение для импульсного поля (см. § 78) здесь неприменимо из-за расходимости фурье-интегралов. Действительно, рассмотрим стационарное поле на конечном интервале T . Тогда можем написать

$$E_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_T E(t) e^{i\omega t} dt, \quad (80.1)$$

где интеграл берется на интервале T . Запишем баланс энергии волны:

$$\int_T |E(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |E_T(\omega)|^2 d\omega \rightarrow T \overline{|E(t)|^2}. \quad (80.2)$$

Мы предполагаем, что интеграл по спектру сходится (см. ниже). Последнее выражение дает предел интеграла при $T \rightarrow \infty$, где средняя мощность волны $\overline{|E(t)|^2}$ постоянна в силу принятой стационарности поля (например, мощность солнечного излучения). Таким образом, в пределе $T \rightarrow \infty$ обычная фурье-компонента расходится по закону $|E_T(\omega)| \propto \sqrt{T}$. Уже эта зависимость наводит на мысль, что рассматриваемое поле является в некотором смысле случайным, так как энергия его взаимодействия с осциллятором, пропорциональная фурье-амплитуде $|E_T(\omega)|$, растет как $\sqrt{T}$, что характерно для случайного процесса. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Введем величину

$$K(\tau) = \overline{E(t) E^*(t + \tau)} = \frac{1}{T} \int_{T \rightarrow \infty} E(t) E^*(t + \tau) dt = K^*(-\tau), \quad (80.3)$$

называемую *корреляцией* (или автокорреляцией) поля, которая характеризует регулярность волны. Произведем фурье-разложение полей в (80.3). Для того чтобы избавиться от расходимости при $T \rightarrow \infty$, перенормируем фурье-амплитуду: $|E_T(\omega)|^2 \rightarrow |E(\omega)|^2/T$, т. е. будем записывать фурье-преобразование в виде

$$E(t) = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \int_{\omega} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega; \quad E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_T E(t) e^{i\omega t} dt. \quad (80.4)$$

Определенное таким образом $E(\omega)$ остается теперь конечным при $T \rightarrow \infty$ (80.2). Физический смысл перенормировки фурье-амплитуды состоит в том, что новая $E(\omega)$ теперь непосредственно связана с мощностью поля. Действительно, из (80.2) получим

$$\overline{P} = \frac{1}{T} \int_T |E(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega; \quad p(\omega) = |E(\omega)|^2. \quad (80.5)$$

Величина $p(\omega)$ называется спектральной плотностью мощности или, короче, *спектром мощности*. Подставляя Фурье-разложение (80.4) в (80.3), меняя порядок интегрирования и используя представление

(78.12) для δ -функции, найдем

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |E(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (80.6)$$

откуда сразу следует, что фурье-компонента корреляционной функции $K(\tau)$ и спектр мощности связаны равенством

$$K(\omega) = \sqrt{2\pi} |E(\omega)|^2 = \sqrt{2\pi} p(\omega). \quad (80.7)$$

Обычно спектр мощности $p(\omega)$ имеет конечную ширину $\Delta\omega$. Тогда по соотношению неопределенности функция корреляции $K(\tau)$ имеет конечную длительность

$$\tau_k \sim \frac{\pi}{\Delta\omega}. \quad (80.8)$$

Это значит, что поле сохраняет свою регулярность лишь в течение времени $\sim \tau_k$. Иначе говоря, рассматриваемое поле можно разбить на ряд интервалов длительностью $\sim \tau_k$ таких, что в пределах каждого из них поле имеет более или менее регулярную структуру, тогда как поля в соседних интервалах статистически независимы. В этом и состоит «случайность» рассматриваемого поля. Впрочем, лучше говорить о его нерегулярности, которая не обязательно связана с чисто случайными процессами. Примером может служить модуляция радиоволны звуковым или видеосигналом, который (вообще говоря) не является случайным, хотя обычно и бывает нерегулярным.

Другой принятый термин — стохастическое поле. Говорят также, что поле является *когерентным* на интервале $\sim \tau_k$. Термин «когерентный» является, по существу, синонимом слова «регулярный», но он понимается обычно в смысле возможности интерференции волны (см. § 92). Величину τ_k называют при этом *временем когерентности* (или *временем корреляции*). Точное определение τ_k дает ся ниже (см. (80.10)).

Аналогичным образом можно рассмотреть стохастическое поле в пространстве $E(\mathbf{r})$. В этом случае вводится понятие длины когерентности, или, точнее, размеров области когерентности поля:

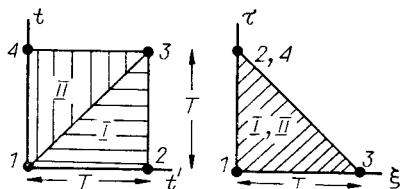
$$l_k^{(1)} \sim \frac{\pi}{\Delta k_x}; \quad l_k^{(2)} \sim \frac{\pi}{\Delta k_y}; \quad l_k^{(3)} \sim \frac{\pi}{\Delta k_z}, \quad (80.9)$$

где Δk_α — ширина спектра $K_\alpha(k_\alpha) = \sqrt{2\pi} |E(k_\alpha)|^2$ по α -й координате.

Простейшим примером стохастического поля служит все тот же солнечный свет (как и вообще любое тепловое излучение). Он состоит из отдельных импульсов, нерегулярно излучаемых различными электронами (см. задачу 2).

Чтобы нагляднее представить свойства стохастического поля, посмотрим, как оно действует, например, на свободный электрон. Пусть стохастическое поле задано своим средним значением $\bar{E}(t) = 0$ и корреляцией $K(\tau)$. На конечном промежутке времени T

Рис. XI.4. Области интегрирования. Цифрами обозначены точки, переходящие друг в друга при преобразовании переменных интегрирования.



можем написать ($e = m = 1$): $v_T = \int_0^T E(t) dt$ ($v(0) = 0$). Усредняя по времени, найдем

$$\bar{v}_T = \int_0^T \overline{E(t)} dt = 0.$$

Это, однако, не означает, что электрон остается в покое. Просто его скорость нерегулярно изменяет знак. Для оценки абсолютной величины скорости (и энергии) электрона найдем значение квадрата скорости:

$$|v_T|^2 = \int_0^T E(t) dt \int_0^T E^*(t') dt' \equiv \int_0^T E^*(t) dt \int_0^T E(t') dt'.$$

Область интегрирования по t и t' разделим на две части (рис. XI.4). При интегрировании по области I произведем замену переменных

$$\text{I } \{t, t'\} \rightarrow \{\tau = t - t', \xi = t'\},$$

а при интегрировании по области II замену

$$\text{II } \{t, t'\} \rightarrow \{\tau = t' - t, \xi = t\}.$$

Области интегрирования в новых переменных совпадают, а интеграл по одной из них равен интегралу по другой от комплексно-сопряженной подынтегральной функции:

$$I_{\text{I}} = \int_{\text{I}} \int E(t) E^*(t') dt dt' = \int_0^T d\tau \int_0^{T-\tau} E(\xi + \tau) E^*(\xi) d\xi;$$

$$I_{\text{II}} = \int_{\text{II}} \int E(t) E^*(t') dt dt' = \int_0^T d\tau \int_0^{T-\tau} E(\xi) E^*(\xi + \tau) d\xi = I_{\text{I}}^*.$$

Тогда при $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |v_T|^2 &= I_{\text{I}} + I_{\text{II}} = I_{\text{I}} + I_{\text{I}}^* = 2\text{Re} \int_0^T d\tau \int_0^{T-\tau} E(\xi + \tau) E^*(\xi) d\xi = \\ &= 2\text{Re} \int_0^T d\tau (T - \tau) K(\tau) = 2T \text{Re} \int_0^T K(\tau) d\tau - 2\text{Re} \int_0^T \tau K(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

При $T \gg \tau_k$ вторым слагаемым в последнем выражении можно пренебречь по сравнению с первым, так как их отношение $\sim \tau_k/T \ll 1$.

Определим теперь время когерентности поля посредством

$$\tau_k = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) d\tau}{|E(t)|^2} = \frac{2\pi |E(\omega=0)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega}. \quad (80.10)$$

Второе равенство следует из (80.5), (80.6). В рассматриваемом примере получаем окончательно

$$\overline{v_T^2} \approx |\overline{E(t)}|^2 T \tau_k = 2\pi T |E(\omega=0)|^2. \quad (80.11)$$

Таким образом энергия электронов растет пропорционально времени (типично случайный процесс), причем это ускорение определяется постоянной составляющей поля. Полученный результат не противоречит тем не менее принятому условию $\bar{E}=0$, в противном случае энергия электрона возрастала бы пропорционально квадрату времени $\overline{v_T^2} = \bar{E}^2 T^2$. Рассмотренное нерегулярное ускорение частицы в стационарном поле с непрерывным спектром называют также *стохастическим ускорением*.

Оценку стохастического ускорения можно получить и из следующих простых соображений. Мы видели выше, что стохастическое поле складывается из независимых между собой «кусков» регулярного поля длительностью $\sim \tau_k$. В каждом таком куске скорость электрона изменяется пропорционально времени: $\Delta v_n \sim E \tau_k$, а различные Δv_n складываются квадратично (аналогично, например, независимым ошибкам). В результате получим формулу (80.11).

Задача 1. Оценить амплитуду колебаний свободного электрона в стохастическом поле.

По порядку величины $\overline{x_T^2} \sim \overline{v_T^2} T^2 \sim \bar{E}^2 T^3 \tau_k$. Чтобы получить точный ответ, запишем $x_T = \int_0^T v(t) dt$, откуда $\bar{x}_T = 0$; $\overline{x_T^2} = 2 \int_0^T d\tau \int_0^{T-\tau} \overline{v(t)v(t+\tau)} dt$. Для вычисления корреляции скорости представим $v(t+\tau) = v(t) + \Delta v$, где Δv — изменение скорости на интервале τ , статистически независимое от $v(t)$ при $\tau \gg \tau_k$ ($\overline{v\Delta v} = 0$). Отсюда

$$\overline{v(t)v(t')} = \overline{v^2(t)} = |\bar{E}|^2 \tau_k, \quad \overline{x_T^2} = \frac{1}{3} |\bar{E}|^2 \tau_k T^3.$$

Вернемся к спектру стохастического поля $|E(\omega)|^2$. Чем отличается он от спектра регулярного импульсного поля? Очевидно, что отличие связано с фазовым спектром $\phi(\omega)$, который оказывается для стохастического поля всюду разрывным. Это вытекает непосредственно из соотношения неопределенности. Действительно, если полная длительность поля $T \rightarrow \infty$, то в спектре должен быть характерный масштаб $\delta\omega \sim 1/T \rightarrow 0$, что и означает, в пределе, разрывы функции $\phi(\omega)$. Последние должны быть всюду плотными, так как, если вырезать любой конечный участок

спектра, он все равно даст стационарную стохастическую волну, а значит, на нем должен быть по крайней мере один разрыв.

Математические операции с такими «экзотическими» функциями требуют известной осторожности (классическая теория фурье-преобразования в этом случае просто неприменима). Эту трудность можно обойти, если учесть, что для любого конечного интервала времени T разрывы отсутствуют. Таким образом, вопрос сводится к существованию пределов при $T \rightarrow \infty$. Оказывается, что например, предел фурье-компоненты $E(\omega)$ действительно отсутствует, так как ее фаза нерегулярно изменяется при $T \rightarrow \infty$. Поэтому стохастическое поле можно описать только с помощью либо спектра мощности, либо корреляционной функции. Спектральная теория стохастических (случайных) функций возникла в 30-е годы главным образом в работах советских математиков Колмогорова и Хинчина и американского математика Винера.

Предельным случаем стохастического поля является так называемый *белый шум*, который соответствует полному отсутствию корреляций в волне, т. е. $\tau_k \rightarrow 0$. Соответственно ширина спектра такого поля неограничена.

Примером рассмотренного непрерывного спектра может служить автоколебательная система с конечной шириной линии. Появление для нее непрерывного спектра объясняется действием различных возмущений. Будет ли спектр в таком случае всегда чисто непрерывным или может сохраниться и дискретная компонента? Разберем этот вопрос на следующем простом примере. Пусть колебания генератора описываются выражением

$$V(t) = V_0 e^{-i(\omega_1 t + \varphi(t))}. \quad (80.12)$$

Здесь ω_1 — номинальная частота генератора, а $\varphi(t)$ — случайные возмущения фазы, уширяющие линию до величины $\Delta\omega \sim \Omega$, где Ω — ширина спектра $\varphi(t)$ (см. § 79). Очевидно, что если в спектре (80.12) и присутствует дискретная линия, то ее частота будет равна ω_1 . Фурье-амплитуду этой линии определим посредством

$$V_1 = \frac{1}{T} \int_{T \rightarrow \infty} V(t) e^{i\omega_1 t} dt. \quad (80.13)$$

(Эта калибровка отличается от принятой нами в § 77, так как в данном случае процесс непериодичек и $T \rightarrow \infty$.) Пусть флуктуирующая фаза остается все время малой: $|\varphi| \ll 1$, $\overline{\varphi} = 0$. Тогда, разлагая экспоненту в (80.12) и подставляя в (80.13), получим $V_1 \approx V_0(1 - \overline{\varphi^2}) \approx V_0$. Этот результат означает, что бесконечно тонкая линия действительно сохраняется, несмотря на возмущение фазы, но амплитуда ее несколько уменьшается. Такой спектр называется *смешанным*. В реальных условиях ширина линии будет все-таки конечной, но не за счет возмущения фазы, а вследствие всегда конечного времени генерации $T: \Delta\omega \sim \pi/T$. Баланс энергии в этом случае можно записать в виде суммы по дискретной и

непрерывной частям спектра, которые не интерферируют между собой:

$$\overline{|V|^2} = \int_{-\infty}^{\infty} |V(\omega)|^2 d\omega + \sum_k |V_k|^2. \quad (80.14)$$

С помощью этого соотношения можно найти долю энергии в непрерывном спектре для рассмотренного выше примера: $\alpha = (V_0^2 - |V_1|^2)/V_0^2 \approx 2\varphi^2 \ll 1$.

Пусть теперь фаза флуктуирует произвольно. Введем функцию распределения по фазе, определив ее как долю времени, в течение которого фаза находится в заданном интервале: $f(\varphi) d\varphi = dt(\varphi)/T$. Возьмем в качестве примера гауссово распределение: $f(\varphi) = e^{-\varphi^2/2\varphi_0^2} / (\sqrt{2\pi} \varphi_0)$. Получим

$$V_1 = \frac{V_0}{T} \int_{T \rightarrow \infty} e^{-i\varphi(t)} dt = V_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi} f(\varphi) d\varphi = V_0 e^{-\varphi_0^2/2}, \quad (80.15)$$

а доля энергии в линии $\alpha_1 = |V_1|^2/V_0^2 = e^{-\varphi_0^2}$. Отметим, что рассмотренное сохранение линии при случайном возмущении фазы составляет существо знаменитого эффекта Мессбауэра.

В случае смешанного спектра корреляции поля не затухают полностью, так как дискретная линия дает периодические корреляции. Например, для (80.12) получаем

$$\overline{V(t) V(t')} \rightarrow V_1^2 e^{i\omega_1 \tau}. \quad (80.16)$$

Существование остаточных корреляций для смешанного спектра непосредственно вытекает из соотношения неопределенности (80.8), поскольку ширина линии $\Delta\omega = 0$. Такое поле не является полностью стохастическим.

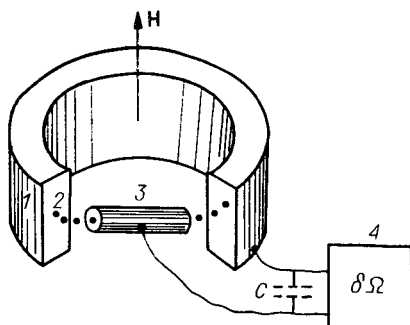
Задача 2. Сигнал представляет собой последовательность одинаковых импульсов со случайными интервалами между ними. При каких условиях такой сигнал будет стохастическим (с непрерывным спектром)?

Представим себе распределение импульсов во времени как сдвиг каждого из них на некоторое τ_m относительно периодической последовательности. Иначе говоря, момент начала импульса запишем в виде $t_m = mT + \tau_m$, где T — средний интервал между импульсами. Если бы $\tau_m = 0$, мы получили бы дискретный спектр, общий вид которого определяется формой отдельного импульса, а расстояние между линиями равно $2\pi/T$ (см. задачу 2, § 79). Смещение импульса на τ_m вызывает появление в его спектре фазового множителя $e^{i\omega\tau_m}$ =

так что спектр сигнала будет модулироваться суммой $S = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N e^{i\omega\tau_m}$ = $\langle e^{i\omega\tau_m} \rangle$. Это в точности соответствует задаче о возмущении фазы, рассмотренной выше. В частности, если распределение по τ_m гауссово: $f(\tau) = e^{-\tau^2/2\tau_0^2} / \sqrt{2\pi} \tau_0$, то $S = e^{-(\omega\tau_0)^2/2}$. Условие стохастичности сигнала $\omega\tau_0 \gg 1$

Рис. XI.5. Схема измерения функции распределения по частотам обращения пучка заряженных частиц.

1 — вакуумная камера; 2 — пучок; 3 — измерительный электрод; 4 — анализатор.



должно выполняться для минимальной частоты. Если импульс достаточно гладкий, то $\omega_{\min} = 2\pi/T$ и условие стохастичности принимает вид $2\pi\tau_0 \gg T$, т. е. импульсы должны быть полностью перемешаны. Если же мы имеем дело с модулированными высокочастотными импульсами (основная гармоника $\omega_0 \gg 2\pi/T$), то для стохастичности достаточно лишь небольшого временного разброса импульсов ($\tau_0 \gg 1/\omega_0$).

Задача 3. Внутри проводящей камеры (рис. XI.5) вращается пучок релятивистских заряженных частиц, удерживаемый магнитным полем. Частицы имеют разброс по энергии и соответственно частоте обращения (см. (56.7)). При пролете через измерительный электрод 3 каждая частица наводит на нем некоторое напряжение относительно стенок камеры ($V_0 = e/C$, где C — емкость между электродом и камерой). Анализатор выделяет среднеквадратичное значение суммарного сигнала на частоте Ω в полосе частот $\delta\Omega$. Найти V_Ω^2 , если функция распределения частиц по частотам обращения $f(\omega)$ имеет ширину $\Delta\omega$, много меньшую средней частоты ω_0 , и полоса $\delta\Omega \ll \Delta\omega$.

Сигнал от m -й частицы представляет собой периодическую последовательность прямоугольных импульсов с амплитудой V_0 и длительностью τ , период $T_m = 2\pi/\omega_m$, поэтому его можно представить в виде ряда Фурье:

$$V_m(t) = \frac{1}{\sqrt{T_m}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{mn} e^{-i(n\omega_m t + \varphi_m)}; \quad A_{mn} = \frac{V_0}{\sqrt{T_m}} \cdot \frac{e^{in\omega_m \tau} - 1}{in\omega_m} e^{in\omega_m \tau}.$$

На частоте Ω будет зарегистрирован сигнал, суммарный по всем частицам, имеющим частоту обращения $\omega_m = (\Omega \pm \delta\Omega)/n$. С учетом малости $\delta\Omega$ и $\Delta\omega$ найдем

$$V_\Omega^2 \approx \left| \sum_{m=1}^{N_\omega} \frac{A_{mn}}{\sqrt{T_m}} e^{-i(\Omega t + \varphi_m)} \right|^2; \quad N_\omega = N_0 f(\omega_m) \delta\Omega,$$

N_0 — полное число частиц в пучке. Подставляя сюда значение A_{mn} , суммируя и усредняя по времени, получим

$$V_\Omega^2 = \frac{V_0^2}{T_m^2} \left(\frac{2 \sin \frac{n\omega_m \tau}{2}}{n\omega_m} \right)^2 N_0 f(\omega_m) \delta\Omega.$$

В приближении $\tau \ll T_m/n$ это соотношение позволяет просто восстановить функцию распределения $f(\omega)$ по известной зависимости $V_\Omega^2(\Omega)$:

$$f(\omega) \approx \frac{V_\Omega^2}{V_0^2} \left(\frac{T_m}{\tau} \right)^2 \frac{1}{N_0 \delta\Omega}, \quad \Omega = n\omega.$$

Этот метод применяется в экспериментах с пучками заряженных частиц.

Задача 4. Найти спектр мощности напряжения на проводнике с током, если время свободного пробега t_m электрона в проводнике подчиняется закону распределения Пуассона $W(t_m) = \nu e^{-\nu t_m}$ ($\nu = (\overline{t_m})^{-1}$ — средняя частота столкновений электронов с неоднородностями структуры проводника, § 21).

Искомый спектр мощности найдем, вычислив вначале функции корреляции для напряжения $K_U(\tau)$ и тока $K_I(\tau)$: $K_U(\tau) = R^2 K_I(\tau)$, где R — сопротивление проводника

$$K_I(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} I(t) \cdot I^*(t + \tau) dt; \quad I(t) = \sum_{n=1}^N i_n(t) = \frac{1}{l} \sum_{n=1}^N e v_n(t),$$

N — полное число электронов проводимости, l — длина проводника, $v_n(t)$ — мгновенное значение скорости n -го электрона. Тогда

$$K_I(\tau) = \frac{e^2}{T l^2} \sum_{k,n=1}^N \int_{-T/2}^{T/2} v_k(t) v_n^*(t + \tau) dt = N \frac{e^2}{l^2} K_v(\tau),$$

где $K_v(\tau)$ — функция корреляции скорости n -го электрона. Здесь учтено, что в сумме по k, n останутся только члены с $k = n$, а функция $K_v(\tau)$ имеет одинаковый вид для любых электронов. Вычисляя ее, найдем

$$K_v(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v_n(t) v_n^*(t + \tau) dt = \begin{cases} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{N_\tau} v_{nk} v_{nk}^*(t_k - |\tau|), & t_k > |\tau|, \\ 0, & t_k < |\tau|, \end{cases}$$

где v_{nk} — скорость n -го электрона на k -м отрезке свободного пробега (интервал t_k), N_τ — полное число свободных пробегов электрона длительностью $t_k > \tau$ за время T . Поскольку $N_\tau \gg 1$, производные $v_{nk} v_{nk}^*$ можно заменить средним значением квадрата скорости электрона $\overline{v^2}$ и учесть, что

$$\sum_{k=1}^{N_\tau} t_k = N_{\text{полн}} \overline{(t_k)_\tau}, \quad \text{где } \overline{(t_k)_\tau} = \int_{|\tau|}^{\infty} W(t_k) t_k dt_k = \left(|\tau| + \frac{1}{\nu} \right) e^{-\nu \tau}$$

— среднее значение по всем t_k , большим τ , $N_{\text{полн}}$ — среднее число соударений электрона за время T . Кроме того,

$$N_\tau = N_{\text{полн}} \int_{|\tau|}^{\infty} W(t_k) dt_k = N_{\text{полн}} e^{-\nu |\tau|} \quad \text{и} \quad N_{\text{полн}} = \frac{T}{\overline{t_k}} = \nu T.$$

В результате получим

$$K_v(\tau) = \overline{v^2} e^{-\nu |\tau|}; \quad K_I(\tau) = \frac{\overline{v^2} e^2}{l^2} N e^{-\nu \tau}.$$

Учитывая, что $N = n_e l S$, n_e — плотность электронов проводимости, S — сечение проводника, $R = l / \sigma S$, $\overline{v^2} = T^0 / m$, T^0 — температура проводника, и используя выражение для проводимости σ (21.4), преобразуем выражение для $K_U(\tau)$ к виду

$$K_U(\tau) = R T^0 \nu e^{-\nu |\tau|}.$$

Соответствующий спектр мощности получим, подставив это выражение в (80.7):

$$p_U(\omega) = \frac{RT^0}{\pi} \cdot \frac{\nu^2}{\nu^2 + \omega^2}.$$

Для области частот $\omega \ll \nu$ эта формула переходит в известную формулу Найквиста (1928 г.) $p_U(\omega) = RT^0/\pi$ (или, для линейной частоты $f = |\omega|/2\pi$: $p_U(f) = 4RT^0$).

Физический смысл полученного результата достаточно ясен: $p_U(\omega)\Delta\omega = RT^0\Delta\omega/\pi = \bar{U}^2$ — средний квадрат шумового напряжения, снимаемого с сопротивления (имеющего температуру T^0) через фильтр с полосой пропускания $\Delta\omega$.

§ 81. ЭКСКУРС В ТЕОРИЮ ИНФОРМАЦИИ. КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ

Спектральный анализ позволяет сравнительно просто ввести основные представления современной теории информации. Последняя иногда считается чисто математической теорией. Однако она тесно связана с физикой электромагнитных волн, хотя бы потому, что основным приложением последней является радиосвязь в широком смысле этого слова, т. е. передача информации посредством электромагнитных сигналов. Для осуществления оптимальной радиосвязи необходима количественная теория информации. Примером радиосвязи, использующей предельные технические возможности, является дальняя космическая связь, скажем, с автоматическими станциями на Марсе или Венере, космическими кораблями вблизи Юпитера и т. д. Выбор оптимальных условий всех звеньев такой связи имеет решающее значение. Другим поучительным примером умелого использования технических возможностей (хотя еще далеко не полного) является современная система цветного телевидения.

По-видимому, первые попытки количественной оценки информации применительно к телеграфной связи по кабелю предприняты еще на рубеже нашего столетия английским физиком Томсоном (лордом Кельвином). Трудности в создании теории информации были отчасти психологического характера. Мы слишком привыкли связывать понятие информации с деятельностью живых или даже только разумных существ, которая, казалось бы, не поддается «грубому» анализу физики и математики, а является процессом более высокого порядка. Первая брешь в этой глухой стене мистического представления о жизни была пробита кибернетикой — новой наукой, связанной с именами, главным образом, Винера и фон Неймана. Кибернетика позволила не только понять на базе точных наук сущность жизни вообще и разумной жизни в частности, но и указала пути создания искусственной жизни и разума. Вопрос о том, является ли кибернетическая модель жизни исчерпывающей, остается, конечно, открытым, однако можно утверждать, что в настоящий момент нет никаких данных, противоречащих такой модели. Вполне естественно, что одновременно бурно

развивалась и теория информации, являющаяся составной частью кибернетики. Возникновение теории информации связано главным образом, с именем американского математика Шеннона (1949 г.).

Как же можно измерять информацию? В частности, как измерить информацию, содержащуюся в сигнале? Частично эта задача была решена еще в 1933 г. советским физиком Котельниковым. Мерой информации сигнала $V(t)$ у него служило число независимых величин, полностью определяющих функцию $V(t)$. Основная идея теории Котельникова состоит в следующем. Пусть мы имеем сигнал $V(t)$ конечной длительности T и в ограниченной полосе частот $\Delta\omega$. При этих, неизбежных в любой системе связи, ограничениях сигнал $V(t)$ можно представить рядом Фурье с конечным числом слагаемых, так как $V(t)$ можно считать периодической с периодом T . Такой ряд полностью определяется заданием

$$N_c = 2 \frac{\Delta\omega \cdot T}{2\pi} \quad (81.1)$$

чисел (амплитуды и фазы $N_c/2$ фурье-гармоник, $\Delta\omega T \gg 1$). Величина N_c называется числом степеней свободы сигнала. Соотношение (81.1) можно переписать в виде $\Delta\omega \cdot T_1 \approx \pi$, где $T_1 = T/N_c$ — длительность сигнала, соответствующая одной степени свободы. В таком виде оно совпадает с соотношением неопределенности (79.2), откуда следует, что T_1 есть характерное время изменения сигнала. Если сигнал является стационарным с непрерывным спектром, то T_1 порядка времени корреляции сигнала (80.8), (80.10).

Котельников получил также явное выражение, позволяющее точно восстановить сигнал $V(t)$ по его значениям в N_c точках (см. задачу).

Задача. Восстановить сигнал $V(t)$ с ограниченным спектром по его значениям в отдельных точках (теорема Котельникова, 1933 г.).

Пусть спектр сигнала ограничен интервалом $(-\omega_0, \omega_0)$. Тогда фурье-амплитуду сигнала $V(\omega)$ можно считать периодической функцией и снова разложить в ряд Фурье:

$$V(\omega) = \sum_n \frac{V_n}{\sqrt{2\omega_0}} e^{in\pi\omega/\omega_0}, \quad V_n = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \int V(\omega) e^{-in\pi\omega/\omega_0} d\omega,$$

откуда

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} V(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega_0}} \sum_n V_n \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega\left(\frac{n\pi}{\omega_0} - t\right)} d\omega = \\ &= \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi}} \sum_n V_n \frac{\sin(\omega_0 t - n\pi)}{\omega_0 t - n\pi}. \end{aligned}$$

Коэффициенты этого ряда V_n выражаются через значения функции $V(t)$ в моменты $t = t_n = n\pi/\omega_0$: $V_n = \sqrt{\pi/\omega_0} V(t_n)$. Окончательно

$$V(t) = \sum_n V(t_n) \frac{\sin \omega_0 (t - t_n)}{\omega_0 (t - t_n)}; \quad t_n = \frac{n\pi}{\omega_0}. \quad (81.2)$$

Это и есть формула Котельникова. Если длительность сигнала ограничена интервалом T , для его точного восстановления требуется $T\omega_0/\pi$ значений сигнала, что совпадает с (81.1) ($\Delta\omega = \omega_0$).

Такое определение является неполным. Остается нерешенным вопрос, сколько информации содержится в каждом из параметров сигнала (81.1)? Ответ, вообще говоря, различен и зависит, в частности, от точности измерений, уровня помех и пр. Собственно количественное определение и составляет основу современной теории информации.

Начнем с дискретных сигналов. Как мы увидим ниже, теорема Котельникова позволяет обобщить результаты, полученные для этого случая, на широкий класс непрерывных сигналов. Под информацией понимается выбор из некоторого числа априорных возможностей. Элементарным информационным актом считается выбор из двух равновероятных возможностей. Такая единица информации называется бит ($bit = Binary\ digit$ — двоичный разряд). Примерами элементарной информации могут служить: один двоичный разряд числа (0 или 1), ответ да или нет, точка или тире в азбуке Морзе, положение триггера с двумя устойчивыми состояниями, состояние нейрона нервной сети (возбужден — не возбужден) и т. п.

Теперь посмотрим, к чему приведет усложнение передаваемого сообщения. Пусть сообщение содержит одно n -разрядное слово, например 100101, $n=6$. В таком языке, содержащем n -разрядные слова, можно образовать $N=2^n$ различных слов. Какое же количество информации несет данное слово? Очевидно, что если один разряд содержит 1 бит информации, то n -разрядное слово содержит n бит. Получив сообщение, состоящее из одного слова, мы узнали, что среди N возможных вариантов реализуется данный, конкретный, а это и означает, что мы получили информацию n бит. Она связана с полным числом возможностей N очевидным соотношением:

$$I_N = n = \log_2 N. \quad (81.3)$$

Эта формула (Хартли, 1822 г.) дает информацию, содержащуюся в одном слове языка, состоящего из N слов, записанных в двоичном коде. Информация, содержащаяся в одном десятичном разряде, $I_{10} = \log_2 10 \approx 3,3$ бит.

Если в каждом разряде слова возможно не два, а m различных состояний, то, очевидно, $N=m^n$, и каждый разряд, в соответствии с (81.3), несет информацию $I_1 = \log_2 m$, а n -разрядное слово —

$$I_N = n \log_2 m = \log_2 N. \quad (81.4)$$

Нетрудно заметить связь определенной таким образом информации со статистической энтропией, которая также пропорциональна логарифму числа возможных состояний системы. Это позволяет дать общее определение количества информации как уменьшения энтропии системы в результате полученной информации (см. § 83).

Используя выражение Больцмана для энтропии, можем написать

$$I = -\Delta S = \Delta \int f(x) \ln f(x) dx = \Delta \langle \ln f(x) \rangle, \quad (81.5)$$

где $f(x)$ — функция распределения системы. Энтропия измеряется здесь в безразмерных единицах (постоянная Больцмана $k=1$), а информация измеряется в нитах ($1 \text{ нит} = 1/\ln 2 \text{ бит} \approx 1,44 \text{ бит}$). Такое определение информации было впервые предложено фон Нейманом.

§ 82. ЭКСКУРС В ТЕОРИЮ ИНФОРМАЦИИ. ПОТОК ИНФОРМАЦИИ

Вернемся к определению информации сигнала. Если бы его величина была задана абсолютно точно, это привело бы к бесконечной информации (81.5). Реальная ситуация, на которую как раз и рассчитана теория информации, предполагает конечную точность, связанную с ошибками регистрации или помехами. Пусть мы по-прежнему работаем с дискретными сигналами в двоичном коде («телеграф»), а длительность импульса, соответствующего одному знаку (0 и 1), есть τ . Тогда за время T можно передать $k=T/\tau$ импульсов. Поскольку один импульс несет 1 бит информации, то за время T можно передать информацию

$$\Delta I = k = \frac{T}{\tau} \approx \frac{T\Delta\omega}{\pi}. \quad (82.1)$$

Здесь $\Delta\omega$ — полоса частот, пропускаемых линией связи. Таким образом, поток информации в битах есть $\Delta I/\Delta t = \Delta\omega/\pi$. Для более сложного языка, в котором каждый разряд имеет m возможных состояний (например, амплитуда передаваемых импульсов может принимать m возможных значений), очевидно, что $I = \Delta\omega \log_2 m/\pi$. Казалось бы, можно повышать поток информации, увеличивая m , т. е. уменьшая разность соседних значений амплитуд импульсов ΔV . Однако в системе связи всегда присутствуют помехи — шумы, амплитуда которых и определяет минимально допустимое значение $\Delta V \geq V_{\text{ш}}$.

Выше мы уже говорили, что шумовые (стохастические) сигналы характеризуются мощностью. Соответственно, $V_{\text{ш}}$ — средне-квадратичная амплитуда. Максимально допустимое значение m определяется максимальной амплитудой (мощностью) передаваемого сигнала и уровнем помех (шума):

$$m_{\text{max}} = \frac{\sqrt{V_{\text{ш}}^2 + V_{\text{max}}^2}}{V_{\text{ш}}} = \sqrt{\frac{P_{\text{ш}} + P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}}}, \quad (82.2)$$

где $P_{\text{с}}$, $P_{\text{ш}}$ — мощность максимального уровня сигнала и шума. Соответственно поток информации (бит/с) описывается формулой

$$\frac{dI}{dt} \leq \frac{\Delta\omega}{\pi} \log_2 m_{\text{max}} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \log_2 \left(1 + \frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}} \right), \quad (82.3)$$

полученной Шенноном в 1949 г. и носящей его имя. Она является, по существу, основой теории информации.

Теперь обсудим вопрос о потоке информации в непрерывных сигналах. Согласно теореме Котельникова сигнал, передаваемый в полосе частот $\Delta\omega = \omega_0$, может быть однозначно восстановлен с помощью дискретных измерений уровня сигнала в моменты $t_n = n\pi/\omega_0 = n\pi/\Delta\omega$ (см. (81.2)). Если сигнал ограничен во времени ($t \leq T$), то, очевидно, $n \leq N = T\Delta\omega/\pi$. Таким образом, непрерывный сигнал длительностью T , передаваемый в полосе частот $\Delta\omega$, эквивалентен набору N импульсов с амплитудами $V(t_n)$. Содержащаяся в них информация (в битах) есть

$$I_T = N \log_2 \sqrt{\frac{P_c + P_{\text{ш}}}{P_{\text{ш}}}} = \frac{T\Delta\omega}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \right), \quad (82.4)$$

что для потока информации I_T/T дает ту же формулу Шеннона (82.3).

К формуле Шеннона можно прийти и несколько иначе, основываясь на выражении (81.5) для информации. Пусть $V_{\text{ш}}(t)$ — суммарная помеха (шум). Тогда информация одного значения сигнала имеет порядок $I_1 \approx \ln(V/V_{\text{ш}})$, $V \gg V_{\text{ш}}$. Уточним это выражение для случая, когда и шум, и суммарный сигнал ($U = V + V_{\text{ш}}$) распределены по гауссовому закону:

$$f(U) = \frac{e^{-U^2/2P_U}}{\sqrt{2\pi P_U}}; \quad \varphi(V_{\text{ш}}) = \frac{e^{-V_{\text{ш}}^2/2P_{\text{ш}}}}{\sqrt{2\pi P_{\text{ш}}}}, \quad (82.5)$$

где $P_U = \overline{U^2} = P_c + P_{\text{ш}}$, так как сигнал и шум считаются статистически независимыми. Поскольку $f(U)$ описывает начальное состояние системы (сигнал не фиксирован), а $\varphi(V_{\text{ш}})$ — конечное (сигнал фиксирован), информация на одно значение сигнала

$$I_1 = \langle \ln f \rangle - \langle \ln \varphi \rangle = \frac{1}{2} \ln \frac{P_U}{P_{\text{ш}}} = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \right), \quad (82.6)$$

Передача сигнала соответствует согласно (81.1) передаче $\Delta\omega/\pi$ чисел в единицу времени, причем каждое из них несет информацию (82.6). Поэтому общий поток информации (бит/с) в сигнале

$$\dot{I} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \right), \quad (82.7)$$

что совпадает с (82.3).

Частный случай формулы Шеннона получен также Винером (1948 г.). Любопытно, что общее доказательство Шеннона содержало две грубых, но взаимоисключающих ошибки, так что в конце концов результат оказался правильным. Последнее не удивительно, поскольку Шеннон наверняка знал ответ заранее из рассмотрения частных случаев. Заметим, что поток информации (82.3), (82.7) не

зависит от закона распределения сигнала и шума (82.5) и определяется только их средней мощностью.

Из основного закона (82.3) вытекает ряд интересных следствий. Прежде всего видно, что передача информации возможна даже тогда, когда мощность шума намного превышает мощность сигнала, при этом уменьшается лишь скорость передачи информации $I = \Delta\omega P_c / 2\pi P_{\text{ш}}$. Как же практически выделить эту информацию? Один из приемов состоит в повторной передаче сообщения и суммировании принимаемых сигналов. В этом случае полезный сигнал растет пропорционально числу повторений k , тогда как шум — лишь пропорционально $\sqrt{k}$ (см. § 80). В результате после $k \geq P_{\text{ш}}/P_c$ повторений мощность сигнала в приемнике превышает мощность шума, так что сигнал можно зарегистрировать. Такая процедура приводит к уменьшению скорости передачи в $\sim P_{\text{ш}}/P_c$ раз в соответствии с (82.3). Приведем простой пример метода исправления ошибок при передаче информации за счет снижения скорости передачи. Пусть нам нужно передать некоторый текст с помощью азбуки Морзе или, что то же самое, последовательность нулей и единиц, например: 1100010111. Пусть также при обычной передаче вследствие помех принимается искаженный текст 1101010011 со средней вероятностью ошибки на один переданный знак $p_1 \approx 2/10 = 0.2$. Один из методов исправления ошибок состоит в том, что каждый знак текста передается многократно, например, три раза. В результате принятая последовательность может иметь вид (с той же средней вероятностью ошибки p_1):

111	011	010	000	000	010	000	111	111	110
1	1	0	0	0	0	0	1	1	1

В нижней строчке приведена расшифровка текста по «методу большинства». В результате число ошибок уменьшилось вдвое за счет уменьшения скорости передачи втрое. Вероятность ошибки на один знак текста (на три переданных знака) в этом методе можно подсчитать следующим образом. Ошибка возникает, если два любых из трех знаков группы переданы неправильно. Вероятность этого равна $C_3^2 p_1^2 (1 - p_1)$, где $C_3^2 = 3$ — число сочетаний из трех по два, а $(1 - p_1)$ — вероятность правильной передачи третьего знака. Кроме того, нужно еще учесть, что все три знака могут быть переданы неправильно с вероятностью p_1^3 . В результате вероятность ошибки равна $p_3 = 3p_1^2(1 - p_1) + p_1^3 = p_1^2(3 - 2p_1) \approx 0.1$.

Далее, закон (82.3) показывает, что значительное увеличение отношения сигнал шум ($P_c/P_{\text{ш}}$), к чему так часто стремятся, почти не повышает скорости передачи информации. Более того, с энергетической точки зрения оптимальным режимом передачи информации является как раз условие $P_c \leq P_{\text{ш}}$. Действительно, энергия, затрачиваемая на передачу единицы информации

$$W_0 = \frac{P_c}{I} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \cdot \frac{P_c}{\ln\left(1 + \frac{P_c}{P_{\text{ш}}}\right)} \quad (82.8)$$

стремится при $P_e \lesssim P_{\text{ш}}$ к минимуму:

$$W_{\min} = \frac{2\pi P_{\text{ш}}}{\Delta\omega}. \quad (82.9)$$

Конечно, при этом усложняется детектирование (регистрация) сигнала, так что практический оптимум зависит от конкретной ситуации. Скажем, при сверхдальней космической связи решающими являются энергетические требования; например, мощность передатчика на американском искусственном спутнике Марса составляла всего около 100 Вт.

Интересно отметить, что минимальная энергетическая «цена» информации (82.9) обычно не зависит и от полосы $\Delta\omega$, так как мощность шумов пропорциональна последней (см. (80.5)). Например, для тепловых шумов, т. е. для теплового электромагнитного излучения в одном направлении и с одной поляризацией,

$$P_{\text{ш}} = \frac{T\Delta\omega}{2\pi}, \quad (82.10)$$

где T — температура излучения. Это выражение, полученное Найквистом (1928 г.), непосредственно следует из закона равнораспределения в классической термодинамике и формулы (81.1) для числа степеней свободы поля. В рассматриваемом случае цена единицы информации равна просто температуре (ср. § 80, задача 4). В общем случае можно говорить об эффективной «температуре» шума.

Отметим, что основной закон (82.3) о потоке информации относится не только к передаче информации, но и к ее обработке (в частности, к получению информации). Это видно хотя бы из того, что все процессы обработки информации включают ее передачу.

Формула Шеннона (82.3) определяет максимально возможную скорость передачи информации. Практически эта скорость может быть значительно меньше, особенно если используется простое кодирование. Даже при полном отсутствии шумов ($P_{\text{ш}} \rightarrow 0$), когда теоретически скорость передачи информации $\dot{I} \rightarrow \infty$, на самом деле она остается ограниченной. Так, при передаче информации по азбуке Морзе, т. е. в виде коротких и длинных импульсов фиксированной амплитуды, скорость передачи в битах за секунду определяется просто числом независимых импульсов в единицу времени, которое в свою очередь равно числу степеней свободы сигнала в единицу времени, или (81.1): $\dot{I} = \Delta\omega/\pi$.

Приведем некоторые типичные примеры информационных систем. Начнем с оптических схем. Одним из наиболее совершенных устройств является, как мы уже знаем (см. § 61), человеческий глаз. Он разрешает $\sim 10^5$ элементов изображения и около 600 степеней яркости. Это соответствует информации $I_1 \approx 10^5 \cdot \log_2 600 \approx \approx 1$ Мбит на одно изображение. Учитывая, что оба глаза воспринимают несколько разные изображения и притом около 10 раз в секунду, получим максимальный поток зрительной информации ~ 20 Мбит/с. В действительности этот поток существенно меньше, так как последовательные изображения обычно незначительно отли-

чаются друг от друга. Средний поток зрительной информации оценивается величиной ~ 4 Мбит/с и составляет около 70% общего количества информации, получаемого человеком.

Информационная емкость одного кинокадра (3×4 см², разрешение ~ 30 линий на миллиметр и около 100 степеней яркости) ~ 10 Мбит, что соответствует максимальному потоку информации в кино ~ 250 Мбит/с. Это еще сравнимо с работой глаза, однако поток информации в самых совершенных современных приборах (например, ЭОП, § 63) неизмеримо больше (до $\sim 10^{15}$ бит/с). Поток здесь столь велик, что такие приборы могут быть использованы лишь в коротких импульсах, так как возникает очень сложная проблема запоминания всей этой информации. С другой стороны, например, поток радиоинформации со спутника Марса Маринер-9 составлял всего 16 кбит/с, что соответствует передаче одной фотографии примерно за 10 мин.

Сравним теперь самое удивительное создание природы — человеческий мозг — с современной вычислительной машиной (ЭВМ), которая пытается его моделировать. Мозг человека содержит $\sim 10^{10}$ нейронов, значительная часть которых, вероятно, связана с памятью. Это, однако, существенно меньше, чем полная информация, получаемая человеком за всю его жизнь ($\sim 10^{18}$ бит). Дж. фон Нейман считал, что вся эта информация как-то запоминается и поэтому механизм памяти человека не может быть связан с работой нейрона как двоичной ячейки. Но такая оценка, по-видимому, очень завышена, так как человек может усвоить лишь незначительную часть зрительной информации. Говорят, что Айвазовский мог запомнить с одного взгляда до 700 деталей. Это соответствует, вероятно, нескольким килобитам информации, что составляет ничтожную долю полной зрительной картины (~ 1 Мбит). Но даже такие случаи являются исключительными. В обычных условиях непрерывного потока информации мы едва ли усваиваем 100 бит/с, а запоминаем надолго и того меньше, скажем, ~ 10 бит/с. Таким образом, полный объем памяти человека, например, за 40 лет составит $\sim 10 \cdot 40 \cdot 3 \cdot 10^7 \sim 10^{10}$ бит, что согласуется с числом нейронов. Вероятно, даже эта оценка сильно завышена.

Оперативная, или «быстрая», память лучших образцов современных ЭВМ достигает $\sim 10^9$ бит. «Медленная» память, например, на магнитных лентах или дисках, может быть значительно больше, однако скорость поиска нужной информации в такой памяти остается пока весьма низкой. Очень заманчивым является использование фотографической памяти (~ 10 Мбит на кадр, см. выше). Еще более интересные перспективы сулят эмульсионные камеры — сплошные массивы фотоэмульсии объемом до нескольких литров, способные «запомнить» до $\sim 10^{13}$ бит информации. Такие камеры применяются для регистрации следов заряженных частиц. Однако выборка информации из них находится пока на примитивном уровне.

Скорость обработки информации в ЭВМ достигает $\sim 10^{10}$ бит/с. Это кажется очень большой величиной, и принято подчеркивать неизмеримое превосходство в скорости работы ЭВМ по сравнению с

человеком. Это однако правильно только для простейших логических операций, проходящих через сознание, в которых мозг используется крайне неэффективно. Подсознательная деятельность мозга, в которой участвует, по-видимому, значительная доля нейронов, характеризуется скоростью обработки информации масштаба 10^{11} бит/с (каждый нейрон возбуждается около 10 раз в секунду). Причина такой эффективности мозга, несмотря на значительно более медленную работу отдельного нейрона (примерно в 10^7 раз по сравнению с ЭВМ), заключается, очевидно, в параллельной работе огромного числа различных участков мозга.

Интересно отметить, что мозг тратит на свою работу всего около 10 Вт мощности (приблизительно 10% полного тепловыделения организма при сидячей работе). Однако даже эта мизерная энергия оказывается в $\sim 10^{11}$ раз больше минимальной (82,9), определяемой тепловыми шумами. Эта разни́ца слишком велика, чтобы ее можно было объяснить требованием надежности работы или чем-то подобным. Возможно, это связано с высоким уровнем нетепловых шумов в организме. А может быть дело совсем в другом — ведь нейрон — это клетка, т. е. довольно высокоорганизованная структурная единица живой материи, обладающая значительной автономией, для чего необходим некоторый минимальный размер системы, отсюда и «огромное» по атомным масштабам потребление энергии. В этом смысле использование нейрона для запоминания одного бита информации кажется невероятно расточительным, что неоднократно подчеркивал фон Нейман. Он сравнивал это с искусственной памятью на электронных лампах в первых ЭВМ.

С энергетической точки зрения наиболее совершенной системой памяти является ДНК (дезоксирибонуклеиновая кислота), молекулы которой хранят генетическую информацию у всех без исключения живых организмов на Земле. Полимерная молекула ДНК представляет собой двойную спираль с шагом $34 \text{ \AA}$ и диаметром $20 \text{ \AA}$, соединенную через $3,4 \text{ \AA}$ парами специальных химических веществ — оснований, последовательность которых и определяет генетическую информацию. Так как всего имеется четыре различных основания, то каждая пара содержит два бита информации. Это соответствует объемной плотности информации $\sim 10^{21}$ бит/см³ (для мозга эта величина составляет всего лишь $\sim 10^7$ бит/см³). Полное количество информации в молекуле ДНК человека $\sim 10^8$ бит. Интересно, что только около 10% этого количества является собственно генетической информацией, т. е. описанием «устройства» человека, точнее, рецепта «изготовления» (химического синтеза) человека. Любопытно отметить, что записанный на обычном языке этот «рецепт» занял бы около 10 тыс. страниц среднего формата. Остальное составляет «административно-управленческий аппарат», организующий передачу информации и распределение ее между различными клетками. Сравнение относительно скромного объема генетической информации ($\sim 10^8$ бит) с объемом памяти человека ($\sim 10^{10}$ бит) приводит к любопытному выводу о том, что жизненный опыт чело-

века значительно богаче его наследственности. Интересно отметить, что у простейшего живого существа — вируса, объем генетической информации всего в несколько сот раз меньше.

Передача одного бита информации ДНК требует около 0,2 эВ, что приблизительно в 10 раз больше нормальной температуры ($T = 300\text{ К}$), т. е. минимальной затраты энергии при тепловых шумах (см. выше). Таким образом, в энергетическом отношении информационная система ДНК близка к идеалу, остающийся множитель ~ 10 почти наверняка служит для обеспечения надежности работы системы (защита от тепловых флуктуаций).

Если сравнить живой организм с современной кибернетической машиной, то функционирование ДНК во многом напоминает запись информации на магнитную ленту. В обоих случаях — это очень емкая память, однако поиск, считывание и передача информации являются весьма медленным процессом с громоздкой организацией. В случае ДНК к этому добавляется еще и значительная неопределенность при передаче информации, которая связана со свободными химическими реакциями в окружающей среде. Словом, такая система не годится для оперативной обработки информации. В последнем случае необходимы строго фиксированные каналы информации, для которых природа не смогла придумать ничего проще, чем клетка — нейрон со всеми вытекающими отсюда последствиями в отношении объема и затрат энергии.

Перейдем теперь к совершенно другой области и приведем некоторые результаты анализа информационной структуры английского языка [14]. Можно считать, что в английском языке 27 символов (26 букв и промежутков между словами). Если бы все эти символы употреблялись одинаково часто и независимо, то информация на букву составила бы $I_0 = \log_2 27 \approx 4,76$ бит. Путем различных хитроумных расчетов и экспериментов было выяснено, что в действительности эта информация составляет всего лишь 1,4 бит. Эта разница характеризует очень важное понятие избыточности информации. Отчасти избыточность в языке объясняется его несовершенством с точки зрения теории информации, а именно тем, что вероятности употребления различных букв и различных слов отличаются на много порядков. Так, например, распределение вероятности слов описывается приближенно выражением $p_n \approx 0,1/n$, где $n = 1, 2, \dots, 8727$ — номер слов, расположенных в порядке убывания их вероятности. С точки зрения теории информации такое «кодирование» сообщения не является оптимальным — оно содержит слишком много знаков. Возможно, что такая структура языка отражает процесс его исторического развития. Остаток избыточности объясняется тем, что одна и та же информация передается многократно. Так, различные буквы в слове скоррелированы между собой таким образом, что каждая буква (точнее, ее информация) как бы повторяется в среднем примерно 2 раза. Различные слова также связаны между собой так, что информационное содержание каждого слова повторяется в среднем 1,5 раза. Итого, в английском языке имеется трехкратная избыточность, т. е. трехкратное повторение со-

общения. Мы уже знаем, что это позволяет уменьшить влияние различных помех, приводящих к ошибкам при передаче информации. Сносная передача обычной языковой информации возможна при отношении сигнал/шум $\sim 1/3$. Вполне возможно, что такой уровень «помех» является «нормальным» для человека, который сформировался в условиях коллективного труда. Если это действительно так, то приведенная выше оценка показывает, что элементарная структурная ячейка творческого коллектива может быть лишь очень небольшой.

Интересно отметить, что современные требования к грамотности учащихся находятся в резком противоречии с подобной информационной оценкой. Допустимый уровень ошибок составляет сейчас всего $\sim 10^{-3}$ (одна ошибка на ~ 1000 букв). С учетом троекратной избыточности языка это соответствует потере одного бита информации на 10^5 печатных страниц (!). Столь низкий уровень помех едва ли может быть оправдан даже эстетическими соображениями. Следует, однако, иметь в виду, что значительная часть языковых «ошибок» содержит в себе в действительности дополнительную информацию о социальном положении, культурном уровне, профессии автора и пр., как это, например, прекрасно отражено Бернардом Шоу в его бессмертном «Пигмалионе». Стремление к предельной безукоризненности языка можно поэтому рассматривать как попытку скрыть эту дополнительную информацию. Быть может, главной причиной нашего отвращения к безграмотному, хотя бы и совершенно понятному, тексту является очень глубокое, почти неистребимое стремление человека к совершенству, пусть даже чисто условному. Возможно также, что упомянутое требование «безошибочности» является естественной защитой от неконтролируемого изменения языка.

Задача. Найти уменьшение информации на одно слово в реальном языке по сравнению с идеальным кодированием.

Пусть в языке имеется N различных слов. Идеальное кодирование соответствует равновероятному употреблению всех слов, что дает информацию $I_0 = \ln N$ на одно слово. В действительности частота слов подчиняется закону Циффа: $p_n = C/n$. При $n \gg 1$ суммирование можно заменить интегрированием, и тогда из условия нормировки $C \approx 1/\ln N$. При этом информация на слово

$$I_1 \approx \sum_{n=1}^N \frac{dn}{n \ln N} \ln(n \ln N) = \frac{\ln N}{2} + \ln \ln N.$$

При $N \gg 1$ это соответствует потере около половины информации по сравнению с равновероятным употреблением слов.

§ 83. ЭКСКУРС В ТЕОРИЮ ИНФОРМАЦИИ. ПРИНЦИП СЦИЛАРДА — БРИЛЛЮЭНА

Для правильного понимания теории информации нужно четко разделять понятия ее количества и ценности. Последнее является типично психологическим понятием и не имеет прямого отношения

к обсуждаемой теории. Количество же информации не зависит от того, воспринимаем ли мы данное сообщение как «правильное» или «неправильное», «истинное» или «ложное», «информацию» или «дезинформацию». Это видно уже из того простого и хорошо известного факта, что выбор любого из приведенных полярных определений зависит и от конкретной ситуации, и от конкретного человека, воспринимающего сообщение. Следовательно, здесь речь идет о действии информации на ту или иную конкретную систему. Это позволяет также правильно понять чрезвычайную неравноценность информации: решающее действие одного бита (да или нет!) и неэффективность целого потока пустой болтовни. Все это нисколько не подрывает ценность теории информации, а наоборот, придает ей особое значение. Установив количественную меру любой информации, независимо от ее значения, мы получаем возможность количественного изучения действия информации на конкретные системы, а следовательно, и измерение ее ценности и значения.

Здесь будет уместно провести аналогию с энергией, количество которой также не зависит от ее действия, значения этого действия или его «ценности». Аналогично информации, одно и то же количество энергии может быть «плохим» или «хорошим», «добрым» или «злым», пройти совершенно незамеченным или вызвать бурную реакцию.

В качестве простейшего физического примера использования информации рассмотрим проблему «демона» Максвелла. Она была поставлена Максвеллом в 1871 г. и заключается в следующем. Представим себе разумное существо, способное следить за движением отдельных молекул газа и сортировать их по скорости, направляя, например, быстрые молекулы в одну половину сосуда, а медленные — в другую. Ясно, что таким образом можно обойти второй принцип термодинамики и получать работу из теплоты без разности температур. В течение многих десятилетий этот парадокс воспринимался как свидетельство качественного отличия живых существ (по крайней мере, демонов!) от неживых объектов. Допускалось, что живые существа могут не подчиняться обычным законам физики. Некоторое разъяснение парадокса было дано Сцилардом (1929 г.), который обратил внимание на то, что работа демона основана на использовании информации о движении молекул. Сцилард высказал предположение, что процесс получения любой информации обязательно сопровождается увеличением энтропии, которое, в соответствии со вторым началом термодинамики, как раз компенсирует уменьшение энтропии газа, производимое демоном. Эти соображения были развиты Димерсом и особенно Бриллюэном, которые, в частности, указали, что в условиях полного термодинамического равновесия, включая и излучение, даже демон не может видеть молекулы. Для наблюдения молекул необходимо рассеять избыточное излучение, что как раз и приводит к увеличению энтропии в соответствии с гипотезой Сциларда.

Рассмотрение различных конкретных примеров позволило Бриллюэну высказать следующий принцип (1953 г.): разность эн-

ропии и информации в замкнутой системе не убывает, или

$$\Delta(S - I) \geq 0. \quad (83.1)$$

Это утверждение является обобщением принципа Карно ($\Delta S \geq 0$) и может быть названо принципом Сциларда — Бриллюэна.

Теория информации позволяет если не доказать этот принцип, то, во всяком случае, понять механизм его действия. С одной стороны, принцип Сциларда — Бриллюэна утверждает, что, используя информацию о системе, можно уменьшить ее физическую энтропию. Пусть, например, нам стало известно, что газ, заключенный в объеме V_0 , на самом деле занимает в данный момент объем $V_1 < V_0$. В принципе мы можем использовать эту информацию для уменьшения физической энтропии газа путем быстрого перемещения стенок сосуда. Изменение энтропии в идеальном случае будет равно $\Delta S = \ln(V_1/V_0) = \Delta I < 0$, т. е. мы как раз израсходовали имевшуюся информацию о системе ($I = \ln(V_0/V_1)$), израсходовали в том смысле, что после уменьшения объема сосуда она стала бесполезной ($I \rightarrow I' = \ln(V_1/V_1) = 0$). Уменьшив энтропию газа, мы можем использовать часть тепловой энергии, например, с помощью изотермического расширения сосуда до прежнего объема:

$$\Delta A = \Delta Q = T \Delta S = T \Delta I. \quad (83.2)$$

В рассматриваемом примере ценность информации можно измерять работой, которую удастся в идеальном случае получить с помощью этой информации (83.2). Оказывается, что ценность информации растет тогда пропорционально температуре.

С другой стороны, принцип Сциларда — Бриллюэна утверждает, что получение любой информации обязательно сопровождается увеличением энтропии в замкнутой системе. Действительно, в § 82 мы убедились, исходя из основного закона теории информации, что для передачи или обработки единицы информации необходимо затратить (рассеять в тепло) минимум T единиц энергии. Следовательно, увеличение энтропии при получении информации равно $\Delta S = \Delta Q/T = \Delta I$.

Глава XII

ДИСПЕРСИЯ

§ 84. ФАЗОВАЯ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТИ ВОЛНЫ

Рассмотрим распространение электромагнитной волны в среде с дисперсией $n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$. Слово *дисперсия* буквально означает разброс. В данном случае речь идет о разбросе значений показателя преломления, точнее, о его зависимости от частоты поля. Дисперсия показателя преломления зависит от динамики электронов сре-

ды. Например, для плазмы (см. задачу 1, § 77)

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m}, \quad (84.1)$$

где n_e — число электронов в единице объема, e , m — заряд и масса электрона.

Задача 1. Найти зависимость диэлектрической проницаемости от частоты поля для однородного и изотропного диэлектрика, помещенного в однородное магнитное поле H .

Данная задача аналогична задаче 1, § 77. Запишем уравнения движения атомного электрона, выбрав декартову систему координат с осью z , параллельной H :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= -\omega_L \dot{y} + \frac{e}{m} E_x; \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= \omega_L \dot{x} + \frac{e}{m} E_y; \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z &= \frac{e}{m} E_z; \quad \omega_L = \frac{eH}{mc}, \end{aligned} \quad (84.2)$$

ω_0 — собственная частота атома-осциллятора. Для гармонической зависимости электрического поля от времени ($e^{-i\omega t}$) отсюда получим $x = aE_x + ibE_y$; $y = iaE_y - ibE_x$;

$$z = \frac{e}{m} \cdot \frac{E_x}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad a = \frac{e}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \omega_L^2}; \quad b = \frac{e}{m} \cdot \frac{\omega \omega_L}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \omega_L^2}.$$

Компоненты вектора электростатической индукции связаны теперь с компонентами поля тензорной зависимостью (см. § 15): $D_\alpha = E_\alpha + 4\pi P_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta$, где $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора диэлектрической проницаемости, которые найдем, подставив в выражение для P_α значения x , y , z , полученные выше. В результате

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{\alpha\beta}) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & i\delta & 0 \\ -i\delta & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix}; \quad \varepsilon = 1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \omega_L^2}; \\ \delta &= \frac{\omega_p^2 \omega \omega_L}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \omega_L^2}; \quad \varepsilon_0 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (84.3)$$

В случае $\omega_0 = 0$ выражение (84.3) дает тензор диэлектрической проницаемости замагниченной холодной плазмы.

Дисперсия характеризует распространение монохроматической волны. Однако мы знаем, что любое поле может быть представлено в виде суперпозиции монохроматических волн и даже — плоских монохроматических волн с определенной частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$. Закон распространения такой волны характеризуется зависимостью $\omega(\mathbf{k})$, которая называется *дисперсионным уравнением*. Например, для плазмы

$$\omega^2(\mathbf{k}) = \omega_p^2 + k^2 c^2. \quad (84.4)$$

Это соотношение получается подстановкой в волновое уравнение,

например (66.2), выражений для поля плоской монохроматической волны: $\mathbf{E}; \mathbf{H} \propto \exp \{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)\}$.

Дисперсионное уравнение определяет, в частности, скорость волны (69.4)

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \equiv \frac{c}{n}. \quad (84.5)$$

Для плазмы всегда $n < 1$, а значит, скорость волны в плазме всегда больше предельной скорости c . Возможно ли это? Не противоречит ли это теории относительности?

Прежде всего заметим, что скорость (84.5) относится к идеальной монохроматической волне бесконечной протяженности. Так как форма такой волны заранее полностью определена, она вообще не может нести никакой информации, и в этом смысле противоречие с теорией относительности не возникает. Скорость (84.5) называется *фазовой скоростью волны*, так как она характеризует перемещение в пространстве точки с определенной фазой. Можно сказать, что фазовая скорость — геометрическое (кинематическое), а не физическое понятие. Приведем наглядный механический пример фазовой скорости. Представим себе цепочку независимых маятников, отклонения и скорости которых в начальный момент времени равны

$$x_n = a \sin kz_n; \quad \dot{x}_n = -a\omega_0 \cos kz_n, \quad (84.6)$$

где $z_n = nl$ — координата n -го маятника, а ω_0 — частота его колебаний. Нетрудно видеть, что колебания маятников образуют бегущую волну $x(z, t) = a \sin(kz - \omega_0 t)$. Ее фазовая скорость $v_\phi = \omega_0/k$ может быть любой в зависимости от начального расположения маятников. В частности, при $k = 0$ (синфазные маятники) $v_\phi = \infty$.

Обратим внимание на то, что фазовая скорость не является вектором, как, например, $\mathbf{k}$. Действительно, пусть вектор $\mathbf{k}$ направлен под углом α к оси x . Тогда поле вдоль x можно записать в виде $E(x, t) = E_0 \exp \{i(k_x x - \omega t)\}$, и фазовая скорость в направлении оси может быть представлена формулой

$$v_x = \frac{\omega}{k_x} = \frac{v}{\cos \alpha} \quad (84.7)$$

вместо необходимого для векторов соотношения $v_x = v \cos \alpha$. В частности, при $\cos \alpha < v/c = 1/n$ фазовая скорость в этом направлении оказывается больше предельной скорости c , а при $\alpha = \pi/2$ она вообще обращается в бесконечность. Обсуждение этого парадокса будет дано в § 86. Однако сразу можно сказать, что фазовая скорость не является «настоящей» (физической) скоростью волны, скажем скоростью движения фотонов. Для передачи сигнала волну необходимо промодулировать, а значит, она уже перестанет быть монохроматической, и ее спектр будет иметь конечную ширину. Модулированная волна называется обычно *волновым пакетом* (монохроматических составляющих), или группой волн.

Исследуем движение волнового пакета в среде. Рассмотрим вначале простейший пример пакета всего из двух волн одинаковой амплитуды

$$A(z, t) = \sin(k_1 z - \omega_1 t) + \sin(k_2 z - \omega_2 t) = \\ = 2 \cos \left[\frac{(k_2 - k_1)z}{2} - \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \right] \sin \left[\frac{(k_2 + k_1)z}{2} - \frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2} \right]. \quad (84.8)$$

При близких $\omega_1 \approx \omega_2$, а значит и $k_1 \approx k_2$ второй сомножитель в последней формуле описывает приблизительно монохроматическую волну, а первый — медленную амплитудную модуляцию — огибающую этой волны. Скорость движения огибающей

$$V = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} \approx \frac{d\omega}{dk}. \quad (84.9)$$

Эта скорость называется *групповой скоростью* волны.

Чтобы исследовать распространение волнового пакета в более общем случае, используем спектральное разложение. Пусть в начальный момент в среде задано поле

$$A_0(z, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikz} dk. \quad (84.10)$$

В силу принципа суперпозиции каждая монохроматическая составляющая начального поля (e^{ikz}) представляет плоскую волну $e^{i(kz - \omega t)}$, где связь ω и k задается дисперсионным уравнением $\omega(k) = ck/n(\omega)$. Отсюда сразу получаем формальное решение:

$$A(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kz - \omega(k)t)} dk. \quad (84.11)$$

Чтобы вычислить этот интеграл в явном виде, предположим, что мы имеем достаточно длинный волновой пакет с узким спектром $\Delta k \ll k_0$. Тогда можно разложить $\omega(k)$ в ряд:

$$\omega(k) \approx \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} (k - k_0) + \left. \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{k=k_0} \frac{(k - k_0)^2}{2}. \quad (84.12)$$

Ограничимся пока первыми двумя членами ряда. Подставляя их в (84.11), получим

$$A(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-it(\omega_0 - k_0 \omega'_0)} \int A(k) e^{ik(z - \omega'_0 t)} dk = \\ = A(z - \omega'_0 t, 0) e^{-i(\omega_0 - k_0 \omega'_0)t}, \quad (84.13)$$

где $\omega_0 = \omega(k_0)$, $\omega'_0 = (d\omega/dk)_{k=k_0}$. Таким образом, с точностью до фазового множителя начальное возмущение $A_0(z, 0)$ (84.10) перемещается без искажения с групповой скоростью (84.9).

Изменение фазы волны $\Delta\theta = t(\omega_0 - \omega'_0 k_0)$ происходит за счет разности фазовой и групповой скоростей: $\Delta\theta = k_0(v_\phi - V)t$. Карти-

на движения волны выглядит при этом следующим образом. Синусоида с частотой $\approx \omega_0$ смещается относительно своей огибающей, «возникая» на одном конце ее и «исчезая» на другом. Энергия волны перемещается, конечно, вместе с волновым пакетом, т. е. движется с групповой скоростью. Это значит, что групповая скорость не должна превосходить предельную c . В частности, например, для волн в плазме (84.1)

$$\frac{V}{c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{d\omega}{dk} = \left[\frac{d}{d\omega} (\omega n) \right]^{-1} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < 1. \quad (84.14)$$

С другой стороны, если групповая скорость равна нулю, волна вообще не несет энергию. Примером может служить рассмотренная выше цепочка маятников, для которой $d\omega/dk = 0$. Независимость частоты от длины волны как раз и показывает, что между соседними маятниками нет никакого взаимодействия, а значит, нет и передачи энергии.

Задача 2. Найти поворот плоскости поляризации плоской линейно поляризованной монохроматической волны, распространяющейся в диэлектрике вдоль однородного магнитного поля (*эффект Фарадея*). Считать поле слабым.

Анизотропия замагниченного диэлектрика несколько усложняет вид волнового уравнения для поля. Теперь нельзя положить $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, поэтому вместо (66.2) получим для плоской монохроматической волны при $\mu = 1$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2},$$

откуда для E_x и E_y с учетом (84.3) запишем

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon E_x + i\delta E_y); \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} (-i\delta E_x + \epsilon E_y).$$

Умножая второе уравнение на i и складывая с первым, приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon + \delta) E; \quad E = E_x + iE_y. \quad (84.15)$$

Теперь вернемся к линейно-поляризованной волне и представим ее в виде суперпозиции двух циркулярнополяризованных (см. (69.6), (69.7))

$$E_{\text{лин}}(z, t) = \frac{1}{2} E_0 (e^{i(k_{\text{пл}} z - \omega t)} \pm e^{-i(k_{\text{пл}} z - \omega t)}).$$

Подстановка каждой из двух составляющих этого выражения в (84.15) дает $k_{\text{пл}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \pm \delta}$ (знак «—» для левой поляризации появляется из-за зависимости вида $e^{i\omega t}$ от времени, что видно из (84.3): $\omega \rightarrow -\omega$). Для слабого магнитного поля ($\omega_L \ll \omega_0$, ω) $k_{\text{пл}} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0 (1 \pm \delta/2\epsilon_0)} \equiv k_0 \pm \Delta k$, и поле волны на расстоянии l от входа в диэлектрик

$$E_{\text{лин}}(l, t) \approx \frac{1}{2} E_0 (e^{i(k_0 l - \omega t)} \pm e^{-i(k_0 l - \omega t)}) (1 + i\Delta k l).$$

Это означает, что вектор $E_{\text{лин}}$ повернулся на угол $\alpha = \text{Arc tg } (\Delta k l) = V_H B l$, где $V_H = \frac{e}{2mc^2} \cdot \frac{\omega_p^2 \omega^2}{\sqrt{\epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$ — постоянная Верде.

§ 85. РАСПЛЫВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

Групповая скорость волны сама, вообще говоря, зависит от частоты (см., например, (84.14)). Это приводит к искажению формы волнового пакета, которое можно оценить следующим образом. Пусть ширина спектра волны $\sim \Delta k$. Тогда разброс групповой скорости $\Delta V \sim \omega_0'' \Delta k$, откуда искажение размера пакета L

$$\Delta L \sim \Delta V t \sim \omega_0'' \Delta k t \sim \frac{\pi t \omega_0''}{L}. \quad (85.1)$$

Искажение можно считать малым ($\Delta L \ll L$) в течение времени $t \ll t_p$, где

$$\omega_0 t_p \sim \frac{L^2 \omega_0}{\omega_0''}. \quad (85.2)$$

Для количественного расчета величины искажения пакета необходимо учесть третий член в разложении (84.12). Проведем это на примере расплывания поля гауссовой формы

$$A(z, 0) = A_0 e^{-z^2/2l_0^2}. \quad (85.3)$$

Пусть закон дисперсии имеет вид

$$\omega(k) = a^2 k^2 \omega_0. \quad (85.4)$$

Такая дисперсия означает, что для $k=0$ как групповая, так и фазовая скорости равны нулю, т. е. мы как бы перешли в сопровождающую систему для очень длинных волн. Производя фурье-преобразование начального возмущения и используя закон дисперсии, получим

$$A(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kz - \omega_0 a^2 k^2 t)} dk. \quad (85.5)$$

Вычислим этот интеграл с помощью результата задачи 3, § 78:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2b^2} - i k z} dz = b e^{-k^2 b^2/2}. \quad (85.6)$$

Можно показать, что это соотношение остается справедливым и для комплексных b , если только $\text{Re } b^2 > 0$ (условие сходимости интеграла). Используя (85.6) для вычисления $A(k)$, получим

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(z, 0) e^{-i k z} dz = A_0 l_0 e^{-i k^2 l_0^2 t/2}.$$

Тогда в (85.5) вновь возникает гауссова функция с комплексным

$b^2 = 1/l^2(t)$. Поэтому можем снова обратиться к (85.6):

$$A(z, t) = A_0 l_0 b e^{-z^2 b^2 / 2} = \frac{A_0}{\sqrt{1 + i \kappa t}} e^{-z^2 / 2 l_0^2 (1 + i \kappa t)}; \quad \kappa = \frac{2a^2 \omega_0}{l_0^2};$$

$$l^2(t) = l_0^2 (1 + i \kappa t). \quad (85.7)$$

Проанализируем полученное выражение. Прежде всего видно, что волновой пакет как целое не смещается. Это связано с выбором специальной системы отсчета или специального закона дисперсии (85.4). Далее оказывается, что пакет расплывается, причем его среднеквадратичный размер описывается выражением

$$\langle z^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} z^2 |A(z, t)|^2 dz}{\int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 dz} = l_0^2 \left(1 + \frac{4t^2 \omega_0^2 a^4}{l_0^4} \right). \quad (85.8)$$

Соответственно амплитуда волны

$$|A| = \frac{A_0}{(1 + 4t^2 \omega_0^2 a^4 / l_0^4)^{1/4}} \quad (85.9)$$

уменьшается таким образом, что полная энергия волны остается постоянной: $|A|^2 \sqrt{\langle z^2 \rangle} = A_0^2 l_0$. Фаза волны изменяется по закону

$$\theta(z, t) = \frac{t \omega_0 a^2 z^2}{l_0^4 + 4t^2 \omega_0^2 a^4} + \beta, \quad \operatorname{tg} 2\beta = -\frac{2t \omega_0 a^2}{l_0^2}. \quad (85.10)$$

В каждый момент времени такая волна является частотно-модулированной в пространстве, т. е. длина волны изменяется вдоль z . Появление такой частотной модуляции, на первый взгляд неожиданное, объясняется очень просто. В начальный момент времени различные гармонические составляющие пакета накладывались друг на друга, образуя гладкий гауссовский пакет (85.3). Затем, вследствие дисперсии групповой скорости, эти составляющие пространственно разделились, что и привело к частотной модуляции. Напомним, что комплексная форма соответствует циркулярно поляризованной волне (см. § 69), т. е. вращению вектора $\mathbf{A}$ в плоскости (x, y) в соответствии со значением фазы $\theta(z)$ (85.10). Действительная часть $\operatorname{Re} A(z, t) = |A| \cos \theta(z, t)$ описывает поведение проекции вектора $\mathbf{A}$ на плоскость (x, z) (рис. XII, 1, б). Для линейно поляризованной волны аналогичное рассмотрение следует провести в действительной форме, что дает

$$A(z, t) = \frac{A_0 l_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-k^2 l_0^2 / 2} \cos(kz - \omega(k)t) dk. \quad (85.11)$$

Этот интеграл не выражается в элементарных функциях. Результат численного интегрирования качественно повторяет картину, пред-

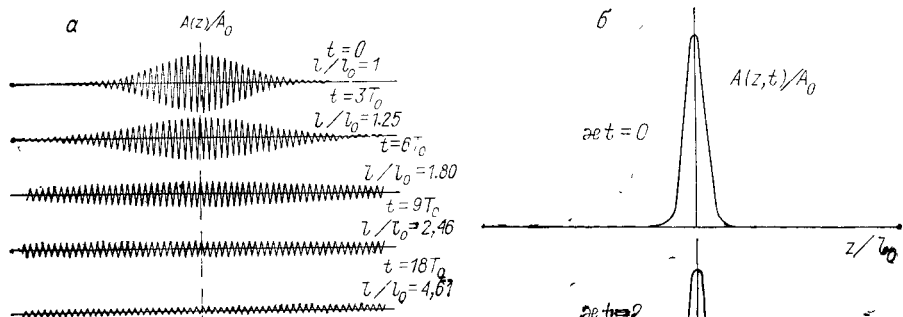


Рис. XII.1. Расплывание волнового пакета:

а — видеопульса (85.12); б — гауссовой формы (85.3).

ставленную на рис. XII.1: гауссовский пакет, расплываясь, приобретает частотную модуляцию в пространстве.

Деформация во времени волнового пакета

$$A(z, 0) = A_0 e^{-\frac{z^2}{2l_0^2} + ik_0 z} \quad (85.12)$$

в среде, закон дисперсии в которой имеет вид $\omega(k) = \omega_0 + a^2(k - k_0)^2 \omega_0$, описывается выражением, которое получим, умножив (85.7) на $e^{i(k_0 z - \omega t)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A(z, t) &= \frac{A_0 \cdot e^{z^2/2|l^2(t)|}}{(1 + \kappa^2 t^2)^{1/4}} \cos \theta(z, t); \\ \kappa &= \frac{2a^2 \omega_0}{l_0}; \quad \theta(z, t) = k_0 z - \omega_0 t + \frac{\kappa t z^2}{2l_0^2 (1 + \kappa^2 t^2)} + \beta; \\ \operatorname{tg} 2\beta &= -\kappa t; \quad |l^2(t)| = l_0^2 (1 + \kappa^2 t^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (85.13)$$

Картина деформации такого «видеопульса» (квазимонохроматической волны с модуляцией по амплитуде) показана на рис. XII.1, б для случая $k_0 l_0 = 20\pi$, $\kappa T_0 = 0,125$.

Волновое уравнение инвариантно относительно изменения знака времени. Это значит, что волновые процессы подобно механическим «обратимы», т. е. симметричны относительно прошлого и будущего. Например, любой обращенный во времени процесс может быть действительно осуществлен при соответствующих начальных условиях. Можно, скажем, сформировать волновой пакет, который будет сжиматься. Для этого, очевидно, нужно взять начальное возмущение в виде частотно-модулированной волны, например в виде

(85.7) с заменой знака t (или i , т. е. нужно взять комплексно-сопряженную волну). Интересно отметить, однако, что, в отличие от неограниченного распыливания пакета, его сжатие всегда конечно и определяется полной шириной спектра $(\Delta z)_{\min} \sim \pi/(\Delta k)_0$. После достижения минимального размера пакет начинает распыливаться. При сжатии пакета амплитуда поля растет. Это явление используется для усиления радиосигналов.

Такое поведение пакета хорошо иллюстрирует простой пример из области спорта. При общем старте бегунов или лыжников группа непрерывно растягивается по дистанции («распыливание» пакета). Если же старт раздельный, а стартуют бегуны в очередности, обратной их скоростным возможностям («гонки с гандикапом»), то после старта последней группа («пакет») будет сжиматься, пока быстрые не обойдут медленных, после чего «пакет» вновь начнет «распыливаться».

§ 86. ВОЛНОВОДЫ

Волноводом называется замкнутая металлическая труба произвольной формы, которая служит для канализации электромагнитной энергии, обычно в диапазоне СВЧ. Дело в том, что передача электромагнитных волн по проводам становится совершенно непригодной, когда длина волны сравнима с расстоянием между проводами. В этом случае провода работают просто как антенна, электромагнитная энергия излучается. Простейшее решение этой проблемы состоит в использовании металлической трубы. Электромагнитная волна не может пройти через достаточно толстую металлическую стенку (см. § 87). Однако она может отражаться на крутых поворотах трубы или в местах изменения ее размеров. Тем не менее удастся сконструировать волноводы таким образом, чтобы обеспечить эффективную передачу электромагнитной волны. Волноводы появились сразу же после изобретения радиолокации как один из необходимых элементов радиолокационной станции.

Как мы увидим ниже, передача электромагнитной энергии по волноводу во многом напоминает распространение волны в среде с дисперсией.

В качестве простейшего примера рассмотрим прямой волновод прямоугольного сечения (рис. XII.2). Конфигурацию поля в волновode можно найти, решив волновое уравнение для потенциалов с граничными условиями на стенках волновода, которые мы будем считать идеально проводящими. Для рассматриваемой задачи удобно использовать кулоновскую калибровку потенциалов (67.6) $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. В отсутствие зарядов и токов $\varphi \equiv 0$ и волновое уравнение принимает вид (см. § 67)

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (86.1)$$

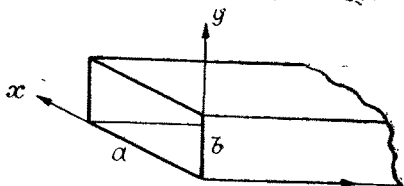


Рис. XII.2. Волновод.

Граничные условия на стенках идеально-проводящего волновода можно выбрать в виде

$$E_t = 0, \text{ или } A_t = 0, \quad (86.2)$$

где E_t , A_t — тангенциальные составляющие поля и вектор-потенциала. Принимая, далее, что поле характеризуется определенной частотой ω , получим уравнение

$$\Delta A + k^2 A = 0; \quad k^2 = \omega^2/c^2, \quad (86.3)$$

которое нужно решать совместно с уравнением $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ и граничными условиями (86.2).

Электрическое и магнитное поля в волноводе взаимно ортогональны, так как они по-прежнему удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (86.4)$$

откуда для вакуумных волноводов ($\epsilon = \mu = 1$)

$$\mathbf{E} = \frac{ic}{\omega} (\nabla \times \mathbf{H}); \quad \mathbf{H} = -\frac{ic}{\omega} (\nabla \times \mathbf{E}). \quad (86.5)$$

Из уравнений (86.5) можно выразить поперечные компоненты поля через продольные:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{ik_z}{k_{\perp}^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{i\omega}{ck_{\perp}^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y}; \\ E_y &= \frac{ik_z}{k_{\perp}^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{i\omega}{ck_{\perp}^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x}; \\ H_x &= -\frac{i\omega}{ck_{\perp}^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{ik_z}{k_{\perp}^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x}; \\ H_y &= \frac{i\omega}{ck_{\perp}^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{ik_z}{k_{\perp}^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y}, \end{aligned} \quad (86.6)$$

где введено обозначение

$$k_{\perp}^2 = k^2 - k_z^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2. \quad (86.7)$$

Эти соотношения дают основание для классификации волн в волноводе — они указывают на существование двух классов волн:

- 1) $A_z = 0; E_z = 0; H_z \neq 0;$
- 2) $A_z \neq 0; E_z \neq 0; H_z = 0.$

Волны 1-го класса называются «магнитными» волнами (H -волна или TE -волна, т. е. волна с поперечным электрическим полем — *transverse electric wave*), а волны 2-го класса — «электрическими» волнами (E -волна или TM -волна). Электромагнитное поле в волноводе представляет собой одну из волн двух данных классов или их суперпозицию (Рэлей, 1897).

Рассмотрим конфигурацию H -волны. Разлагая потенциал волны в двумерный ряд Фурье, получим

$$A_x(x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (A_n \sin nk_x x + B_n \cos nk_x x) \cdot (C_m \sin mk_y y + D_m \cos mk_y y); \quad (86.8)$$

$$k_x = \frac{\pi}{a}; \quad k_y = \frac{\pi}{b},$$

и аналогично для $A_y(x, y)$ с коэффициентами A'_n, B'_n, C'_m, D'_m . Используя граничное условие $A_t = 0$, найдем $D_m = 0, B'_n = 0$. Подставляя оставшуюся сумму в уравнение $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, получим $A_n = C'_m = 0$, а также

$$nB_n C_m k_x + mD'_m A'_n k_y = 0. \quad (86.9)$$

Переобозначив коэффициенты, запишем окончательное решение в виде

$$A_x = \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \cos \frac{n\pi x}{a} \cdot \sin \frac{m\pi y}{b};$$

$$A_y = - \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{nb}{ma} A_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \cos \frac{m\pi y}{b}. \quad (86.10)$$

Полное решение уравнения (86.3) ищем в виде

$$A_{x,y}(x, y, z) = A_{x,y}(x, y) \cdot e^{ik_z z}. \quad (86.11)$$

Подставляя это выражение в (86.3), получим

$$k_z^2 = k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2. \quad (86.12)$$

Волна с заданными номерами гармоник n, m обозначается посредством H_{nm} и TE_{nm} .

Соотношение (86.12) показывает, что слишком высокие гармоники, для которых $k_z^2 < 0$, не могут распространяться по волноводу. Действительно, в этом случае $k_z = \pm i|k_z|$ оказывается мнимым, что согласно (86.11) означает затухание волны. Последнее связано, конечно, не с потерями в стенках, которые мы приняли идеально проводящими, а с отражением волны на входе в волновод (волна «не лезет»). При заданных m, n существует критическая длина волн λ_{nm} , при которой поле еще проходит по волноводу ($\lambda < \lambda_{nm}$). Она определяется из условия $k_z = 0$. Максимальная λ_{nm} соответствует волне $H_{10}(a > b)$: $\lambda_{\max} = 2a$.

Конфигурация полей для H_{10} - и H_{11} -волн показана на рис. XII.3.

Отметим, что типы E_{n0} или E_{0n} невозможны, так как для них не выполняются граничные условия $E_z = 0$ на боковых стенках волновода.

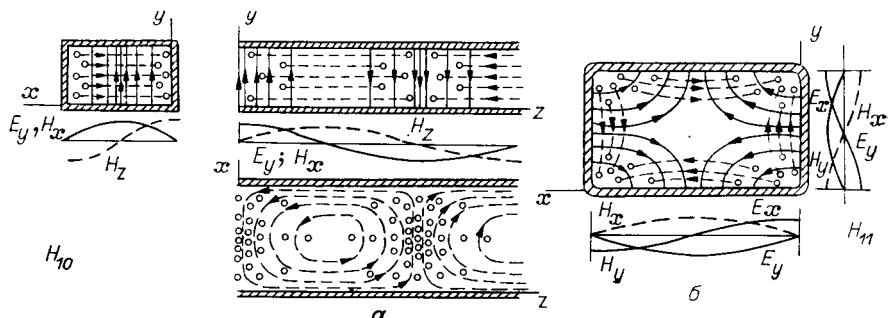


Рис. XII.3. Структуры H_{10} -волны (а) и H_{11} -волны (б) в прямоугольном волноводе.

В случае E -волн запишем выражение для одной из поперечных компонент, например $A_x(x, y, z)$, в котором мы сразу учтем зависимость от z :

$$A_x(x, y, z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} e^{ik_{nm}z}. \quad (86.13)$$

Здесь выбор нужных слагаемых из общего выражения вида (86.8) производится аналогично предыдущему случаю, т. е. из граничного условия $A_t = 0$ и уравнения $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Для продольной компоненты A можем написать

$$A_z(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} B_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \cos \frac{m\pi y}{b} e^{ik_{nm}z}. \quad (86.14)$$

Условие $\text{div } \mathbf{A} = 0$ приводит к связи между коэффициентами

$$ik_{nm}B_{nm} = \frac{n\pi}{a} A_{nm}, \quad (86.15)$$

где k_{nm} определяется из (86.12).

В общем случае поле в волноводе представляет собой суперпозицию нескольких гармоник, или, как их называют, *мод*, удовлетворяющих условию $\lambda_{nm} > \lambda$. Соотношение амплитуд различных мод зависит главным образом от условий возбуждения волновода. Отметим, что поле в волноводе представляет собой комбинацию бегущей волны (вдоль волновода) и стоячих волн (поперек волновода).

Существование критической длины волны, ограничивающей применение волновода, вызвано тем, что рассмотренный волновод является односвязным, т. е. все его стенки имеют один и тот же потенциал. Как было подробно объяснено выше, при таких граничных условиях неизбежно возникает стоячая волна поперек волновода ($k_{\perp} \neq 0$), что и приводит к ограничению пропускания волновода: ($\lambda_{\max} = 2\pi/(k_{\perp})_{\min}$). Однако возможны и другие конструкции, так называемые многосвязные волноводы, которые состоят из нескольких изолированных друг от друга проводников, находящихся при

разных потенциалах. Простейшим примером двухсвязного волновода является коаксиальный кабель. В таком кабеле возможно квазистационарное поле с произвольно большой длиной волны (включая статические поля), и никаких ограничений на длину волны здесь не возникает. Оба поля такого типа волны поперечны, и поэтому она называется *ТЕМ*-волной.

Из соотношений (86.6) видно, что поле в *ТЕМ*-волне ($E_z = H_z = 0$) существует, если только $k_{\perp}^2 = 0$, т. е. фазовая скорость такой волны равна скорости света: $V_{\phi} = \omega/k_z = c$, а критическая длина волны отсутствует: $\lambda_{\max} = 2\pi/k_{\perp} = \infty$. В этом случае волновые уравнения для потенциалов сводятся к уравнению Лапласа по поперечным координатам (в произвольной калибровке):

$$\Delta_{\perp} A = 0; \quad \Delta_{\perp} \varphi = 0, \quad (86.16)$$

т. е. картина поля в поперечном сечении волновода совпадает с картиной статического электромагнитного поля. Это, в свою очередь, подтверждает невозможность распространения *ТЕМ*-волн по односвязному волноводу: квазистатические поля должны охватывать проводники с зарядами или токами. С другой стороны, существование поля в многосвязном волноводов возможно не только за счет возбуждения стоячей волны в поперечном направлении, но и вследствие того, что полный заряд некоторых проводников волновода отличен от нуля. Иными словами, линии $\mathbf{H}$ замкнуты вокруг $\mathbf{j}$ (квазистационарное поле) или $\mathbf{E}$ (волновое поле). Поэтому в односвязном волноводов *ТЕ*-волна обязательно содержит H_z — «охват» вектора $\mathbf{E}$ линиями $\mathbf{H}$ происходит в плоскостях (x, z) и (y, z) . В свою очередь, *ТМ*-волна обязательно содержит E_z — «охват» вектора $\mathbf{E}$ линиями $\mathbf{H}$ происходит в плоскости (x, y) . Несмотря на кажущееся преимущество многосвязных волноводов, их применение для очень коротких волн ограничено большими потерями из-за наличия неполного (внутреннего) проводника, на поверхности которого к тому же возникают, как правило, большие поля.

Распространение волны вдоль волновода можно рассматривать как некоторый одномерный процесс, характеризующийся волновым числом k_z , которое связано с частотой волны соотношениями вида (86.7), (86.12). Последние можно рассматривать как закон дисперсии, описывающий свойства волновода как некоторой «среды».

Рассмотрим подробнее свойства такой среды на примере волновода в виде двух параллельных идеально проводящих плоскостей, отстоящих друг от друга на расстоянии a . В таком волноводов возможны как чисто поперечные волны (*ТЕМ*-волны, $\mathbf{E}$ перпендикулярно плоскостям), так и волны с продольными компонентами (*ТЕ*- и *ТМ*-волны). Первые называются быстрыми волнами — они распространяются с предельной скоростью, так как, по существу, не отличаются от волн в свободном пространстве. Волны второго типа называются медленными, так как для них справедливо соотношение дисперсионного типа (86.12), а их групповая скорость оказывается меньше предельной. Закон дисперсии медленных волн в рассматриваемом случае отличается от (86.12) в двух отношениях: во-первых,

здесь нужно положить $b = \infty$ и, во-вторых, учесть, что теперь волна может распространяться в двух направлениях, скажем, в плоскости (y, z) . В результате получаем

$$\omega^2 = c^2 k_t^2 + \omega_n^2, \quad (86.17)$$

где k_t — проекция вектора $\mathbf{k}$ на плоскость (y, z) , а $\omega_n = ck_\perp = = \pi \hbar c/a$. Из (86.17) находим фазовую и групповую скорости волн:

$$\begin{aligned} \frac{v_\Phi}{c} &= \frac{\omega}{ck_t} = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_n}{ck_t}\right)^2} > 1; \\ \frac{V}{c} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_n}{ck_t}\right)^2}} < 1. \end{aligned} \quad (86.18)$$

Из этих выражений вытекает любопытное равенство

$$\omega = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \quad (86.19)$$

которое в точности соответствует релятивистской зависимости энергии частицы от ее скорости, причем роль массы «частицы» играет величина ω_n . Такая аналогия объясняется тем, что исходный закон дисперсии (86.17) совпадает с соотношением между энергией, импульсом и массой релятивистской частицы. Эта аналогия не является формальной, поскольку согласно квантовой механике энергия фотона пропорциональна частоте поля, а его импульс — волновому вектору $\mathbf{k}$. Каков же физический смысл массы такого «тяжелого» фотона? Дело в том, что закон дисперсии (86.17) описывает распространение поля только в плоскости (y, z) , а координату x можно рассматривать как некоторую внутреннюю степень свободы «двумерного фотона». Энергия поперечных колебаний поля (стоячая волна по x) и есть «внутренняя» энергия тяжелого фотона, т. е. его масса.

Перепишем закон дисперсии (86.17) в виде

$$1 - \frac{\omega_n^2}{\omega^2} = \frac{c^2 k_t^2}{\omega^2} = \left(\frac{c}{v_\Phi}\right)^2 = n_{\Phi}^2, \quad (86.20)$$

где n_{Φ} — эффективный «показатель преломления» волновода как среды с дисперсией, нетрудно видеть, что он в точности совпадает с законом дисперсии для плазмы (84.1). Из этого следует, в частности, что фотон в плазме также является «тяжелым», причем «масса» определяется энергией колебаний частиц в плазме в поле волны.

Кинематика медленной волны в волноводе может быть получена из простых геометрических соображений (рис. XII.4). Такая волна представляет собой суперпозицию двух «косых» волн, распространяющихся под углом α к стенкам волновода и испытывающих,

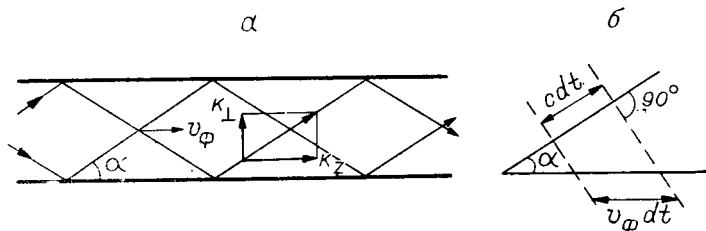


Рис. XIII.4. Кинематика медленной волны в волноводе:
а — «косая» волна в волноводе; б — к определению фазовой скорости.

следовательно, многократные отражения. Наклон волны определяется отношением поперечной и продольной компонент волнового вектора: $\operatorname{tg} \alpha = k_{\perp}/k_z$. Отсюда групповая скорость пакета вдоль волновода равна

$$\frac{V}{c} = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (k_{\perp}^2/k_z^2)}}$$

в соответствии с (86.18). Фазовая скорость волны определяется движением фронта волны вдоль волновода и равна (см. (84.5)) $v_{\phi}/c = 1/\cos \alpha = \sqrt{1 + (k_{\perp}^2/k_z^2)}$, что также совпадает с (86.18). Встречное движение фронтов волн напоминает в этом случае похищение. Здесь особенно наглядно видно, что фазовая скорость является чисто геометрическим понятием.

Дисперсия медленных волн вызывает искажения коротких импульсов при передаче их по односвязному волноводу. Для устранения искажений можно использовать быстрые волны в многосвязных волноводах (например, в кабеле). Однако для очень коротких длин волн быстрые волны могут преобразовываться на неровностях волновода в медленные, что снова приводит к искажению импульса.

Благодаря явлению полного внутреннего отражения волноводом может служить также диэлектрический стержень или пластина с $n > 1$. Закон дисперсии в таком волноводе аналогичен (86.17), но с другими значениями «массы» ω_n , зависящими теперь не только от размеров волновода, но и от ϵ диэлектрика. Однако, в отличие от металлического волновода, здесь нет критической частоты, так как поле существует и вне волновода. В частности, при $\omega \rightarrow 0$ поперечный размер волны неограниченно возрастает. Правда, в этом случае волновод фактически перестает канализировать волну, которая легко рассеивается и поглощается окружающими телами. Поэтому практически диэлектрический волновод можно использовать, по-прежнему, только в ограниченной области частот $\omega \gtrsim c/a(\sqrt{\epsilon} - 1)$.

Диэлектрические волноводы широко применяются в оптике в качестве световодов, например, для передачи света от сцинтилляционных кристаллов к фотоумножителям. Другим интересным применением световодов является так называемая волоконная оптика,

которая передает изображение по пучку стеклянных нитей, причем каждая нить передает один элемент изображения. Обычно используются нити диаметром ~ 20 мкм, т. е. приблизительно в 40 раз больше длины волны света. При этом разрешающая способность волоконной оптики оказывается того же порядка, что и для фотопленки среднего качества (50 линий/мм).

В настоящее время созданы волоконные линии связи протяженностью в десятки километров с огромной пропускной способностью (см. § 82).

Волноводными свойствами обладает не только ограниченная пластина диэлектрика, но и оптически более плотный слой сплошной среды. Таковы, например, некоторые слои в атмосфере, что используется для дальней радиосвязи на УКВ.

Оказывается, что даже в однородной среде возможно образование, при определенных условиях, диэлектрического волновода. Это объясняется зависимостью ϵ от напряженности поля. Существенно, что ϵ возрастает с ростом поля, так как при поляризации атома возвращающая сила падает по мере удаления электрона от ядра. Это означает, что внутри волны среда всегда оптически более плотная, т. е. автоматически образуется диэлектрический волновод. Практически, однако, это явление становится существенным только в очень сильных полях, когда изменение ϵ достаточно велико. Такие поля получаются в фокусе луча мощного лазера, где и наблюдались этот, а также и другие эффекты так называемой *нелинейной оптики*. Последний термин связан с тем, что при учете зависимости $\epsilon(E)$ уравнения Максвелла в среде становятся нелинейными. Результаты исследований показали, что такая самоканализация интенсивной волны в среде оказывается неустойчивой: волновой пакет сжимается в очень малую область с огромными полями, которые вызывают в конце концов локальный электрический пробой и разрушение диэлектрика.

§ 87. СКИН-ЭФФЕКТ

Рассмотрим распространение электромагнитной волны в проводящей среде. Для этого воспользуемся уравнениями Максвелла (45.9) и возьмем ротор от второго из них. Принимая $\mu, \epsilon = \text{const}$ и используя первое и четвертое уравнения, а также векторное тождество $\text{rot rot} = \nabla \text{div} - \Delta$ и закон Ома $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, получим уравнение для магнитного поля:

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (87.1)$$

Отсюда следует дисперсионное уравнение

$$k^2 = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} i\omega + \frac{\epsilon\mu}{c^2} \omega^2. \quad (87.2)$$

Рассмотрим эволюцию начального состояния поля (с заданным k). Решая (87.2) относительно ω , получим

$$\omega = -\frac{2\pi\sigma}{\varepsilon} \left(i \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu} \left(\frac{ck}{2\pi\sigma} \right)^2 - 1} \right). \quad (87.3)$$

При $ck/2\pi\sigma > \sqrt{\mu/\varepsilon}$ магнитное поле затухает с характерным временем $\varepsilon/2\pi\sigma$. В среде с хорошей проводимостью ($ck/2\pi\sigma \ll \sqrt{\mu/\varepsilon}$) имеются два характерных времени затухания

$$\tau_1 \approx \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} \quad \text{и} \quad \tau_2 = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2 k^2}, \quad \tau_2 \gg \tau_1. \quad (87.4)$$

Обратим внимание, что для быстрого затухания $\tau_1 \propto 1/\sigma$, а для медленного $\tau_2 \propto \sigma$.

Аналогичным образом можно получить уравнение для электрического поля в среде, которое имеет вид

$$\Delta E = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{\varepsilon} \nabla \rho, \quad (87.5)$$

где ρ — плотность свободных зарядов. Если их нет, то электрическое поле затухает так же, как и магнитное. При наличии зарядов электрическое поле можно представить как $E = E_{\text{вихр}} + E_{\text{пот}}$, где $\text{div } E_{\text{вихр}} = 0$, $\text{rot } E_{\text{пот}} = 0$. Тогда уравнение (87.5) распадается на два, причем выражение для $E_{\text{вихр}}$ совпадает с (87.4), поскольку $4\pi\rho = \text{div } E_{\text{вихр}} = 0$. Формула для $E_{\text{пот}}$ принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_{\text{пот}}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} E_{\text{пот}} \right) = 0, \quad (87.6)$$

поскольку $\Delta E_{\text{пот}} - 4\pi\nabla\rho/\varepsilon = \text{rot rot } E_{\text{пот}} = 0$. Уравнение (87.6) эквивалентно рассмотренному ранее уравнению релаксации зарядов в среде (23.1), в чем легко убедиться, взяв дивергенцию от его левой части. Поэтому, как и заряды, потенциальная составляющая поля всегда затухает с характерным временем τ_1 (87.4).

Рассмотрим теперь другую задачу: на границу проводящей среды падает электромагнитная волна заданной частоты ω . Каково затухание волны в пространстве? Оно определяется мнимой частью k из (87.2):

$$k = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}\omega}{c} \sqrt{1 + i \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega}} \equiv k_0 + \frac{i}{\delta}, \quad (87.7)$$

где δ — характерная глубина проникновения переменного электромагнитного поля в проводящую среду, называемая *толщиной скин-слоя* (от англ. *skin* — кожа).

В среде с плохой проводимостью ($\sigma \ll \omega$)

$$\delta \approx \frac{c}{2\pi\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = 2\nu_{\text{ф}}\tau_1, \quad (87.8)$$

где $v_\phi = c/\sqrt{\epsilon\mu}$ — имеет обычный вид. В обратном предельном случае ($\sigma \gg \omega$)

$$\delta \approx \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}; \quad k_0 = \frac{1}{\delta} \quad (87.9)$$

а фазовая скорость $v_\phi = \omega/k_0 = c/\sqrt{2\pi\sigma\mu/\omega} \ll c$.

Для промышленной частоты 50 Гц ($\lambda = 6000$ км) толщина скин-слоя в меди $\delta \approx 1$ см, $v_\phi \approx 3$ м/с, а в железе ($\mu = 10^3$) $\delta \approx 1$ мм, $v_\phi = 30$ см/с. В радиодиапазоне ($\lambda = 600$ м) $\delta \approx 0,1$ мм; $v_\phi \approx 50$ м/с (для меди).

Найдем теперь соотношение между электрическим и магнитным полями затухающей волны ($\sigma \gg \omega$). Проще всего его получить из первого уравнения (45.9): $kE = i\omega\mu H/c$, или, так как $k = (1+i)/\delta$,

$$\frac{H}{E} = (1-i)\frac{c}{\mu\omega\delta} = (1-i)\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\mu\omega}}. \quad (87.10)$$

Поскольку для хороших проводников (медь) $\sigma \sim 10^{17}$ с⁻¹, то в радиодиапазоне $E \ll H$, так что речь идет о затухании магнитного поля. Такое большое значение H/E связано с отражением волны от поверхности хорошего проводника (см. § 72), при котором электрические поля падающей и отраженной волны почти компенсируют друг друга. Соотношение (87.10) определяет, таким образом, так называемые *граничные условия Леонтовича* при отражении волны от проводника с конечной проводимостью для компонент поля, касательных к поверхности.

Задача 1. Вычислить сопротивление проводника с учетом скин-эффекта. Из закона Ома $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ находим полный ток в скин-слое:

$$I = \int_0^\infty j(z) dz = \sigma E_0 \int_0^\infty e^{ikz} dz = \frac{1+i}{2} \sigma \delta E_0.$$

Действительная часть этого выражения определяет омическое сопротивление проводника (на единицу длины и единицу поперечного размера): $R_1 = 2/\sigma\delta$, мнимая — его внутреннюю индуктивность: $L_1 = 2c^2/\sigma\omega\delta = 4\pi\mu\delta$.

Вычислим теперь потери энергии в проводнике. Для этого найдем модуль вектора Пойнтинга на поверхности проводника. Получим прежде всего выражение для векторного произведения комплексных векторов: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \theta$, где θ — угол между ними, направленный от вектора $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$. Представляя $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|e^{i\varphi}$, $\mathbf{b} = |\mathbf{b}|e^{i(\varphi+\theta)}$, получим $\mathbf{a}^*\mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \theta + i|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. Таким образом,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \text{Re}(\mathbf{a}^*\mathbf{b}), \quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \text{Im}(\mathbf{a}^*\mathbf{b}). \quad (87.11)$$

Отсюда

$$|S| = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \frac{c}{4\pi} \left| \frac{E}{H} \right| \cdot |H|^2 = \frac{\mu |H|^2}{8\pi} \omega\delta = \omega v_\phi. \quad (87.12)$$

Это выражение имеет очень простой физический смысл: поток энергии равен плотности энергии в проводнике вблизи его границы, умноженной на скорость движения волны внутри проводника v_{ϕ} .

Этот же результат можно получить и непосредственным интегрированием джоулевых потерь внутри проводника:

$$S = \int_0^{\infty} \sigma |E|^2 dz = \sigma E_0^2 \int_0^{\infty} e^{-2z/\delta} dz = \frac{\delta \sigma E_0^2}{4\pi} = w v_{\phi}.$$

Наиболее распространенное применение скин-эффекта — экранирование от переменного магнитного поля. Последнее может быть вредно как само по себе, так и благодаря связанному с ним вихревому электрическому полю, создающему различные электрические наводки. Экранирование осуществляется путем окружения защищаемой аппаратуры достаточно толстым проводящим экраном. Практическая трудность связана с тем, что обычно экран не может быть полностью замкнутым. Необходимы, например, различные отверстия для подвода питания аппаратуры, наблюдения за ней и т. д. Интересно отметить, что такие экраны ослабляют поле сильнее, чем по простому экспоненциальному закону (см. задачи 2, 3).

Задача 2. Найти коэффициент экранирования κ цилиндрического экрана радиуса r , толщина стенок которого h много меньше скин-слоя. Магнитное поле параллельно оси цилиндра.

Ввиду условия $h \ll \delta$, поля внутри стенок, а значит, и плотность тока можно считать однородными. Тогда ток в экране (на единицу его длины) можно определить просто по закону Фарадея:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = \frac{i\omega\pi r^2 H_i/c}{2\pi r/\sigma h},$$

где H_i — поле внутри экрана. Закон сохранения циркуляции магнитного поля дает $H_e - H_i = 4\pi I_1/c$, где H_e — внешнее поле. Для коэффициента экранирования получаем

$$\kappa = \frac{H_e}{H_i} = 1 + i \frac{hr}{\delta^2}.$$

Здесь, кроме малого множителя h/δ , который возникает при разложении экспоненты $e^{-z/\delta}$, появляется большой множитель r/δ . Такой же множитель r/δ появляется и при сильном скин-эффекте ($h \gg \delta$). Физическая причина дополнительного ослабления поля в экранируемом пространстве связана с тем, что «хвост» потока в сплошном металле $H_i \cdot 2\pi r \delta$ распределяется на большую площадь πr^2 . В результате для коэффициента экранирования получается следующая простая оценка: $\kappa \sim re^{h/\delta}/2\delta$.

Другим важным применением скин-эффекта является формирование магнитного поля нужной конфигурации, которая повторяет форму проводящей поверхности с точностью до толщины скин-слоя.

Скин-эффект приводит к своеобразному взаимодействию переменного тока с проводящей стенкой (рис. XII.5). Так как силовые линии не проникают в глубь проводника, то при достаточно малой толщине скин-слоя нормальная составляющая магнитного поля на поверхности близка к нулю. Поэтому конфигурация магнитного по-

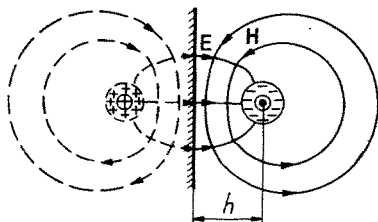


Рис. XII.5. Поля импульсного пучка электронов вблизи проводящей поверхности.

ля тока вблизи проводящей плоской стенки эквивалентна полю двух токов разного направления. Один из них называется обычно изображением тока по аналогии с электростатическим изображением заряда. Таким образом, ток «отталкивается» от проводящей поверхности.

Если ток создается пучком заряженных частиц, то кроме взаимодействия тока со стенкой, есть еще взаимодействие заряда, которое приводит к притяжению пучка стенкой. Последнее всегда сильнее, так что в результате получается притяжение к стенке, равное на единицу длины пучка (сравни (30.4))

$$F = \frac{2I^2}{2lc^2} - \frac{2I^2}{2lv^2} = -\frac{I^2}{lv^2\gamma^2}, \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (87.13)$$

Если скомпенсировать электрический заряд пучка, то результирующая сила изменит направление; такой пучок будет отталкиваться от стенки (рис. XII.6). На этом явлении основан интересный метод фокусировки пучка в металлической трубе, остроумно названный *ФУКО*сировкой. Так как пучок отталкивается трубой «со всех сторон», он устойчиво движется вдоль оси трубы. Такая фокусировка позволяет транспортировать достаточно интенсивный пучок по изогнутой трубе и, в частности, удерживать его в кольцевой трубе.

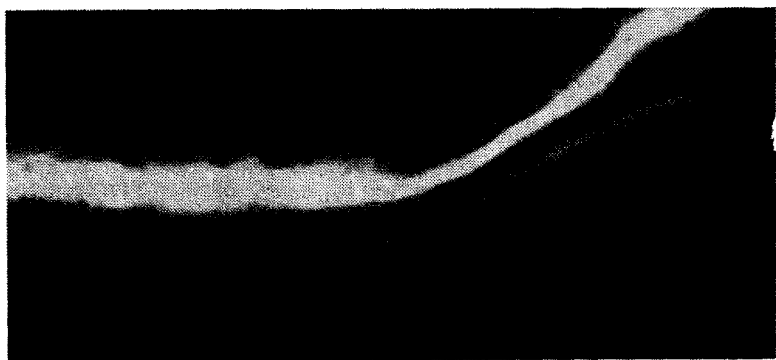


Рис. XII.6. Отражение пучка электронов от металлической пластинки.

Название этой самофокусировки связано с тем, что токи, наводимые переменным полем в проводнике, известны как токи Фуко, по имени французского ученого, впервые описавшего это явление.

Задача 3. Оценить магнитное поле вблизи центра тонкого проводящего диска радиуса R и толщины h , помещенного в однородное переменное магнитное поле, если $h \ll \delta \ll R$.

Токи Фуко плотностью $j_\Phi(r)$, возбуждаемые в диске, создают на его оси z поле (см. (28.4))

$$H_\Phi(r=0, z) = \frac{2\pi h}{c} \int_0^R \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} j_\Phi(r) dr.$$

В свою очередь, ток в кольце (r, dr) , concentрическом с диском,

$$j_\Phi(r) dr = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\dot{\Phi}(r)}{h \Delta R}, \quad \dot{\Phi}(r) = 2\pi i \omega \int_0^r H(x) x dx,$$

$\Delta R = \frac{2\pi r}{\sigma h dr}$ — сопротивление кольца, $H(r) = H_0 + H_\Phi(r, 0)$ — полное поле в плоскости кольца. Подчеркнем, что здесь учтена индуктивность кольца, так как ЭДС индукции вычисляется через сумму внешнего поля H_0 и поля токов Фуко $H_\Phi = (r)$ (см. (48.4) и задачу 2).

Аналитически система уравнений не решается. Для оценки можно принять $\dot{\Phi} \sim i\omega \mu r^2 H_{\text{полн}}$, $H_{\text{полн}} = H_0 + H_\Phi$, где $H_\Phi = H_\Phi(0, 0)$ — поле в центре диска. Тогда

$$H_{\Phi 0} \sim -\frac{i\omega\sigma}{c^2} \cdot \frac{hR}{2} H_{\text{полн}} = -\frac{i h R}{2\delta^2} H_{\text{полн}},$$

откуда

$$\frac{H_0}{H_{\text{полн}}} \sim 1 + \frac{i h R}{2\delta^2}, \quad |H_{\text{полн}}| \ll |H_0| \text{ при } \delta \ll hR$$

(сравни задачу 2 и комментарий к ней).

Рассмотрим теперь нестационарный скин-эффект, когда зависимость магнитного поля от времени на границе проводника $H(0, t)$, не является гармонической. Если по-прежнему пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости, то из (87.1) приходим к уравнению диффузионного типа:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = D_H \Delta H. \quad (87.14)$$

Такой же вид имеет и уравнение теплопроводности (см. (87.37) ниже). Коэффициент диффузии магнитного поля

$$D_H = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}. \quad (87.15)$$

Простейший случай стационарного скин-эффекта соответствует экспоненциальному росту внешнего поля $H(0, t) = H_0 e^{i/\tau}$. Такая зависимость получается из гармонической $H_0 e^{-i\omega t}$ формальной заменой: $\omega = i/\tau$. Тогда для одномерной задачи решение диффузионного уравнения (87.14) сразу получается из (87.9) такой же за-

меной:

$$H(z, t) = H_0 e^{-z/\delta + t/\tau}. \quad (87.16)$$

Эффективная толщина скин-слоя

$$\delta = c \sqrt{\frac{\tau}{4\pi\mu\sigma}} = \sqrt{D_H \tau} \quad (87.17)$$

не зависит от времени, как и в стационарном случае. Решение (87.16) можно интерпретировать как диффузионное распространение фронта магнитного поля вглубь проводника

$$H(z, t) = H_0 e^{-u/\delta}; \quad u = z - \frac{\delta}{\tau} t \quad (87.18)$$

со скоростью

$$v_D = \frac{\delta}{\tau} = \sqrt{\frac{D_H}{\tau}} = \frac{c}{\sqrt{4\pi\mu\sigma\tau}} \ll c. \quad (87.19)$$

Последнее неравенство есть условие применимости диффузионного приближения (87.14), т. е. пренебрежение токами смещения. Например, для меди ($\sigma = 5 \cdot 10^{17}$; $\mu = 1$) и $\tau = 10^{-6}$ с диффузионная скорость $v_D \approx 120$ м/с.

Рассмотрим теперь более сложную задачу о нестационарном скин-эффекте при быстром («мгновенном») включении гармонического поля:

$$H(0, t) = \begin{cases} 0; & t < 0, \\ e^{-it}; & t > 0. \end{cases} \quad (87.20)$$

Частоту поля ω_0 , а также толщину стационарного скин-слоя $\delta_0 = c/\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega_0}$ полагаем равными единице. Фурье-спектр поля (87.20)

$$H(0, \omega) \approx \frac{i}{\sqrt{2\pi}(\omega - 1)} \quad (87.21)$$

содержит низкие частоты $\omega \approx 0$, которые и будут определять значительно более сильное проникновение поля в проводник по сравнению со стационарным скин-эффектом на частоте $\omega_0 = 1$. Пренебрегая последним (ср. спектры (87.21) и (78.8)) и считая характерную область частот $|\omega| \ll 1$ (см. ниже), можем написать решение в виде фурье-интеграла:

$$H(z, t) \approx -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(i-1)z\sqrt{\omega} - i\omega t} d\omega. \quad (87.22)$$

Мы использовали здесь выражение для стационарного скин-эффекта на частоте фурье-гармоники ω в виде

$$H(z, \omega) = e^{(i-1)z\sqrt{\omega}} H(0, \omega). \quad (87.23)$$

Легко проверить, что это выражение справедливо как для $\omega > 0$, так и для $\omega < 0$.

Вычисление интеграла (87.22) производится с помощью замены переменных: $(i-1)z\sqrt{\omega} = iu$ и приведения показателя экспоненты к полному квадрату (ср. (85.6)). В результате получаем

$$H(z, t) \approx -\frac{e^{-z^2/2t}}{\pi t} \int dv \left(v + \frac{iz}{\sqrt{2t}} \right) e^{-v^2} = -i \frac{ze^{-z^2/2t}}{\sqrt{2\pi t^{3/2}}}, \quad (87.24)$$

где новая переменная $v = Au - i/2A$; $A^2 = t/2z^2$. Поскольку внешнее поле (87.20) можно представить в виде $e^{-it} = \cos t - i \sin t$, выражение

$$S(z, t) = \frac{ze^{-z^2/2t}}{\sqrt{2\pi t^{3/2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\varphi(\tau)}{z^2}, \quad (87.25)$$

$$\text{где} \quad \varphi(\tau) = \frac{e^{-1/\tau}}{\tau^{3/2}}; \quad \tau = \frac{2t}{z^2}, \quad (87.26)$$

описывает нестационарный скин-эффект при включении внешнего поля $H(0, t) = \sin t$ и в точности совпадает с результатом работы [15], полученным другим методом.

При фиксированной глубине z функция $S(z, t)$ достигает максимального значения

$$S_{\text{макс}}(z) \approx \frac{1}{2z^2} \quad (87.27)$$

в момент времени $t_{\text{макс}} = z^2/3$. Таким образом, максимальное поле убывает с глубиной значительно медленнее, чем при стационарном скин-эффекте. Отметим, что в заданный момент времени t поле внутри проводника имеет максимум при $z = z_{\text{макс}} = \sqrt{t}$, равный

$$S_{\text{макс}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e t}}. \quad (87.28)$$

В принятом приближении $|\omega| \ll 1$ все полученные выражения справедливы только для $t \gg 1$ и $z \gg 1$ (см. 87.23). Поэтому решение (87.24) не удовлетворяет граничному условию $H(0, t) = e^{-it}$, где нужно учитывать также отброшенный стационарный вклад в скин-эффект, который соответствует частотам $\omega \approx 1$ в полном спектре (78.8) внешнего поля (87.20).

С принятой точностью вклад от поля $\cos t$, который дается действительной частью интеграла (87.24), равен нулю, т. е. такое поле проникает в проводник значительно слабее. Чтобы вычислить этот малый вклад, представим спектр внешнего поля (87.20) в виде ряда (см. (87.21)):

$$H(0, \omega) \approx -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} (1 + \omega + \dots + \omega^n + \dots). \quad (87.29)$$

Первый член этого ряда соответствует аппроксимации внешнего поля δ -функцией:

$$H^{(0)}(0, t) = -i\delta(t), \quad (87.30)$$

а последующие члены — ее производным:

$$H^n(0, t) = i^{n-1} \frac{d^n \delta(t)}{dt^n}. \quad (87.31)$$

На первый взгляд такое представление внешнего поля (87.20) кажется странным. Однако учтем, что мы ищем решение в области $|\omega| \ll 1$; $t \gg 1$. Тогда роль δ -функции играет первый полупериод $\sin t$, что и приводит к основному отличию от стационарного скин-эффекта.

Для внешнего поля со спектром (87.29) решение также можно представить в виде ряда:

$$H(z, t) \approx \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1} \frac{d^n \int S(z, t)}{dt^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{z^2} \right)^{n+1} \frac{d^n \Phi(\tau)}{d\tau^n}. \quad (87.32)$$

В частности, первое (и наибольшее) действительное слагаемое ($n=1$) дает приближенное решение задачи о скин-эффекте при включении внешнего поля $H(0, t) = \cos t$:

$$C(z, t) \approx \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Phi'(\tau)}{z^4}. \quad (87.33)$$

Это решение тоже совпадает с полученным в [15].

При заданном z функция $C(z, t)$ достигает максимума в момент $t_{\text{макс}} \approx z^2/8$ ($\tau_{\text{макс}} \approx 1/4$), равного

$$C_{\text{макс}}(z) \approx \frac{3,3}{z^4}. \quad (87.34)$$

Это максимальное поле значительно меньше поля, возникающего при включении $\sin t$. Поскольку в ряде (87.32) действительные и мнимые члены чередуются, точность решений (87.25) и (87.33) порядка $1/z^4$.

Решение (87.32) можно использовать и при другой зависимости от времени внешнего поля $H(0, t)$, нужно лишь знать его спектр $H(0, \omega)$ в области низких частот.

Оказывается, что явление скин-эффекта не ограничивается электромагнитными процессами, а имеет место также и при распространении тепла. Действительно, плотность потока тепла $\mathbf{q}$ определяется следующим уравнением:

$$\mathbf{q} = -\chi \nabla T, \quad (87.35)$$

где T — температура, а χ — коэффициент теплопроводности. Подсчитаем баланс тепла в некотором объеме V , ограниченном замкнутой поверхностью S :

$$\frac{d}{dt} \int G T dV = - \oint (\mathbf{q}, d\mathbf{S}) \quad (87.36)$$

G — удельная теплоемкость среды. Отсюда $\text{div } \mathbf{q} = -G \frac{\partial T}{\partial t}$,

или
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\chi}{G} \Delta T. \quad (87.37)$$

Это уравнение в точности совпадает с уравнением (87.14). Следовательно, должен иметь место тепловой скин-эффект.

Наиболее важным его проявлением служит распространение годовых колебаний температуры вглубь земли. Считая этот процесс гармоническим с частотой $\omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, найдем толщину скин-слоя

$$\delta = \sqrt{\frac{2\chi}{G\omega}} \approx 1,5 \text{ м} \quad (87.38)$$

и скорость распространения тепловой волны

$$v_0 = \omega\delta \approx 9 \text{ м/год.} \quad (87.39)$$

Численные значения приведены для грунта средней влажности.

Вследствие теплового скин-эффекта температура на глубине $h \gg \delta$ остается практически постоянной и равной приближенно средней годовой температуре на поверхности в этом месте. Это обстоятельство можно использовать для простого измерения средней годовой температуры. Если последняя оказывается ниже 0°C , образуется так называемая «вечная мерзлота». В этом случае почва оттаивает лишь на глубине $\sim \delta$. Из-за сдвига фазы тепловой волны оттаивание отстает, более или менее значительно, от температуры на поверхности. Этот же эффект приводит к запаздыванию таяния толстого льда. Например, в Арктике он тает только в сентябре [16].

Для некоторых прецизионных измерений необходима высокая стабильность температуры, которую проще всего достигнуть, «закопавшись» в землю. При глубине $\sim 10 \text{ м}$ годовые колебания температуры снижаются до $\sim 0,1^\circ\text{C}$. Это явление издревле использовалось людьми для создания естественных холодильников — погребов. Интересно отметить, что из-за сдвига фазы летняя температура воздуха в погребе на глубине $\rho\delta \approx 5 \text{ м}$ ниже зимней, хотя эта разница и невелика: $(T_s - T_n) \approx (\Delta T)_0 e^{-\pi} \approx 3^\circ\text{C}$; $(\Delta T)_0 \approx 80^\circ\text{C}$ — годовые колебания температуры в Сибири.

Приложение

Наименование величины	Единица СИ	Обозначение	Размерность
<i>Основные</i>			
Длина	метр	м	м
Время	секунда	с	с
Масса	килограмм	кг	кг
Сила тока	ампер	А	А
Температура	кельвин	К	К
Сила света	кандела	кд	кд

Единицы механических и

Сила	ньютон	Н	$\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$
Давление	паскаль	Па	$\text{м}^{-1} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$
Энергия, работа	джоуль	Дж	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$
Мощность, тепловой поток	ватт	Вт	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$
Частота	герц	Гц	с^{-1}
Теплоемкость, энтропия	джоуль на кельвин	Дж/К	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$

Единицы электрических

Заряд	кулон	Кл	А · с
Разность потенциалов, напряжение	вольт	В	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1}$
Напряженность электрического поля	вольт на метр	В/м	$\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1}$
Емкость	фарад	Ф	$\text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^4 \cdot \text{А}^2$
Сопротивление	ом	Ом	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-2}$
Удельное сопротивление	ом-метр	Ом · м	$\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-2}$
Напряженность магнитного поля	ампер на метр	А/м	$\text{А} \cdot \text{м}^{-1}$
Магнитная индукция	тесла (вебер на квадратный метр)	Тл (Вб/м ²)	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$
Магнитный поток	вебер	Вб	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$
Индуктивность	генри	Гн	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}$

Примечание: (г) — единица гауссовой системы.

Единицы физических величин

Гауссова единица (г)	Обозначение	Размерность	Соотношение между единицами
----------------------	-------------	-------------	-----------------------------

единицы

сантиметр	см	см	1 м = 100 см
секунда	с	с	
грамм	г	г	1 кг = 1000 г
—	—	—	1 А = $3 \cdot 10^9$ (г)
кельвин	К	К	
—	—	—	

термодинамических величин

дина	дин	$\text{см} \cdot \text{г} \cdot \text{с}^{-2}$	1 Н = 10^5 дин
дина на квадратный сантиметр	дин/см ²	$\text{см}^{-1} \cdot \text{г} \cdot \text{с}^{-2}$	1 Па = 10 дин/см ²
эрг	эрг	$\text{см}^2 \cdot \text{г} \cdot \text{с}^{-2}$	1 Дж = 10^7 эрг
эрг в секунду	эрг/с	$\text{см}^2 \cdot \text{г} \cdot \text{с}^{-3}$	
герц	Гц	с^{-1}	
—	—	—	

и магнитных величин

—	—	$\text{см}^{3/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}$	1 Кл = $3 \cdot 10^9$ (г)
—	—	$\text{см}^{1/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}$	300 В = 1 (г)
—	—	$\text{см}^{-1/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}$	3 В/м = 10^{-4} (г)
сантиметр	см	см	1 Ф = $9 \cdot 10^{11}$ см
—	—	—	9 Ом = $1 \cdot 10^{-11}$ (г)
—	—	—	1 Ом·м = $1,11 \cdot 10^{-10}$ (г)
эрстед	Э	$\text{см}^{-1/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}$	1 А/м = $4\pi \cdot 10^{-3}$ Э
гаусс	Гс	$\text{см}^{-1/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}$	1 Тл = 10^4 Гс
максвелл	Мкс	$\text{см}^{3/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}$	1 Вб = 10^8 Мкс
сантиметр	см	см	1 Гн = 10^9 см

1. *Candell R. E.* // Amer. J. Phys.— 1983.— V. 51, N 8.— P. 698—702.
2. *Hillas A. M., Cranshaw T. E.* // Nature.— 1959.— V. 184, N 12.— P. 4690—4691.
3. *Молин Ю. Н.* // Природа.— 1981.— № 11.— С. 24—32.
4. *Климкин В. Ф., Пономаренко А. Г.* // Журн. технич. физ.— 1979.— Т. 49, № 9.— С. 1896—1904.
5. *Хёрд К. М.* // Усп. физич. наук.— 1984.— Т. 142, вып. 2.— С. 331—355.
6. *Шмидт В. В.* Введение в физику сверхпроводников.— М.: Наука, 1982.
7. *Букель В.* Сверхпроводимость.— М.: Мир, 1975.
8. *Кокс А., Дельримп Г., Доул Р.* // Усп. физич. наук.— 1968.— Т. 94, № 4.— С. 719—735.
9. *Арнольд В. И., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д.* // Журн. эксперим. теор. физ.— 1981.— Т. 81, № 6.— С. 2052—2058.
10. *Кнопфель Г.* Сверхсильные импульсные магнитные поля.— М.: Мир, 1972.
11. *Вавилов С. И.* Глаз и Солнце // Собр. соч.— М.: АН СССР, 1956.— Т. 4.
12. *Кравков С. В.* Цветовое зрение.— М.: Наука, 1951.
13. *Бялик Г. И.* Цветное телевидение.— Л.: Советское радио, 1960.
14. *Бриллюэн Л.* Наука и теория информации.— М.: Физматгиз, 1960.
15. *Волосов В. И., Чириков Б. В.* // Журн. технич. физ.— 1960.— Т. 30, № 5.— С. 508—511.
16. *Мельников И. А.* // Природа.— 1984.— № 1.— С. 68—77.

Ампера закон 71

Бетатрон 148

Био-Савара закон 72

Больцмана распределение 18, 33

Брюстера угол 199

Ван Леевен теорема 114

Вебера — Фехнера закон 165

Взаиминдукции коэффициент 128

Виртуальный катод 68

Волна в волноводе 251

— — — быстрая 255

— — — электромагнитная монохроматическая 182

Волновое число 182

Волновой пакет 245

Волны длина 182

— частота 182

Встречные пучки 31

Гаусса теорема 15

Генератор униполярный 117

Гильбертово пространство 213, 218

Гиромангнитное отношение 89

Гистерезис в ферромагнетиках 106

Градиента оператор 8

Дебая радиус 18

Джозефсона эффект 139

Джоуля — Ленца закон 50

Диамagnetизм 93

Диполь электрический 10, 12

Диэлектрическая проницаемость 35, 36

Диэлектрическая проницаемость вакуума 37

Добротность контура 131

Домены 106

Дрейф частицы в электромагнитном поле 147

Емкостные коэффициенты 27

Емкость проводников взаимная 27

Индукции электрической вектор 36

Индукция насыщения 106, 107

— остаточная 106, 107

Ирншоу теорема 25

Калибровка потенциалов 79, 81, 178, 179

Когерентности время 224

— длина 224

Колебания тока в контуре 130

Корреляция поля 223

Котельникова теорема 232

Коэрцитивная сила 106, 107

Кроссовер пучка частиц 158

Лапласа оператор 17

Ларморовский радиус 146

Ларморовская частота 146

Леонтовича граничные условия 260

Отражение полное внутреннее 198, 200

— — — электромагнитной волны 193—196

Пашена кривая 63

Плотность тока электрического 47

— энергии электрического поля 21, 41

Поляризации вектор 33, 35

Поляризация линейная 183

— круговая 182

— ориентационная 34

— среды 33

— эллиптическая 182

Потенциальность электрического поля 9

Поток магнитный 83

Потоко сцепление 120, 129

Пойнтинга вектор 142

Показатель преломления среды 176, 197, 244

Проводимость среды 49

— плазмы 212

Протона заряд 31, 32

Резерфорда опыт 31

Роговского пояс 137

Самоиндукции коэффициент 119

Сверхпроводники второго рода 140

— первого рода 140
 Сегнетоэлектричество 108
 Силовые линии электрического поля 10
 — — магнитного поля 78
 Силы стрикционные 45, 122
 Скин-слоя толщина 259
 Линза квадрупольная 155, 156
 — литиевая 155
 — магнитная аксиальная
 — — тонкая 152, 153
 — — толстая 153
 — параболическая 155
 — электростатическая аксиальная 153, 154
 Ливилля теорема 158
 Ловушка магнитная 151
 Лондоновская глубина 140
 Лондонов уравнение 113
 Лоренца сила 73, 145
 — преобразования для поля 74
 Лучи электромагнитной волны 179

Магнитная проницаемость 96
 — — вакуума 97
 Магнитного потока квант 139
 Магнитное поле замороженное 122
 Максвелла «демон» 242
 Максвелла уравнения 118
 Мейсснера эффект 139
 Моды волны в волноводе 254
 Моды колебаний в резонаторе 205, 208
 Момент магнитный 85
 — обобщенный 148

Найквиста формула 231, 237
 Намагничение среды 93
 Непрерывности уравнение 47, 48

Скин-эффект нестационарный 263
 — — тепловой 267
 Скорость волны групповая 246
 — — фазовая 245
 Сопротивление емкостное 132
 — заземления 53
 — индуктивное 132

— магнитное 103
 — проводника 50
 Спектр амплитудный 211
 — затухающих колебаний 2
 — мощности 223
 — непрерывный 214
 — смешанный 227
 — фазовый 211
 Стохастическое ускорение 226

Ток смещения 81, 98
 Трансформатор 135
 «Трех вторых», закон 66

Фарадея эффект 247
 Ферриты 108
 Физо опыт 190
 Флаттер 192
 Фотона масса 31, 112
 Фотоэлектронный умножитель 1
 Френеля формулы 197, 198
 Фуко Токи 263
 Фурье-разложение 210

Хаббла закон 189

Цветовое ощущение 166

Чайлда — Ленгмюра — Богуславского закон 66
 Частота резонатора собственная
 — плазменная 55, 212
 Четырех-вектор тока 48

Шеннона формула 234, 235
 Шум белый 227
 Шума температура 237

Экранирование магнитного поля
 — электрического 27, 28

Электрическое поле вихревое 11
 Электромагнитного поля импульс
 — — масса

Электрона заряд 8, 31, 32
 Электронная лавина 63
 Электронно-оптический преобразователь 172
 Электродвигатель асинхронный 133—135
 Эмиссия автоэлектронная 64